



浙江省新阵地教育联盟 2027 届高三第一次学情诊断

数学参考答案

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的.

1	2	3	4	5	6	7	8
C	D	C	D	B	A	B	B

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9	10	11
ABC	AC	ACD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 60 13. $\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}$ 14. $\frac{9}{8}$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. (本题 13 分)

解：

(1) $\because ABCD$ 为梯形, $\angle DAB = 60^\circ$, $\therefore \angle ADC = 120^\circ$ 2 分

由余弦定理可得

$CA^2 = 1 + 9 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = 13$, ...4 分

$\therefore CA = \sqrt{13}$ 6 分

(2) 过 C 作 $CE \parallel AD$, 交 AB 于 E , 则 $CE = EB = 3$,
又 $\angle CEB = \angle DAB = 60^\circ$, 所以 $\triangle CEB$ 为正三角形, $\therefore \angle B = 60^\circ$, ...8 分

由正弦定理可知 $\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{AC}{\sin B}$, 即 $\frac{4}{\sin \angle ACB} = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$, ...11 分

$\therefore \sin \angle ACB = \frac{2\sqrt{39}}{13}$ 13 分

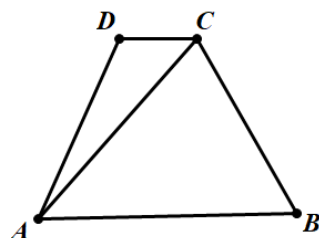
第 (2) 问另解：

在 $\triangle ADC$ 中 $\cos \angle ACD = \frac{1 + 13 - 9}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{26}$,

又 $\cos \angle ACD = \cos \angle CAB = \frac{5\sqrt{13}}{26}$ 8 分

在 $\triangle ABC$ 中 $BC^2 = 16 + 13 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{5\sqrt{13}}{26} = 9 \quad \therefore BC = 3$ 11 分

又 $\sin \angle ACD = \sin \angle CAB = \frac{3\sqrt{39}}{26}$, 由正弦定理可得: $\frac{3}{\sin \angle CAB} = \frac{4}{\sin \angle ACB}$



$$\sin \angle ACB = \frac{2\sqrt{39}}{13} \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

16. (本题 15 分)

解:

- (1) 证明: 因为 $PA=PD$, 且 O 为 AD 的中点,
根据等腰三角形“三线合一”的性质, 可知 $PO \perp AD$ 2 分

在直角梯形 $ABCD$ 中, 连接 CO

因为 $AD \parallel BC$, $AO=BC$ 且 $AB \perp AD$, 所以四边形 $ABCO$ 为矩形.

$\therefore CO \perp AD$,

在 $RT\triangle ODC$ 中 $CD=2\sqrt{2}, OD=2 \therefore OC=2$ 4 分

在 $\triangle POC$ 和 $\triangle POD$ 中:

$$\begin{cases} PC=PD \\ PO=PO \\ OC=OD=2 \end{cases}$$

所以 $\triangle POC \cong \triangle POD$ (SSS).

$\therefore \angle POC = \angle POD = 90^\circ$

由此得, 即 $PO \perp$ 平面 $ABCD$ 7 分

- (2) 以 O 为原点, OC, OD, OP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$.

设 $PO=a$, 由已知条件及(1)中结论可得各点坐标:

$O(0,0,0), D(0,2,0), C(2,0,0), P(0,0,a)$ 9 分

$\overrightarrow{CD}=(-2,2,0), \overrightarrow{CP}=(-2,0,a)$

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}_1=(x,y,z)$, 则:

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{CD} = -2x + 2y = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{CP} = -2x + az = 0 \end{cases}$$

取 $x=a$, 得 $\vec{n}_1=(a,a,2)$ 12 分

易知平面 ACD 的一个法向量为 $\vec{n}_2=(0,0,1)$.

设二面角 $P-CD-A$ 的大小为 θ .

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{2}{\sqrt{a^2 + a^2 + 4}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \therefore a = 2 \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

第(2)问另解: 过 O 作 $OH \perp CD$, 垂足为 H , 连接 PH , 则 $CD \perp$ 平面 POH
故 $PH \perp CD$,

$\therefore \angle PHO$ 是二面角 $P-CD-A$ 的平面角, 即 $\cos \angle PHO = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 12 分

求得 $OH = \sqrt{2}, \tan \angle PHO = \sqrt{2}$

在 $\triangle PHO$ 中, $\frac{PO}{OH} = \sqrt{2} \Rightarrow PO = 2$ 15 分

17. (本题 15 分)

解:

- (1) 设“理论考试合格”为事件 A , “实操考试合格”为事件 B ,

$$P(A) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}, \text{ 或 } P(A) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{16}$$

$$P(B) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}, \text{ 或 } P(B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$$

.....4 分

$$\text{由事件的独立性可知获得证书的概率为 } P(AB) = P(A)P(B) = \frac{15}{16} \cdot \frac{8}{9} = \frac{5}{6}$$

.....6 分

(2) 根据题意, ξ 的可能取值为 2, 3, 4 且

$$P(\xi = 2) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{16} \quad \text{.....8 分}$$

$$P(\xi = 3) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{8} \quad \text{.....10 分}$$

$$P(\xi = 4) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{16} \quad \text{.....12 分}$$

所以 ξ 的分布列为

ξ	2	3	4
P	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$

$$\text{所以 } E(\xi) = 2 \times \frac{9}{16} + 3 \times \frac{3}{8} + 4 \times \frac{1}{16} = \frac{5}{2} \quad \text{.....15 分}$$

18. (本题 17 分)

解:

$$(1) e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}, c = 2, \text{ 所以 } a = \sqrt{3}, b = 1$$

$$\text{双曲线方程为 } \frac{x^2}{3} - y^2 = 1; \quad \text{.....4 分}$$

(2) (i) 设直线 l 的方程为: $x = my - 2$, $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 易得 $R(-x_1, -y_1)$,

$$\text{联立方程 } \begin{cases} x = my - 2 \\ \frac{x^2}{3} - y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 消去 } x \text{ 得: } (m^2 - 3)y^2 - 4my + 1 = 0,$$

由韦达定理得:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{4m}{m^2 - 3} \\ y_1 y_2 = \frac{1}{m^2 - 3} \end{cases}, \quad \text{.....6 分}$$

$$\text{由于 } \overrightarrow{QF} = 2\overrightarrow{FP}, \text{ 则 } y_2 = -2y_1, \quad \text{.....8 分}$$

$$\text{结合韦达定理得: } m = \frac{\pm\sqrt{11}}{11}, \text{ 故直线 } l \text{ 的方程为: } y = \pm\sqrt{11}(x + 2); \quad \text{.....10 分}$$

(ii) 连接 OQ , 设四边形 $QROF$ 总面积为 S , 则有: $S = S_{\triangle OQF} + S_{\triangle OQR}$.

由图象对称性, 不妨设 $y_1 > 0, y_2 < 0$, 又 $\because \lambda \geq 1, \therefore y_1 + y_2 \leq 0$, 结合韦达定理可得 $m \in [0, \sqrt{3})$

$$\text{对于 } \triangle OQF, S_{\triangle OQF} = \frac{1}{2} \times 2 \times (-y_2) = -y_2$$

$$\text{又 } O \text{ 为 } PR \text{ 中点, 所以 } S_{\triangle OQR} = S_{\triangle OQP} = \frac{1}{2} \cdot 2 |y_1 - y_2| = y_1 - y_2$$

$$S = S_{\triangle OQF} + S_{\triangle OQR} = y_1 - 2y_2 \quad \text{.....13 分}$$

又由求根公式可得: $y_1 = \frac{2m - \sqrt{3}\sqrt{m^2 + 1}}{m^2 - 3}, y_2 = \frac{2m + \sqrt{3}\sqrt{m^2 + 1}}{m^2 - 3}$, 代入上式可得:

$$S = y_1 - 2y_2 = \frac{2m + 3\sqrt{3}\sqrt{m^2 + 1}}{3 - m^2},$$

(除求根公式以外, 也可利用韦达定理求得: $y_1 - y_2 = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{m^2 + 1}}{3 - m^2}, y_1 + y_2 = \frac{4m}{m^2 - 3}$

$$\therefore S = y_1 - 2y_2 = -\frac{1}{2}(y_1 + y_2) + \frac{3}{2}(y_1 - y_2) = \frac{2m + 3\sqrt{3}\sqrt{m^2 + 1}}{3 - m^2})$$

.....15 分

易知 S 是关于 m 的单调递增函数, 所以 $m=0$ 时四边形面积最小为 $\sqrt{3}$, 又 $m \in [0, \sqrt{3})$,

所以 $S \in [\sqrt{3}, +\infty)$

.....17 分

第(2)问另解:

(i) 显然直线斜率存在, 可设直线 l 的方程为: $y = k(x + 2)$, 联立方程 $\begin{cases} y = k(x + 2) \\ \frac{x^2}{3} - y^2 = 1 \end{cases}$,

消去 y 得: $(1 - 3k^2)x^2 - 12k^2x - (12k^2 + 3) = 0$, 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

由韦达定理得:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{12k^2}{1 - 3k^2} \\ x_1 x_2 = \frac{-(12k^2 + 3)}{1 - 3k^2} \end{cases}, \quad \text{.....6 分}$$

由于 $\overrightarrow{QF} = 2\overrightarrow{FP}$, 则 $-2 - x_2 = 2(x_1 + 2)$, ...8 分

结合韦达定理得: $k = \pm\sqrt{11}$.

故直线 l 的方程为: $y = \pm\sqrt{11}(x + 2)$; 10 分

(ii) 连接 OQ , 设四边形 $QROF$ 总面积为 S , 则有: $S = S_{\triangle OQF} + S_{\triangle OQR}$.

当 k 不存在时, $\lambda = 1$, 则面积 $S = \sqrt{3}$; 11 分

当 k 存在时, $\lambda > 1$, 由对称性不妨设 $k > 0$

对于 $\triangle OQF$, $S_{\triangle OQF} = \frac{1}{2} \times 2 \times (-y_2) = -y_2 = -k(x_2 + 2)$

对于 $\triangle OQR$, $S_{\triangle OQR} = S_{\triangle OQP} = \frac{1}{2} \cdot 2 |y_1 - y_2| = |k(x_1 - x_2)|$.

显然 $x_1 > x_2$, 故 $S_{\triangle OQR} = \frac{1}{2} \times 2k(x_1 - x_2) = k(x_1 - x_2)$,

所以 $S = -k(x_2 + 2) + k(x_1 - x_2) = k(x_1 - 2x_2 - 2)$, 将关系式 $x_2 + 2 = -\lambda(x_1 + 2)$ 代入面积公式:

$$S = k[(x_1 + 2) + 2\lambda(x_1 + 2)] = k(x_1 + 2)(1 + 2\lambda) \quad \text{.....13 分}$$

由 $\overrightarrow{QF} = \lambda\overrightarrow{FP}$ 得: $x_2 + 2 = -\lambda(x_1 + 2)$, 根据韦达定理:

两式之和变为: $(1-\lambda)(x_1+2) = \frac{4}{1-3k^2}$,

两式之积变为: $-\lambda(x_1+2)^2 = \frac{1}{1-3k^2}$,

将两式相除, 得到: $\frac{1-\lambda}{-\lambda(x_1+2)} = 4$, 即 $x_1+2 = \frac{\lambda-1}{4\lambda}$

故 $1-3k^2 = -\frac{1}{\lambda(x_1+2)^2} = -\frac{16\lambda}{(\lambda-1)^2}$, 即 $3k^2 = 1 + \frac{16\lambda}{(\lambda-1)^2} = \frac{(\lambda-1)^2 + 16\lambda}{(\lambda-1)^2} = \frac{\lambda^2 + 14\lambda + 1}{(\lambda-1)^2}$

因为 $k > 0$, 所以 $k = \frac{\sqrt{\lambda^2 + 14\lambda + 1}}{\sqrt{3}(\lambda-1)}$. 再将 k 与 (x_1+2) 的表达式统一代入:

$S(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda^2 + 14\lambda + 1}}{\sqrt{3}(\lambda-1)} \times \frac{\lambda-1}{4\lambda} \times (1+2\lambda)$, 即 $S(\lambda) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(2 + \frac{1}{\lambda}\right) \sqrt{\lambda^2 + 14\lambda + 1}$

.....15 分

令 $f(\lambda) = \left(2 + \frac{1}{\lambda}\right) \sqrt{\lambda^2 + 14\lambda + 1}$,

故 $f'(\lambda) = \left(-\frac{1}{\lambda^2}\right) \sqrt{\lambda^2 + 14\lambda + 1} + \left(2 + \frac{1}{\lambda}\right) \frac{\lambda+7}{\sqrt{\lambda^2 + 14\lambda + 1}}$.

化简得: $f'(\lambda) = \frac{2\lambda^3 + 14\lambda^2 - 7\lambda - 1}{\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 + 14\lambda + 1}}$, $\because \lambda > 1 \therefore f'(\lambda) > 0$ 恒成立, 所以 $S(\lambda)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上

是严格单调递增 $\therefore S(\lambda) > \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(2 + \frac{1}{1}\right) \sqrt{1^2 + 14 \times 1 + 1} = \sqrt{3}$

故四边形 $QROF$ 面积的取值范围为: $[\sqrt{3}, +\infty)$.

.....17 分

19. 解:

(1) 设 $f(x)$ 的不动点为 x_0 , 则 $2^{x_0} + x_0 - 5 = x_0$, 解得 $x_0 = \log_2 5$,

所以函数 $f(x)$ 的不动点为 $\log_2 5$.

.....3 分

(2) 记 $f(x)$ 的图像为 M . $\because x_0$ 是函数 $f(x)$ 的一个“不动点”,

且函数 $f(x)$ 的图像绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 之后不变,

$\therefore B_1(x_0, x_0) \in M$

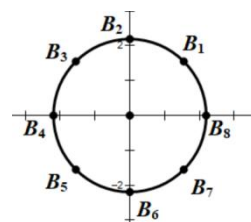
$\therefore B_2(0, \sqrt{2}x_0) \in M$,

.....5 分

同理可得:

$B_3(-x_0, x_0) \in M, B_4(-\sqrt{2}x_0, 0) \in M, B_5(-x_0, -x_0) \in M, B_6(0, -\sqrt{2}x_0) \in M,$

$B_7(x_0, -x_0) \in M, B_8(\sqrt{2}x_0, 0) \in M$



.....8 分

因为 $B_2(0, \sqrt{2}x_0), B_6(0, -\sqrt{2}x_0) \in M$, 则根据函数的定义可知 $\sqrt{2}x_0 = -\sqrt{2}x_0, \therefore x_0 = 0$.

.....10 分

(3) 原命题等价证明 $F(x) = f(x) - \lambda x$ 在 R 上存在唯一的零点.

先证明存在性.

令 $|f(x) - f(y)| \leq a|x - y|$ 中的 $y = 0$ ，则

$$|f(x) - f(0)| < a|x| \Rightarrow -a|x| + f(0) \leq f(x) \leq a|x| + f(0).$$

$$F(x) = f(x) - \lambda x \leq a|x| - \lambda x + f(0), \text{ 当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时,}$$

$$a|x| - \lambda x + f(0) = (a - \lambda)x + f(0) \rightarrow -\infty.$$

所以存在 $x_1 \in R$ ，使得 $F(x_1) < 0$.

.....12 分

$$F(x) = f(x) - \lambda x \geq -a|x| - \lambda x + f(0), \text{ 当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时,}$$

$$-a|x| - \lambda x + f(0) = (a - \lambda)x + f(0) \rightarrow +\infty.$$

所以存在 $x_2 \in R$ ，使得 $F(x_2) > 0$

根据零点的存在性定理，存在 ε ，使得 $F(\varepsilon) = 0$.

.....14 分

再证明唯一性

不妨假设存在 $\eta \neq \varepsilon$ ，使得 $F(\eta) = 0$ 且 $\varepsilon > \eta$.

由题目的条件可知 $f(\varepsilon) - f(\eta) \leq a(\varepsilon - \eta)$.

又因为 η, ε 均为 $F(x) = f(x) - \lambda x$ 的根，则 $f(\varepsilon) - f(\eta) = \lambda(\varepsilon - \eta)$ ，代入上式得

$\lambda(\varepsilon - \eta) \leq a(\varepsilon - \eta)$ ，又因为 $\varepsilon > \eta$ ，可得 $\lambda \leq a$ ，与条件不符，故假设不成立.

综上两方面 $F(x) = f(x) - \lambda x$ 在 R 上存在唯一的零点.

.....17 分