



绝密★考试结束前

浙江省新阵地教育联盟 2027 届高三第一次学情诊断

数学试题卷

命题：安吉高级中学 吴 忠、徐国平 审题：宁波中学 倪 蕾 桐庐中学 蔡建平 校稿：李慧华、唐宜男

第 I 卷

一、**单选题**：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若复数 $z = 1 - 7i$ ，则 $|z| =$

- A. 6 B. 8 C. $5\sqrt{2}$ D. 50

2. 已知 $|\vec{a}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ ，若 $\vec{a} \cdot (\vec{a} - t\vec{b}) = 0$ ，则实数 t 的值为

- A. $-\frac{1}{5}$ B. -1 C. $\frac{1}{5}$ D. 1

3. 曲线 $y = \sin x + \cos x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程

- A. $y = -x - 1$ B. $y = -x + 1$ C. $y = x + 1$ D. $y = x - 1$

4. 已知实数 $x > 0, y > 0, xy = 1$ 且 $x \neq y$ ，则下列不等式一定正确的是

- A. $\ln \frac{x}{y} < 0$ B. $\ln x^y < 0$ C. $\ln x + \ln y < 0$ D. $\ln x \ln y < 0$

5. 已知椭圆 $x^2 + ay^2 = 1 (0 < a < 1)$ 的一个顶点与抛物线 $y = ax^2$ 的焦点重合，则 a 的值为

- A. $\frac{1}{32}$ B. $\frac{1}{16}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 3$ ，对于 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ， $a_{n+2} - a_n = 2$ ， S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则 $S_{100} =$

- A. 5100 B. 4999 C. 5202 D. 5000

7. 已知函数 $f(x) = e^x - \frac{m}{2}x^2 - m - 1$ 在 $\mathbb{R}$ 上仅存在极小值，则 m 的范围是

- A. $0 < m < e$ B. $m < 0$ C. $m > e$ D. $m \leq e$

8. $\{f(x) | x \in (0, +\infty)\} = \{f(x) | x \in (0, 1]\}$ 的一个不充分条件是

- A. $\forall x \in (0, +\infty), f(x) = f(x+1)$ B. $\forall x \in (0, +\infty), f(x) = f(\frac{2}{x})$
C. $\forall x \in (0, +\infty), f(x) = f(\frac{x^2+1}{2x})$ D. $\forall x \in (0, +\infty), f(x) = f(2^x)$

二、**选择题**：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 下列统计量中，不能度量样本的离散程度的是

- A. 中位数 B. 平均数
C. 众数 D. 标准差

10. 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AD \perp AB$, $AD = \sqrt{3}$, $CD = 1$, $AB = 3$. 点 E 在线段 AB 上, 满足 $AE = 1$. 现将 $\triangle BCE$ 沿 CE 翻折至 $\triangle PCE$ 的位置, 在翻折过程中 (点 P 不在底面 $AECD$ 内), 下列说法正确的是
- A. 四棱锥 $P-AECD$ 体积最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- B. 存在某个位置, 使得 $PD \perp$ 平面 PCE
- C. 四棱锥 $P-AECD$ 外接球表面积的最小值为 7π
- D. 直线 PA 与 PC 所成角的取值范围是 $(0, \frac{\pi}{3})$
11. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 及定点 $A(4, 0)$, 设 l 为圆 O 的一条动切线, 切点为 P . 若 l 上存在点 Q 满足 $\angle PQA = 60^\circ$, 则下列结论正确的有
- A. 恒有 $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP} = 1$
- B. 无论切点 P 在何处, 直线 l 上总存在两个不同的点 Q 满足条件
- C. 存在点 P , 使得 $\triangle PQA$ 为等边三角形
- D. 线段 OQ 长度的最大值为 $2\sqrt{7}$

第 II 卷

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. $(2x + y)^6$ 的展开式中 $x^2 y^4$ 的系数为 ▲ (用数字作答).
13. 已知函数 $f(x) = 3\cos(2x + \varphi)$, $(0 < \varphi < \pi)$ 满足 $f(x + \frac{\pi}{4}) = f(\frac{\pi}{4} - x)$ 恒成立, 则 $\varphi =$ ▲ , 若锐角 α 满足 $f(\alpha) = -1$, 则 $\cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) =$ ▲ .
14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ($n \in N^*$), 若 $\exists t \in R$, $\forall n \in N^*$, 使得 $|a_n - t| \leq k$, 则实数 k 的最小值为 ▲ .

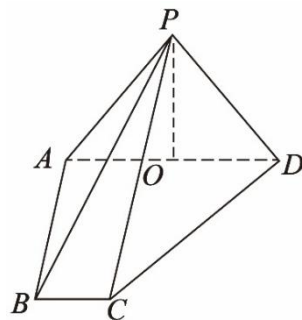
四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

15. (13 分) 已知在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 4$, $CD = 1$, $AD = 3$, $\angle DAB = \frac{\pi}{3}$
- (1) 求 AC 的长;
- (2) 求 $\sin \angle ACB$ 的值.

16. (15 分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA=PC=PD$, 底面 $ABCD$ 是直角梯形, $AD \parallel BC$, $AB \perp AD$. 已知 $AD=4, BC=2$, $CD=2\sqrt{2}$. 点 O 为 AD 的中点,

(1) 求证: $PO \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 若二面角 $P-CD-A$ 的余弦值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 PO 的长.



17. (15 分) 某项考试按理论考试、实操考试两科目依次进行, 只有当理论考试成绩合格时, 才可继续实操考试. 已知每科目只允许有一次补考机会, 两个科目成绩均合格方可获得证书. 现某人参加这项考试, 每次理论考试成绩合格的概率均为 $\frac{3}{4}$, 每次实操考试成绩合格的概率均为 $\frac{2}{3}$. 假设各次考试成绩合格与否均互不影响.

(1) 求他可获得证书的概率;

(2) 在这项考试过程中, 假设他不放弃所有的考试机会, 记他参加考试的次数为 ξ , 求 ξ 的分布列和数学期望 $E(\xi)$.

18. (17 分) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点为 $F(-2, 0)$, 离心率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点, 过 F 的动直线 l 与曲线 C 交于 P, Q 两点, 且 $\overrightarrow{QF} = \lambda \overrightarrow{FP} (\lambda \geq 1)$, 直线 PO 与曲线 C 的另一个交点为 R .

(i) 当 $\lambda = 2$ 时, 求直线 l 的方程;

(ii) 求四边形 $QROF$ 的面积取值范围.

19. (17 分) 取名于荷兰数学家鲁伊兹·布劳威尔不动点定理是拓扑学里一个非常重要的不动点定理. 该定理表明: 对于满足一定条件的图象连续不间断的函数 $f(x)$, 在其定义域内存在一点 x_0 , 使得 $f(x_0) = x_0$, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的一个“不动点”.

(1) 求函数 $f(x) = 2^x + x - 5$ 的不动点;

(2) 若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的图像绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 之后不变, x_0 是函数 $f(x)$ 的一个“不动点”, 证明: $x_0 = 0$;

(3) 设常数 $a > 0$, 函数 $f: R \rightarrow R$, 满足 $|f(x) - f(y)| \leq a|x - y|, \forall x, y \in R$.

$g(x) = f(x) - (\lambda - 1)x$, 对于任意实数 $\lambda > a$, 证明: 函数 $g(x)$ 存在唯一的不动点.