



名校联盟

绝密★考试结束前

## Z20<sup>+</sup>名校联盟（浙江省名校新高考研究联盟）2027 届高三第一次学情诊断

### 数学试题卷

命题：长兴中学 程颖、钱忠

审题：富阳中学 李观琴

桐乡高级中学 方蕾

元济高级中学 檀奇斌

校稿：李慧华、汤全丽

#### 考生须知：

1. 本卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前务必将自己的姓名，准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题纸规定的地方。
3. 答题时，请按照答题纸上“注意事项”的要求，在答题纸相应的位置上规范答题，在本试卷纸上答题一律无效。
4. 考试结束后，只需上交答题卷。

### 第 I 卷

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数  $z = -2 - i$ ，则  $|z|$  为

- A. 1                                      B. 2                                      C.  $\sqrt{5}$                                       D. 5

2. 已知  $A, B, C$  是同一平面内不同的三点，且  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CB}$ ，若  $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{BC}$ ，则  $\lambda =$

- A. -1                                      B. -3                                      C. 1                                      D. 3

3. 若以点  $(\sin\theta, \cos\theta), (\cos\theta, \sin\theta), (\tan\theta, 1)$  为元素构成的集合  $M$  有 4 个子集，则  $\theta$  可以是

- A.  $\frac{\pi}{6}$                                       B.  $\frac{\pi}{4}$                                       C.  $\frac{\pi}{3}$                                       D.  $\frac{5}{12}\pi$

4. 已知数列  $\{a_n\}$  满足：  $a_1 = 5$ ，  $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{当 } a_n \text{ 为偶数,} \\ 3a_n + 1, & \text{当 } a_n \text{ 为奇数.} \end{cases}$ ，则  $a_{10} =$

- A. 8                                      B. 4                                      C. 2                                      D. 1

5. 已知两个线性相关变量  $x, y$  的统计数据如下表所示，其经验回归方程为  $\hat{y} = 5x + 5$ ，则下列说法正确的是

|     |    |    |    |     |    |
|-----|----|----|----|-----|----|
| $x$ | 1  | 2  | 4  | 5   | 8  |
| $y$ | 11 | 15 | 25 | $m$ | 45 |

- A.  $m = 30$                                       B. 样本相关系数  $r < 0$

- C. 经验回归直线必过点  $(4, 25)$                                       D. 当  $x = 5$  时，残差为 1

6. 已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ ，准线  $l$  与  $x$  轴的交点为  $B$ ，过抛物线上一点  $A$  作准线  $l$  的垂线，垂足为  $H$ ，若  $HF$  为线段  $AB$  的中垂线，且  $|AB| = 4\sqrt{2}$ ，则  $p =$

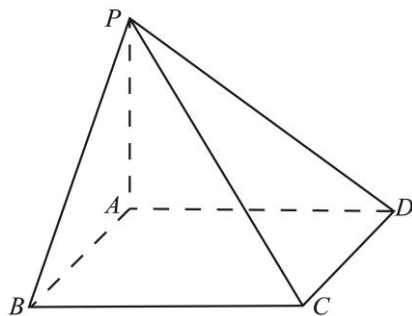
- A. 1                                      B. 2                                      C. 4                                      D. 8

7. 已知函数  $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2$ ,  $g(x) = e^x + \frac{a}{x} (a \in \mathbf{R})$ , 若曲线  $y = f(x)$  上存在点  $P$ , 使得点  $P$  关于  $y$  轴的对称点在曲线  $y = g(x)$  上, 则  $a$  的最大值为

- A.  $-\frac{1}{e}$  B.  $-1$   
C.  $\frac{1}{e}$  D.  $1$

8. 现有红、黄、蓝、白 4 种颜色的颜料可供使用, 给四棱锥  $P-ABCD$  (如图) 的各侧面及底面涂上颜色, 要求相邻 (有一条公共边) 的两面不同色, 则恰有两个面涂了红色的概率为

- A.  $\frac{1}{12}$  B.  $\frac{1}{6}$   
C.  $\frac{1}{4}$  D.  $\frac{1}{3}$



第 8 题图

二、多选题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知  $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$  的展开式共有 6 项, 则

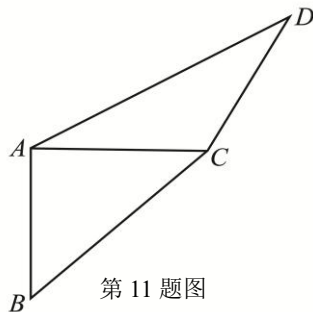
- A.  $n = 5$  B. 展开式的二项式系数之和为 32  
C. 展开式中存在常数项 D. 展开式的各项系数之和为 1

10. 已知点  $P$  为圆  $C: (x-a)^2 + (y-a)^2 = 1$  上的一个点, 点  $A(1,0), B(4,0)$ , 则

- A. 过点  $A$  一定存在两条直线与圆  $C$  相切  
B. 存在实数  $a$ , 使得  $|PB| = 2$   
C. 存在实数  $a$ , 使得  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$   
D. 存在实数  $a$ , 使得  $|PA| = 2|PB|$

11. 如图, 在平面四边形  $ABCD$  中,  $AB = AC = CD = 1$ ,  $\angle ADC = 30^\circ, \angle DAB = 120^\circ$ , 将  $\triangle ACD$  沿对角线  $AC$  翻折至  $\triangle ACP$ , 在翻折过程中,

- A. 存在某个位置, 使得  $AP \perp BC$   
B. 存在某个位置, 使得平面  $PBC \perp$  平面  $ABC$   
C. 存在某个位置, 使得点  $B$  到直线  $PC$  的距离为 1  
D. 当三棱锥  $P-ABC$  体积最大时, 该三棱锥的外接球表面积为  $5\pi$



第 11 题图

## 第 II 卷

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 双曲线  $x^2 - 2y^2 = 1$  的焦距为     ▲    .

13. 已知函数  $f(x) = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x$ , 实数  $x_1, x_2$  满足  $x_1 x_2 < 0$ ,  $f(x_1) + f(x_2) = 0$ . 若  $|x_1 - x_2| > m$  恒成立, 则实数  $m$  的最大值为     ▲    .

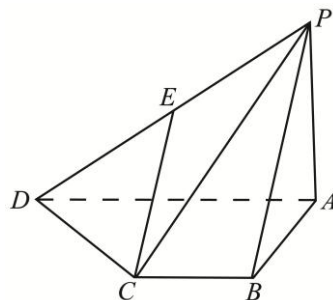
14. 已知数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  的通项公式分别为  $a_n = 2n - 1, b_n = 2^{n-1}$ , 数列  $\{c_n\}$  满足  $c_{2k-1} = a_k, c_{2k} = b_k, (k \in \mathbf{N}^*)$ , 记  $S_n$  为数列  $\{c_n\}$  前  $n$  项和, 则使得  $\frac{S_n}{S_{n+1}} > \frac{100}{101}$  成立的最小正整数  $n$  为     ▲    .

**四、解答题：**本题共 5 小题，共 77 分.解答题应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. (13 分) 如图所示，在四棱锥  $P-ABCD$  中， $PA \perp$  平面  $ABCD$ ， $BC \parallel AD$ ， $AB \perp AD$ ， $AD = 2BC = 2AB = 2$ ， $E$  是  $PD$  的中点.

(1) 证明： $CE \parallel$  平面  $PAB$ ；

(2) 若直线  $CE$  与平面  $PAD$  所成的角为  $45^\circ$ ，求四棱锥  $P-ABCD$  的体积.



第 15 题图

16. (15 分) 在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，

已知  $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = 1 - 2\sin A \sin B$ .

(1) 求  $C$ ；

(2) 若  $\frac{a+b}{\sin A + \sin B} = 4$ ，求  $\triangle ABC$  周长的最大值.

17. (15 分) 已知甲盒中有 3 个红球，1 个黑球，乙盒中有 2 个红球，2 个白球（各球除颜色外完全相同）. 现进行如下操作：先从甲盒中取出两个球放入乙盒中，再从乙盒中取出两个球放入甲盒中.

(1) 求甲盒中红球个数不变的概率；

(2) 在“甲盒中红球个数不少于乙盒中红球个数”的条件下，求“黑球仍在甲盒中”的概率；

(3) 记  $X$  为操作后甲盒中红球的个数，求  $X$  的分布列及数学期望.

18. (17 分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右顶点分别为  $A, B$ , 且  $|AB| = 4$ , 离心率为  $\frac{1}{2}$ .

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 设直线  $l$  与椭圆  $C$  交于  $M, N$  两点.

①若  $l$  过点  $P(4, 1)$ , 求  $|PM| \cdot |PN|$  的最大值;

②设直线  $AM, BN$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ , 且  $k_1 = 2k_2$ . 问直线  $l$  是否过定点? 若是, 求出该定点的坐标; 若不是, 请说明理由.

19. (17 分) 已知函数  $f(x) = \log_a x (a > 1)$  与  $g(x) = tx^{-2} (t > 0)$  的图象相交于点  $P$ ,  $O$  为坐标原点.

(1) 求函数  $y = f(x)$  图象在  $M(a, 1)$  处的切线方程;

(2) 若直线  $OP$  与  $y = f(x)$  图象相切于点  $P$ , 求  $a'$  的值;

(3) 若直线  $OP$  与  $y = f(x)$  图象交于另一点  $Q$ , 且  $|OQ| \geq 2|OP|$ , 求  $a'$  的取值范围.