

数学参考答案

一、单项选择题

1	2	3	4	5	6	7	8
C	A	B	B	C	C	C	D

二、多项选择题

9	10	11
ABD	BC	BCD

三、填空题

12. $\sqrt{6}$

13. $\frac{\pi}{3}$

14. 24

四、解答题

15. (1) 如图所示, 取 PA 中点 F , 连结 EF, BF . 由题意可知, $EF \parallel AD$, $EF = \frac{1}{2}AD$,

且 $BC \parallel AD$, $BC = \frac{1}{2}AD$. 故 $BC \parallel EF$ 且 $BC = EF$, 故四边形 $BCEF$ 为平行四边形.

$\therefore CE \parallel BF$ 3 分

$CE \not\subset$ 平面 PAB , $BF \subset$ 平面 PAB , $\therefore CE \parallel$ 平面 PAB 6 分

- (2) (法一) 取 AD 中点 O , 连结 EO, CO , $AD = 2, BC = 1$, $AD \parallel BC$

$\therefore CO \parallel AB$ 由题意可知, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 因此 $PA \perp AB$,

而 $AD \perp AB$, $PA \cap AB = A$, $\therefore AB \perp$ 平面 PAD .

故 $CO \perp$ 平面 PAD , 则 $\angle CEO$ 为直线 CE 与平面 PAD 所成角 8 分

即 $\angle CEO = 45^\circ$, 故 $CO = EO = 1$, 而 $EO = \frac{1}{2}PA$,

故 $PA = 2$ 11 分

四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $V_{P-ABCD} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times \frac{1+2}{2} \times 1 \times 2 = 1$ 13 分

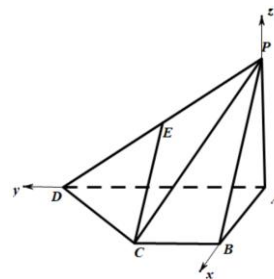
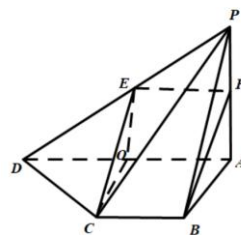
(法二) 由题意可知, $PA \perp$ 平面 $ABCD$ 且 $AD \perp AB$, 以点 A 为坐标原点, AB, AD, AP 为 x, y, z 轴正方向建立空间直角坐标系. 则各点坐标 $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,2,0)$,

$P(0,0,t)(t > 0)$, $E\left(0,1,\frac{t}{2}\right)$, ...9 分

平面 PAD 法向量为 $\vec{n} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{CE} = \left(-1,0,\frac{t}{2}\right)$, 设直线 CE

与平面 PAD 所成角为 θ ,

则 $\sin \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{CE}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{CE}|} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^2}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 解得 $t = 2$,



.....11 分

$$\text{同理 } V_{P-ABCD} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times \frac{1+2}{2} \times 1 \times 2 = 1. \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

16. (1) $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = 1 - 2\sin^2 A - 2\sin^2 B + 2\sin^2 C = 1 - 2\sin A \sin B \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$
 由正弦定理得: $a^2 + b^2 - c^2 = ab$, $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

由余弦定理得: $a^2 + b^2 - c^2 = ab = 2ab \cos C$, 即 $\cos C = \frac{1}{2}$, $C = \frac{\pi}{3}$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 由正弦定理得, $\frac{a+b}{\sin A + \sin B} = 2R$, 其中 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径. $\therefore R = 2$.

由正弦定理得, $c = 2R \sin C = 2\sqrt{3}$. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

由余弦定理得: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, $\therefore (a+b)^2 - 12 = 3ab$, $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

由基本不等式可知: $(a+b)^2 - 12 = 3ab \leq \frac{3}{4}(a+b)^2$ $\dots\dots\dots 13 \text{ 分}$

$a+b \leq 4\sqrt{3}$, 当且仅当 $a=b$ 时取等号. 此时 $\triangle ABC$ 的周长为 $6\sqrt{3}$. $\dots\dots\dots 15 \text{ 分}$

17. (1) 记事件 $A =$ “甲盒中红球个数不变”, 其情况有: 甲盒中取出 2 个红球, 乙盒中取出 2 个红球或者甲盒中取出 1 红 1 黑, 乙盒中取出 1 红 1 黑/1 红 1 白.

则 $P(A) = \frac{C_3^2}{C_4^2} \times \frac{C_4^2}{C_6^2} + \frac{C_3^1}{C_4^2} \times \frac{C_3^1 \cdot C_3^1}{C_6^2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$ $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

(2) 记事件 $B =$ “甲盒中红球个数不少于乙盒中红球个数”, 记事件 $C =$ “黑球仍在甲盒中”.

则 $P(C|B) = \frac{P(BC)}{P(B)}$, 事件 B 情况有: 甲盒中取出 2 个红球, 乙盒中取出 2 个红球或者甲

盒中取出 1 红 1 黑, 乙盒中至少取出一个红球; 事件 BC 情况有: 甲盒中取出 2 个红球, 乙盒中取出 2 个红球或者甲盒中取出 1 红 1 黑, 乙盒中取出 1 红 1 黑.

因此 $P(B) = \frac{C_3^2}{C_4^2} \times \frac{C_4^2}{C_6^2} + \frac{C_3^1}{C_4^2} \times \left(\frac{C_3^1 \cdot C_3^1}{C_6^2} + \frac{C_3^2}{C_6^2} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{5}$ $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

$P(BC) = \frac{C_3^2}{C_4^2} \times \frac{C_4^2}{C_6^2} + \frac{C_3^1}{C_4^2} \times \frac{C_3^1}{C_6^2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$ $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

故 $P(C|B) = \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{1}{2}$ $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

(3) 由题意可知 X 可取 1, 2, 3, 4 $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

当 $X=1$ 时, 其事件情况有: 甲盒中取出 2 个红球, 乙盒中取出的 2 个都不是红球.

故 $P(X=1) = \frac{C_3^2}{C_4^2} \times \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{15} = \frac{1}{30}$; $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

当 $X=2$ 时, 其事件情况有: 甲盒中取出 2 个红球, 乙盒中取出 1 红 1 白或者甲盒中取出 1 红 1 黑, 乙盒中取出的两个都不是红球.

故 $P(X=2) = \frac{C_3^2}{C_4^2} \times \frac{C_4^1 \cdot C_2^1}{C_6^2} + \frac{C_3^1}{C_4^2} \times \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{2} \times \frac{8}{15} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{11}{30}$; $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

当 $X=3$ 时, 即为第 (1) 问, 故 $P(X=3) = \frac{1}{2}$; $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

当 $X=4$ 时, 其事件情况有: 甲盒中取出 1 红 1 黑, 乙盒中取出 2 个红球.

故 $P(X=4) = \frac{C_3^1}{C_4^2} \times \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$. $\dots\dots\dots 13 \text{ 分}$

因此 X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$

.....14 分

$$\text{数学期望 } E(X) = 1 \times \frac{1}{30} + 2 \times \frac{11}{30} + 3 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{10} = \frac{8}{3} \quad \text{.....15 分}$$

18. (1) 由题意可得 $2a=4$, $2c=a$, 故 $b=\sqrt{3}$, 因此椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$; 4 分

(2) (i) 若直线 l 斜率为 0, 此时 $l: y=1$, 解得 M, N 两点坐标为 $\left(\pm \frac{2}{3}\sqrt{6}, 0\right)$, 此时

$$|PM| \cdot |PN| = 4^2 - \frac{8}{3} = \frac{40}{3} \quad \text{.....5 分}$$

若直线斜率不为 0, 不妨设直线 $l: x=my+t$, $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 与椭圆方程联立可得:

$$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12 \\ x = my + t \end{cases}, \quad (3m^2 + 4)y^2 + 6mty + 3t^2 - 12 = 0 \quad (*) \quad (\text{其中 } \Delta > 0)$$

$$y_1 + y_2 = \frac{-6mt}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{3t^2 - 12}{3m^2 + 4}, \quad l \text{ 过点 } P(4, 1), \text{ 故 } 4 = m + t \quad (*) \quad \text{.....7 分}$$

此时 $|PM| \cdot |PN| = \sqrt{1+m^2} |y_1 - 1| \cdot \sqrt{1+m^2} |y_2 - 1|$, 其中 $y_1 - 1, y_2 - 1$ 正负号一致,

$$\therefore |PM| \cdot |PN| = (1+m^2)(y_1 y_2 - (y_1 + y_2) + 1) = \frac{40(1+m^2)}{3m^2 + 4} = \frac{40}{3 + \frac{1}{m^2 + 1}} < \frac{40}{3}$$

综上所述, $|PM| \cdot |PN|$ 的最大值为 $\frac{40}{3}$ 10 分

(ii) (法一) 利用椭圆的第三定义可知, $k_{AM} k_{BM} = -\frac{3}{4}$, 得 $k_{BM} k_{BN} = -\frac{3}{8}$ 12 分

$$\text{此时 } k_{BM} k_{BN} = \frac{y_1}{x_1 - 2} \cdot \frac{y_2}{x_2 - 2} = \frac{y_1 y_2}{(my_1 + t - 2)(my_2 + t - 2)} = -\frac{3}{8}$$

$$\frac{y_1 y_2}{my_1 y_2 + m(t-2)(y_1 + y_2) + (t-2)^2} = -\frac{3}{8}, \quad \text{代入整理, 化简可得:}$$

$$3t^2 - 4t - 4 = 0, \quad \text{解得 } t = 2 \text{ 或 } -\frac{2}{3}. \quad \text{.....16 分}$$

当 $t=2$ 时, 直线 l 经过点 B , 不符合要求, 舍去; 此时 $t=-\frac{2}{3}$, 即直线 l 恒过定点 $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$.

且定点 $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ 在椭圆内部, 直线 l 与椭圆恒有两个交点, 经检验成立. 17 分

(法二) $k_1 = 2k_2$, 由斜率的坐标公式可得: $\frac{y_1}{x_1 + 2} = 2 \frac{y_2}{x_2 - 2}$,

即 $\frac{y_1}{my_1+t+2} = 2\frac{y_2}{my_2+t-2}$, 整理可得: $(t-2)y_1 = my_1y_2 + 2(t+2)y_2$ ①, ...12 分

由韦达定理可知: $\frac{y_1y_2}{y_1+y_2} = \frac{3t^2-12}{-6mt}$, 即 $my_1y_2 = \left(\frac{2}{t} - \frac{t}{2}\right)(y_1+y_2)$, ...14 分

代入①中, 化简可得: $\left(\frac{3}{2}t - \frac{2}{t} - 2\right)y_1 = \left(\frac{3}{2}t + \frac{2}{t} + 4\right)y_2$ ②,

由于动直线与椭圆的交点会变化, 若②式恒成立, 则 $\begin{cases} \frac{3}{2}t - \frac{2}{t} - 2 = 0 \\ \frac{3}{2}t + \frac{2}{t} + 4 = 0 \end{cases}$,

解得 $t = -\frac{2}{3}$, 即直线 l 恒过定点 $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ 17 分

19. (1) $f'(x) = \frac{1}{x \ln a} \therefore f'(a) = \frac{1}{a \cdot \ln a}$ 2 分

所以切线方程为 $y-1 = \frac{1}{a \cdot \ln a}(x-a)$ 即 $y = \frac{1}{a \cdot \ln a}x - \frac{1}{\ln a} + 1$ 4 分

(2) 设 $P(x_1, y_1)$, 则 $\frac{1}{x_1 \ln a} = \frac{\log_a x_1}{x_1} = \frac{\ln x_1}{x_1 \cdot \ln a}$ 6 分

$\therefore \ln x_1 = 1, x_1 = e$ 8 分

又 $y_1 = tx_1^{-2} = \log_a x_1 \therefore t = x_1^2 y_1, x_1 = a^{y_1} \therefore a' = (a^{y_1})^{x_1^2} = (x_1)^{y_1^2} = e^{e^2}$ 10 分

(3) 设 $Q(x_2, y_2)$ 由 $|OQ| \geq 2|OP|$ 得 $x_2 \geq 2x_1$, ...12 分

令 $m = \frac{x_2}{x_1} (m \geq 2)$ 由 $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ 得 $\frac{\ln x_1}{x_1} = \frac{\ln x_2}{x_2}$

$\therefore \frac{\ln x_1}{x_1} = \frac{\ln m + \ln x_1}{mx_1}$, 即 $\ln x_1 = \frac{\ln m}{m-1} (m \geq 2)$ 14 分

令 $h(m) = \frac{\ln m}{m-1}$, $h'(m) = \frac{1 - \frac{1}{m} - \ln m}{(m-1)^2} < 0 (m \geq 2)$

所以 $h(m)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递减, $\therefore \ln x_1 \in (0, \ln 2]$ 16 分

由 (2) 知 $a' = (x_1)^{x_1^2} = e^{x_1^2 \cdot \ln x_1}$

令 $\varphi(x) = x^2 \cdot \ln x, \varphi'(x) = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1) > 0$

所以 $\varphi(x) = x^2 \cdot \ln x$ 在 $x \in (1, 2]$ 上单调递增 $\therefore a' \in (1, 16]$ 17 分