

浙江省 A9 协作体暑假返校学情诊断

高三数学试题卷

命题：桐乡凤鸣高级中学 沈金兴

审题：马寅初级中学 陈志远

定海一中 张翰琼

校稿：童金菊

考生须知：

1. 本卷满分 150 分，考试时间 120 分钟；
2. 答题前务必将自己的姓名，准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题纸规定的地方。
3. 答题时，请按照答题纸上“注意事项”的要求，在答题纸相应的位置上规范答题，在本试卷纸上答题一律无效。
4. 考试结束后，只需上交答题卷。

第 I 卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{3\}$ B. $\{3, 4\}$ C. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ D. $\emptyset$

2. 已知 i 为虚数单位，则复数 $\frac{1}{i} =$

- A. 1 B. -1 C. i D. $-i$

3. 向量 $\vec{a} = (-1, 2)$, $\vec{b} = (\lambda, 4)$, 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $\lambda =$

- A. 2 B. -2 C. 8 D. -8

4. 在 160 和 -5 之间插入 4 个数，使这 6 个数成等比数列，则公比 q 的值为

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -2 D. 2

5. 设 $x, y \in \mathbb{R}^+$, 若 $\lg x$ 与 $\lg y$ 互为相反数，则

- A. $xy=1$ B. $\frac{x}{y}=1$ C. $x+y=0$ D. $x-y=0$

6. 唐代诗人李颀的诗《古从军行》开头两句说：“白日登山望烽火，黄昏饮马傍交河。”诗中隐含着—一个有趣的数学问题——“将军饮马”问题，即将军在观望烽火之后从山脚下某处出发，先到河边饮马后再回到军营，怎样走才能使总路程最短？在平面直角坐标系中，设军营所在位置为 $B(-1, -4)$ ，若将军从点 $A(1, -1)$ 处出发，河岸线所在直线方程为 $x - y = 0$ 。则“将军饮马”的最短总路程为

- A. $\sqrt{17}$ B. $\sqrt{13}$ C. 5 D. 4

7. $\sin 40^\circ (\tan 10^\circ - \sqrt{3})$ 的值是

- A. 1 B. -1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

8. 已知三个数 a, b, c , $a = \ln 10$, $b = \sqrt{10}$, $c = \log_2 10$, 则

- A. $a < c < b$ B. $b < a < c$ C. $a < b < c$ D. $c < a < b$

二、**选择题**：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分，在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 7 个样本数据：5, 6, 3, 1, 9, 6, 12, 则下列说法正确的是

- A. 极差是 10
B. 平均数是 6
C. 众数是 6
D. 中位数是 6

10. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$, 其焦点 F 到准线的距离为 2, 且 B 为 C 上的动点, 则

- A. C 的方程为: $y = 4x^2$
B. 已知点 $A(2,3)$, 则 $|BA| + |BF|$ 的最小值为 4
C. 直线 $y = kx + 1$ 被抛物线截得的弦长最小值为 4
D. 若抛物线准线与 y 轴交于点 N , 设 BN 斜率为 k , 则 $|k|$ 的最小值是 1

11. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 1, E 、 F 分别为 AB 、 BD_1 中点, 点 M 在正方体的表面上运动, 且满足 $FM \perp DE$. 记点 M 的轨迹为 Γ , 则下列命题正确的是

- A. Γ 是矩形
B. Γ 所围图形的面积为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$
C. 点 B 与 Γ 所围成的空间几何的体积是 $\frac{3}{4}$
D. 点 $H \in$ 线段 BB_1 , Γ 所在平面与 ACH 平面的夹角余弦值范围为 $[0, \frac{\sqrt{15}}{5}]$

第 II 卷

三、**填空题**：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 二项式 $(x+1)^6$ 展开式中第 4 项系数是 ▲ . (用数字作答)

13. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_3 = -12$, $S_9 = 45$, 则 $S_6 =$ ▲ .

14. 过椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上一点 P 作椭圆的切线分别交 x 、 y 轴于点 A 、 B , $|PA| = 2$, 则 $|PB| =$ ▲ .

四、**解答题**：本题共 5 小题，共 77 分，解答应该写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上, 且满足 $BD=2$, $DC=1$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle ADC = 150^\circ$.

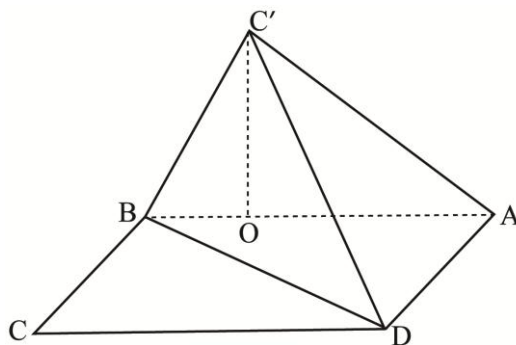
- (1) 求边 AC 的长;
(2) 若点 P 是 BC 中点, 求 $\cos \angle APC$.

16. (15 分) 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2 (a \in \mathbb{R})$.

- (1) 若曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线与 x 轴平行, 求 a 的值和切线方程;
- (2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有 2 个零点, 求 a 的范围.

17. (15 分) 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3\sqrt{3}, AD = 3$. 将 $\triangle BCD$ 沿对角线 BD 折起, 得到三棱锥 $C'-ABD$, C' 在底面上的投影 O 在 AB 上.

- (1) 证明: $AD \perp BC'$;
- (2) 证明: 平面 $DBC' \perp$ 平面 ADC' ;
- (3) 求 AB 与平面 $BC'D$ 所成角的正弦值.



18. (17 分) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 3, 且左右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 F_2 到渐近线的距离为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求双曲线 C 的标准方程;

(2) 过点 F_2 的直线 l 与 C 的左右两支交于 A, B 两点.

(i) 若直线 l 的斜率为 -1, 求 $|AB|$ 的长;

(ii) 若 $|AF_1| = |BF_1|$, 证明: $|AF_2|, |AB|, |BF_2|$ 成等比数列.

19. (17 分) 甲、乙两人比赛, 每局甲胜概率为 $p (0 < p < 1)$, 乙胜概率为 q , 且 $p + q = 1$. 比赛进行到有 1 人连胜两局时结束. 记 X 为比赛的局数, $P(X = k) (k \in N^*)$ 表示比赛进行 k 局结束的概率.

(1) 若 $p = \frac{2}{3}$, 求 $p(X = 2)$, $p(X = 3)$;

(2) 求 $p(X = 2k)$, $p(X = 2k + 1)$ (结果用 p, q 表示);

(3) $E(X)$ 表示 X 的期望.

(i) 求 $E(X)$ (结果用 p, q 表示);

(ii) 证明: $E(X) \leq 3$.

(参考公式: 无穷等比数列 $\{a_n\}$, 公比为 q , 若 $0 < q < 1$, 则: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}, \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$)