

# 2026-2027 学年上学期高三年级 10 月适应性训练

## 数学

### 一、选择题：DBCADBBC

【分析】记  $1, 2, 3, \dots, n$  的有效新排列的个数为  $f_n$ ，考虑数字  $n$  在排列中的位置，根据递推法确定

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ，进而可得新排列的个数.

【详解】由于对于  $\forall k \in \{1, 2, \dots, 10\}$ ， $|a_k - k| \leq 1$ ，则每个数字  $a_k$  可以是  $k-1, k, k+1$ ，

记  $1, 2, 3, \dots, n$  的排列的个数为  $f_n$ ，考虑数字  $n$  在排列中的位置：

(1) 如果  $a_n = n$ ，则剩下的排列个数为  $f_{n-1}$ ；

(2) 如果  $a_{n-1} = n$ ，则  $a_n = n-1$ ；因此剩下的排列个数为  $f_{n-2}$ ，

故  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ，

由于  $f_1 = 1, f_2 = 2$ ，故  $f_3 = 3, f_4 = 5, f_5 = 8, f_6 = 13, f_7 = 21, f_8 = 34, f_9 = 55, f_{10} = 89$ 。

故这 10 个数的排列的个数为 89。

### 二、选择题：

9, ACD

10, ABD

11. AC

### 三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. -5    13.  $\frac{19}{9}$     14.  $\left(\frac{4}{5}, +\infty\right)$

### 四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 【小问 1 详解】由题可得  $b = \frac{a}{2} + c \cos A$ ，即  $\sin B = \frac{\sin A}{2} + \sin C \cos A$ ，

$\sin B = \sin(\pi - (A + C)) = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \sin C \cos A$ ，

则  $\sin A \cos C + \sin C \cos A = \frac{\sin A}{2} + \sin C \cos A$ ，因为角  $A, B, C \in (0, \pi)$ ，

故  $\sin A \neq 0$ ，则  $\cos C = \frac{1}{2}$ ，故角  $C$  为  $\frac{\pi}{3}$ ；

【小问 2 详解】

由题可得角  $C$  为  $\frac{\pi}{3}$ ， $\triangle ABC$  的外接圆半径是 2，故  $c = 2\sqrt{3}$ ，

由余弦定理可得  $a^2 + b^2 - 2ab \cos C = c^2$ , 即  $a^2 + b^2 = c^2 + ab = 12 + ab \leq 12 + \frac{a^2 + b^2}{2}$ ,

当且仅当  $a = b$  时等号成立, 故当  $a = b$  时,  $a^2 + b^2$  有最大值,  $a = b$  且角  $C$  为  $\frac{\pi}{3}$ ,

故  $\triangle ABC$  为等边三角形, 所以  $a = b = c = 2\sqrt{3}$ ,  $a^2 + b^2 = 12 + 12 = 24$ ,

所以  $a^2 + b^2$  的最大值为 24.

16. 【答案】(1) 证明: 当  $n=1$  时,  $2S_1 + a_1 = 2 \times 1 + 2$ , 即  $3a_1 = 4$ , 所以  $a_1 = \frac{4}{3}$ .

当  $n \geq 2$  时,  $2S_{n-1} + a_{n-1} = 2(n-1) + 2 = 2n$ .

作差得  $2S_n + a_n - (2S_{n-1} + a_{n-1}) = 2n + 2 - 2n$ , 即  $3a_n - a_{n-1} = 2$ ,

整理得  $3(a_n - 1) = a_{n-1} - 1$ , 即  $a_n - 1 = \frac{1}{3}(a_{n-1} - 1)$ .

所以  $\{a_n - 1\}$  是以  $a_1 - 1 = \frac{1}{3}$  为首项,  $\frac{1}{3}$  为公比的等比数列.

(2) 证明: 由 (1) 得,  $a_n - 1 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ , 则  $a_n = \frac{1}{3^n} + 1$ .

$a_1 = \frac{4}{3}$  满足上式, 故  $a_n = \frac{1}{3^n} + 1$ .

所以  $b_n = n(a_n - 1) = n \left[ \frac{1}{3^n} + 1 - 1 \right] = \frac{n}{3^n}$ .

$T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^n}$ ,  $\frac{1}{3}T_n = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{n}{3^{n+1}}$ ,

所以  $\frac{2}{3}T_n = \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{\frac{1}{3} \left[ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right]}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{3+2n}{6 \times 3^n}$ .

所以  $T_n = \left( \frac{1}{2} - \frac{3+2n}{6 \times 3^n} \right) \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \times 3^n}$ .

因为  $n \in \mathbf{N}^*$ , 所以  $\frac{2n+3}{4 \times 3^n} > 0$ , 故  $T_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \times 3^n} < \frac{3}{4}$ .

17. 【小问 1 详解】

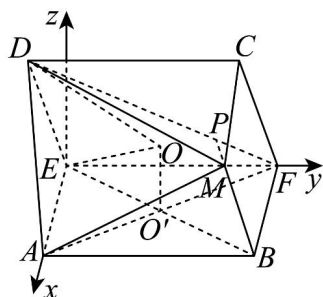
过点  $M$  在平面  $CDEF$  中作  $MP \parallel ED$ , 交  $DF$  于点  $P$ .

因为  $DE \subset$  平面  $ADE$ ,  $MP \not\subset$  平面  $ADE$ , 所以  $MP \parallel$  平面  $ADE$ .

又  $EM = 3MF$ , 所以  $\frac{DP}{PF} = \frac{EM}{MF} = 3$ .

【小问 2 详解】

以点  $E$  为原点，以  $EA, EF$  为  $x, y$  轴，以过点  $E$  且垂直于平面  $ABFE$  的直线为  $z$  轴，建立空间直角坐标系，



则  $E(0,0,0)$ ,  $B(4,8,0)$ ,  $M(0,6,0)$ ,  $D(4\cos\theta,0,4\sin\theta)$ ,  $C(4\cos\theta,8,4\sin\theta)$ ,

所以  $\overrightarrow{BD} = (4\cos\theta - 4, -8, 4\sin\theta)$ ,  $\overrightarrow{MC} = (4\cos\theta, 2, 4\sin\theta)$ .

因为  $BD \perp MC$ , 所以  $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ , 即  $(4\cos\theta - 4) \cdot 4\cos\theta + (-8) \times 2 + (4\sin\theta)^2 = 0$ ,

整理得  $16\cos\theta = 0$ , 即  $\cos\theta = 0$ .

【小问 3 详解】

连接  $AF, BE$ , 交于点  $O'$ , 设四棱锥  $D-ABFE$  的外接球球心为  $O$ , 连接  $OO'$ ,

则  $OO' \perp$  平面  $ABFE$ ,

连接  $OE, OD$ , 则  $OE = OD = 5$ .

底面  $ABFE$  的中心  $O'(2,4,0)$ , 可设  $O(2,4,h)$ .

所以  $OE = \sqrt{2^2 + 4^2 + h^2} = \sqrt{20 + h^2} = 5$ , 则  $h^2 = 5$ .

$OD = \sqrt{(4\cos\theta - 2)^2 + (0 - 4)^2 + (4\sin\theta - h)^2} = \sqrt{-16\cos\theta + 41 - 8h\sin\theta} = 5$ ,

即  $-16\cos\theta + 41 - 8h\sin\theta = 25$ , 整理得  $2\cos\theta + h\sin\theta = 2$ , 则  $h\sin\theta = 2(1 - \cos\theta)$ ,

两边平方得  $h^2 \sin^2\theta = 4(1 - \cos\theta)^2$ , 即  $5\sin^2\theta = 4(1 - \cos\theta)^2$ , 也即  $5(1 - \cos^2\theta) = 4(1 - \cos\theta)^2$ .

又  $0 < \theta < \pi$ , 则  $1 - \cos\theta \neq 0$ , 所以  $5(1 + \cos\theta) = 4(1 - \cos\theta)$ , 解得  $\cos\theta = -\frac{1}{9}$ .

则  $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{9}\right)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$ .

18. 【答案】(1) 方法一: 由题可设  $M\left(t, \frac{1}{t}\right), (t > 0)$ ,

$$\text{则 } |MF_1| = \sqrt{\left(t + \sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{t} + \sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2} + 2\sqrt{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) + 4} = \sqrt{\left(t + \frac{1}{t} + \sqrt{2}\right)^2} = t + \frac{1}{t} + \sqrt{2},$$

$$\text{同理可得: } |MF_2| = \sqrt{\left(t - \sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{t} - \sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\left(t + \frac{1}{t} - \sqrt{2}\right)^2},$$

$$\because t > 0, \therefore t + \frac{1}{t} > 2 > \sqrt{2}, \text{ 则 } |MF_2| = \sqrt{\left(t + \frac{1}{t} - \sqrt{2}\right)^2} = t + \frac{1}{t} - \sqrt{2},$$

$$\therefore |MF_1| - |MF_2| = t + \frac{1}{t} + \sqrt{2} - \left(t + \frac{1}{t} - \sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}, \text{ 即 } |MF_1| - |MF_2| \text{ 为定值.}$$

方法二: 设点  $M(x_0, y_0), x_0 y_0 = 1$ ,

$$\begin{aligned} |MF_1| - |MF_2| &= \sqrt{\left(x_0 + \sqrt{2}\right)^2 + \left(y_0 + \sqrt{2}\right)^2} - \sqrt{\left(x_0 - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y_0 - \sqrt{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + 2\sqrt{2}(x_0 + y_0) + 4} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - 2\sqrt{2}(x_0 + y_0) + 4} \\ &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 y_0 + 2\sqrt{2}(x_0 + y_0) + 2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 y_0 - 2\sqrt{2}(x_0 + y_0) + 2} \\ &= \sqrt{(x_0 + y_0)^2 + 2\sqrt{2}(x_0 + y_0) + 2} - \sqrt{(x_0 + y_0)^2 - 2\sqrt{2}(x_0 + y_0) + 2} \\ &= |x_0 + y_0 + \sqrt{2}| - |x_0 + y_0 - \sqrt{2}| \end{aligned}$$

因为  $x_0 > 0, y_0 = \frac{1}{x_0} > 0, x_0 + y_0 = x_0 + \frac{1}{x_0} \geq 2$ , 当且仅当  $x_0 = y_0 = 1$  时等号成立

$$\text{所以 } |MF_1| - |MF_2| = (x_0 + y_0 + \sqrt{2}) - (x_0 + y_0 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

方法三: 设点  $M(x_0, y_0), x_0 y_0 = 1, |MF_1| - |MF_2| = t$ ,

所以  $|MF_1| = |MF_2| + t$ , 即

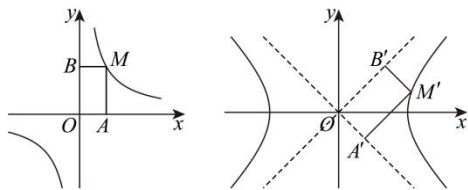
$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\left(x_0 + \sqrt{2}\right)^2 + \left(y_0 + \sqrt{2}\right)^2}\right)^2 &= \left(\sqrt{\left(x_0 - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y_0 - \sqrt{2}\right)^2} + t\right)^2 \\ 2\sqrt{2}(x_0 + y_0) - \frac{t^2}{2} &= t\sqrt{\left(x_0 - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y_0 - \sqrt{2}\right)^2} = t\sqrt{\left(x_0 + y_0 - \sqrt{2}\right)^2} = t(x_0 + y_0 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

因为  $x_0 > 0, y_0 = \frac{1}{x_0} > 0, x_0 + y_0 = x_0 + \frac{1}{x_0} \geq 2$ , 当且仅当  $x_0 = y_0 = 1$  时等号成立.

$$\text{所以 } t^2 + t(2x_0 + 2y_0 - 2\sqrt{2}) - 4\sqrt{2}(x_0 + y_0) = 0,$$

即  $(t+2x_0+2y_0)(t-2\sqrt{2})=0$ ，所以  $|MF_1|-|MF_2|=t=2\sqrt{2}$ 。

方法四：如图，



作  $MA$  垂直  $x$  轴于点  $A$ ， $MB$  垂直  $y$  轴于点  $B$ ，则  $S_{\text{矩形}MAOB}=1$ ，

将  $xy=1$  绕原点顺时针旋转  $45^\circ$  后，点  $M, A, B$  对应点  $M', A', B'$ ，

其中  $A'$  在直线  $y=-x$  上， $B'$  在直线  $y=x$  上，设点  $M'(x_0, y_0)$ ，

$$\text{则 } S_{\text{矩形}M'A'O'B'} = S_{\text{矩形}MAOB} = 1 = \frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|x_0 + y_0|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_0^2 - y_0^2|}{2},$$

所以可得  $M'$  在双曲线  $x_0^2 - y_0^2 = 2$  上，实轴长  $2\sqrt{2}$  为又其左右焦点  $F'_1(-2, 0), F'_2(2, 0)$  分别对应

$$F_1(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), F_2(\sqrt{2}, \sqrt{2}),$$

$$\text{所以 } |MF_1| - |MF_2| = |M'F'_1| - |M'F'_2| = 2\sqrt{2}.$$

方法五：将  $xy=1$  绕原点顺时针旋转  $45^\circ$ ，

$M(|OM|\cos\theta, |OM|\sin\theta)$  对应

$$M'\left(|OM|\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right), |OM|\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right) = (x_0, y_0)$$

$$\text{所以 } x_0^2 - y_0^2 = \frac{|OM|^2}{2} [(\cos\theta + \sin\theta)^2 - (\cos\theta - \sin\theta)^2] = 2|OM|^2 \sin\theta \cos\theta$$

又  $M(|OM|\cos\theta, |OM|\sin\theta)$  在  $xy=1$  上，即  $|OM|^2 \sin\theta \cos\theta = 1$

所以  $x_0^2 - y_0^2 = 2$ ，下同方法四。

$$(2) \frac{1}{4};$$

(3) 将双曲线  $x^2 - y^2 = 2$  绕原点逆时针旋转  $\frac{\pi}{4}$  可得曲线  $xy=1$ ，

$$\text{如下图设 } B\left(x_1, \frac{1}{x_1}\right), C\left(x_2, \frac{1}{x_2}\right), D\left(x_3, \frac{1}{x_3}\right), N\left(x_0, \frac{1}{x_0}\right), N\left(-x_0, -\frac{1}{x_0}\right),$$

$$\text{联立} \begin{cases} xy=1 \\ x^2+y^2+dx+ey+f=0 \end{cases} \text{得 } x^4+dx^3+fx^2+ex+1=0=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x+x_0),$$

对比系数可得  $x_0x_1x_2x_3=-1$

过点  $B$  作  $CD$  的垂线，交  $xy=1$  于点  $H\left(x_4, \frac{1}{x_4}\right)$ ,

$$\text{因为 } k_{CD} = \frac{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3}}{x_2 - x_3} = -\frac{1}{x_2x_3},$$

$$\text{同理可得 } k_{BH} = -\frac{1}{x_1x_4}, k_{CH} = -\frac{1}{x_2x_4}, k_{BD} = -\frac{1}{x_1x_3},$$

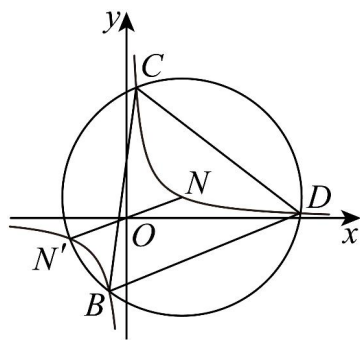
$$\text{因为 } k_{BH} \cdot k_{CD} = \left(-\frac{1}{x_1x_4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x_2x_3}\right) = \frac{1}{x_1x_2x_3x_4} = -1,$$

$$\text{所以 } k_{CH} \cdot k_{BD} = \left(-\frac{1}{x_2x_4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x_1x_3}\right) = \frac{1}{x_1x_2x_3x_4} = -1,$$

所以  $CH \perp BD$ ，即  $H$  为  $\triangle BCD$  的垂心，

根据  $x_0x_1x_2x_3=-1$  和  $\frac{1}{x_1x_2x_3x_4}=-1$  可得  $x_4=x_0$ ，即  $H$  与  $N$  重合，

即  $\triangle BCD$  的垂心与外心重合，所以  $\triangle BCD$  为等边三角形。



19. 【答案】(1)  $f_1(x)$  的单调递减区间为  $(-\infty, -\ln 2)$ , 单调递增区间为  $(-\ln 2, +\infty)$ . 极小值  $-\frac{1}{4}$ , 无极大值.

(2) 由题干和 (1) 猜想推广可得  $f_n(x) = -e^x + e^{2x} - \cdots + e^{2nx}$ ,

$$\text{所以 } f_n(x) = \frac{e^{(2n+1)x} - e^x}{e^x + 1},$$

$$f'_n(x) = \frac{[2ne^{(2n+1)x} + (2n+1)e^{2nx} - 1]e^x}{(e^x + 1)^2},$$

因为  $f_n(x)$  的极值点为  $x_n$ , 所以  $f'_n(x_n) = 0$ ,

即  $g_n(x_n) = 2ne^{(2n+1)x_n} + (2n+1)e^{2nx_n} - 1 = 0$ , 又  $y = g_n(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的增函数,

$$\text{所以 } x_n \leq \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \Leftrightarrow 0 = g_n(x_n) \leq g_n\left(\ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\right) \Leftrightarrow 2n\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n} \geq \frac{1}{2},$$

$$\text{即证 } \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \geq \frac{1}{2n} \ln \frac{1}{2n} - \frac{\ln 2}{2n}.$$

$$\text{令 } t = \frac{1}{2n} \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \text{ 即证 } h(t) = \ln(1-t) + t \ln 2 - t \ln t \geq 0, t \in \left(0, \frac{1}{2}\right],$$

$$h'(t) = \frac{-1}{1-t} + \ln 2 - \ln t - 1, \text{ 令 } \varphi(t) = h'(t) = \frac{-1}{1-t} + \ln 2 - \ln t - 1, t \in \left(0, \frac{1}{2}\right],$$

$$\text{则 } \varphi'(t) = -\frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{t} < 0$$

所以  $h'(t)$  在  $\left(0, \frac{1}{2}\right]$  上单调递减,

$$\text{且 } h'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \ln 2 - 3 < 0, t \rightarrow 0 \text{ 时, } h'(t) \rightarrow +\infty, \text{ 所以存在唯一 } t_0 \text{ 使得 } h'(t_0) = 0,$$

从而  $t \in (0, t_0), h'(t) > 0$ , 函数  $h(t)$  单调递增;  $t \in \left(t_0, \frac{1}{2}\right], h'(t) < 0$ , 函数  $h(t)$  单调递减;

又  $t \rightarrow 0$  时,  $h(t) \rightarrow 0, h\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ , 所以  $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$  时, 有  $h(t) \geq 0$  成立.

(3) 由 (2) 知  $g_n(x_n) = 2ne^{(2n+1)x_n} + (2n+1)e^{2nx_n} - 1 = 0$ ,

$$g_{n+1}(x_n) - g_n(x_n) = e^{2nx_n} (e^{x_n} + 1)^2 [(2n+2)e^{x_n} - (2n+1)]$$

因为  $x_n \leq \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$ , 所以

$$(2n+2)e^{x_n} - (2n+1) \leq (2n+2)\left(1 - \frac{1}{2n}\right) - (2n+1) = -\frac{1}{n} < 0,$$

所以  $g_{n+1}(x_n) - g_n(x_n) < 0 \Leftrightarrow g_{n+1}(x_n) < g_n(x_n) = 0 = g_{n+1}(x_{n+1})$ ,

根据  $y = g_{n+1}(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的增函数可得  $x_{n+1} > x_n$ .