

高三数学学科练习

选择题部分

一、单项选择题：

DACBDBC

8. 设 $P(x_0, y_0)$, 由 $|OP| = 2a$ 得 $x_0^2 + y_0^2 = 4a^2$ (1)

又 P 在双曲线上: $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ (2)

由 OP 平分 $\angle F_1PA_2$, 由角平分线定理得 $\frac{|PF_1|}{|PA_2|} = \frac{|OF_1|}{|OA_2|} = \frac{c}{a}$ (3),

由 (1) (2) 消去 y_0^2 得 $x_0^2 = \frac{a^2(3a^2 + c^2)}{c^2}$ (4),

又 $|PF_1|^2 = (x_0 + c)^2 + y_0^2, |PA_2|^2 = (x_0 - a)^2 + y_0^2$.

将 $y_0^2 = 4a^2 - x_0^2$ 代入 (3) 的平方: $\frac{x_0^2 + 2cx_0 + c^2 + 4a^2 - x_0^2}{x_0^2 - 2ax_0 + a^2 + 4a^2 - x_0^2} = \frac{c^2}{a^2}$,

即 $\frac{2cx_0 + c^2 + 4a^2}{-2ax_0 + 5a^2} = \frac{c^2}{a^2}$, 整理得 $x_0 = \frac{2ab^2}{c(a+c)}$ (5),

由 (4) (5) 得 $\frac{4a^2b^4}{c^2(a+c)^2} = \frac{a^2(3a^2 + c^2)}{c^2}$, 即 $4b^4 = (3a^2 + c^2)(a+c)^2$.

因为 $e = \frac{c}{a}$, 所以 $b^2 = a^2(e^2 - 1)$, 代入得 $4a^4(e^2 - 1)^2 = a^2(e^2 + 3) \cdot a^2(e+1)^2$,

化简得 $4(e^2 - 1)^2 = (e^2 + 3)(e+1)^2$, 即 $3e^2 - 8e + 1 = 0$,

解得 $e = \frac{4 \pm \sqrt{13}}{3}$, 因为 $e > 1$, 所以 $e = \frac{4 + \sqrt{13}}{3}$.

9. AC

10. ACD

11. ABD

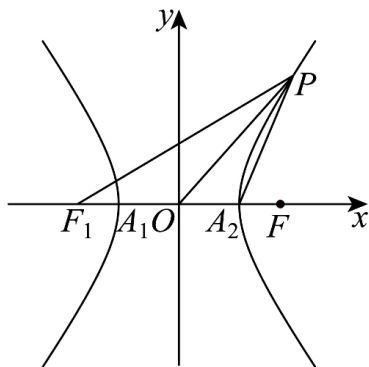
12. $\frac{2\pi}{3}$

13. $2\sqrt{10}$

14. 1023

【详解】因为 $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$, 所以 $a_{n+1} - 1 = a_n^2 - a_n = a_n(a_n - 1)$,

可得 $\frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{1}{a_n(a_n - 1)} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_n}$,



$$\text{化简得 } \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}, \text{ 而 } \frac{a_k - 1}{a_k} = 1 - \frac{1}{a_k},$$

$$\text{由题意得 } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k - 1}{a_k} = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{a_k}\right) = n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k},$$

$$\text{而 } \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \frac{1}{2-1} - \frac{1}{a_2-1} + \dots + \frac{1}{a_n-1} - \frac{1}{a_{n+1}-1} = 1 - \frac{1}{a_{n+1}-1},$$

$$\text{可得 } S_n = n - \left(1 - \frac{1}{a_{n+1}-1}\right) = n - 1 + \frac{1}{a_{n+1}-1},$$

$$\text{而 } a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1, \text{ 则 } a_{n+1} - a_n = a_n^2 - 2a_n + 1 = (a_n - 1)^2 > 0,$$

$$\text{得到数列 } \{a_n\} \text{ 是单调递增数列, 且 } S_{1024} = 1023 + \frac{1}{a_{1025}-1},$$

$$\text{因为 } a_1 = 2, \text{ 所以 } a_{1025} \in (2, +\infty), \text{ 得到 } \frac{1}{a_{1025}-1} \in (0, 1), \text{ 可得 } S_{1024} \in (1023, 1024),$$

$$\text{而记 } [x] \text{ 为不超过实数 } x \text{ 的最大整数, 故 } [S_{1024}] = 1023.$$

16. $\because$ 在三棱柱中, O 为 A_1 在底面 ABC 上的投影,

$$\therefore A_1O \perp \text{面 } ABC,$$

$$\because A_1C_1 // \text{面 } ABC,$$

$$\therefore \text{点 } M \text{ 到平面 } ABC \text{ 的距离等于点 } A_1 \text{ 到平面 } ABC \text{ 的距离}$$

$$\text{因为 } AA_1 \text{ 与平面 } ABC \text{ 所成的角为 } \frac{\pi}{4}, \text{ 且 } A_1O \perp \text{面 } ABC,$$

$$\therefore \angle A_1AO = \frac{\pi}{4}, \quad OA_1 = OA = 1$$

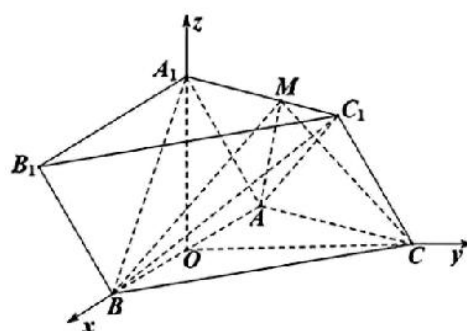
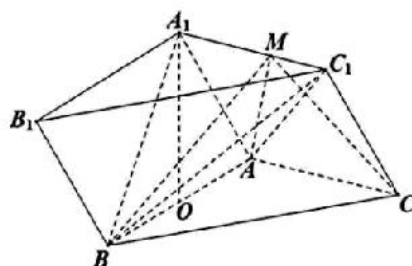
$$\therefore V_{M-ABC} = V_{A_1-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot A_1O = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

【小问 2 详解】

以 O 为原点, OB , OC , OA_1 为 x , y , z 轴, 如图,

$$\text{可得: } O(0,0,0), \quad B(1,0,0), \quad C(0,\sqrt{3},0), \quad A(-1,0,0),$$

$$A_1(0,0,1),$$



$$\text{又} \because 3A_1M = A_1C_1, \therefore \overrightarrow{A_1M} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A_1C_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right), \therefore M\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{BM} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right), \overrightarrow{BA} = (-2, 0, 0), \overrightarrow{BC} = (-1, \sqrt{3}, 0),$$

设 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$ 为平面 ABM 的一个法向量,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} -\frac{2}{3}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}y_1 + z_1 = 0 \\ -2x_1 = 0 \end{cases}, \text{令 } z_1 = 1, \text{ 则 } \vec{m} = (0, -\sqrt{3}, 1),$$

设 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$ 为平面 CBM 的一个法向量,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} -\frac{2}{3}x_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}y_2 + z_2 = 0 \\ -x_2 + \sqrt{3}y_2 = 0 \end{cases}, \text{令 } x_2 = 3, \text{ 则 } \vec{n} = \left(\sqrt{3}, 1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$\therefore |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2 \times \frac{\sqrt{39}}{3}} = \frac{\sqrt{13}}{13}, \sin \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{13}}{13}\right)^2} = \frac{2\sqrt{39}}{13}, \text{ 所以平面 } ABM \text{ 与平面}$$

$$CBM \text{ 所成角的正弦值为 } \frac{2\sqrt{39}}{13}.$$

$$17. \text{ 已知函数 } f(x) = \frac{\ln(ax)}{x} - \ln x - \frac{a}{x} (a > e).$$

(1) 求证: 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一极值点 x_0 ;

(2) 设 x_0 为 (1) 中的极值点, 求证: 对任意 $x > 0$, 都有 $f(x) < \frac{2}{x_0} - 2$.

$$\text{【答案】(1) 由 } f(x) = \frac{\ln a - a}{x} + \frac{\ln x}{x} - \ln x, \text{ 则 } f'(x) = \frac{a - \ln a + 1 - \ln x - x}{x^2},$$

令 $g(x) = a - \ln a + 1 - \ln x - x, x > 0$, 则 $g'(x) = -\frac{1}{x} - 1 < 0$, 则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{令 } h(x) = x - \ln x, x > 0, \text{ 则 } h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x},$$

当 $x \in (0, 1)$, $h'(x) < 0$, 则 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减; 当 $x \in (1, +\infty)$, $h'(x) > 0$, 则 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$

上单调递增,

所以 $h(x)_{\min} = h(1) = 1 - \ln 1 = 1 > 0$, 所以 $h(x) = x - \ln x > 0$, 即 $x > \ln x$, 所以 $g(1) = a - \ln a > 0$,

由 $a > e$, 则 $\ln a > 1$, 所以 $g(a) = 1 - 2\ln a < 1 - 2 = -1 < 0$,

所以存在唯一零点 $x_0 \in (1, a)$, 使得 $g(x_0) = 0$,

当 $x \in (0, x_0)$, $g(x) > 0$, 即 $f'(x) > 0$; 当 $x \in (x_0, +\infty)$, $g(x) < 0$, 即 $f'(x) < 0$,

因此 x_0 是 $f(x)$ 的唯一极值点, 证毕.

(2) 由 (1) 可知 x_0 是极大值点, 所以对任意 $x > 0$, 都有 $f(x) \leq f(x_0)$.

因此只需证明不等式: 对任意 $x > 0$, 都有 $f(x_0) < \frac{2}{x_0} - 2$.

由 $f'(x_0) = 0$, 得 $a - \ln a + 1 - \ln x_0 - x_0 = 0$, 得 $\ln a - a = 1 - \ln x_0 - x_0$,

$$\text{则 } f(x_0) = \frac{\ln a - a}{x_0} + \frac{\ln x_0}{x_0} - \ln x_0 = \frac{1 - \ln x_0 - x_0}{x_0} + \frac{\ln x_0}{x_0} - \ln x_0 = \frac{1}{x_0} - 1 - \ln x_0,$$

$$\text{则 } f(x_0) - \frac{2}{x_0} + 2 = -\frac{1}{x_0} - \ln x_0 + 1,$$

$$\text{令 } \varphi(x) = -\frac{1}{x} - \ln x + 1, \text{ 则 } \varphi'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x^2},$$

当 $x \in (1, a)$ 时, $\varphi'(x) < 0$, 则 $\varphi(x)$ 在 $(1, a)$ 上单调递减,

$$\text{故 } \varphi(x_0) < \varphi(1) = -\frac{1}{1} - \ln 1 + 1 = 0, \text{ 即 } f(x_0) - \frac{2}{x_0} + 2 < 0, \text{ 证毕.}$$

18. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$, 点 A 在椭圆 C 上, O 为坐标原点, A, B 关于原点对称, 设直线 AB 斜

率为 k , 过点 A 作斜率为 $\frac{k}{3}$ 的直线交 x 轴于点 D , 直线 BD 与椭圆 C 交于另一点 E .

(1) 证明: 直线 AB 与直线 BD 斜率之和为定值;

(2) 若直线 AE , 直线 AD , 直线 AB 的斜率依次成等比数列, 求 k 的值;

(3) 求 $\triangle ABE$ 外接圆圆心 P 的纵坐标的最大值.

【小问 2 详解】

结合 (1) 有 $A(x_0, y_0)$, $B(-x_0, -y_0)$, $k_{AB} = k$, $k_{AD} = \frac{k}{3}$, $k_{BE} = k_{BD} = -k$,

由 A, B, E 均在椭圆 C 上, 设 $E(x_1, y_1)$,

$$\text{则 } k_{AE} \cdot k_{BE} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{y_1 + y_0}{x_1 + x_0} = \frac{y_1^2 - y_0^2}{x_1^2 - x_0^2} = \frac{\left(1 - \frac{x_1^2}{3}\right) - \left(1 - \frac{x_0^2}{3}\right)}{x_1^2 - x_0^2} = -\frac{1}{3}, \text{ 即 } k_{AE} = \frac{1}{3k},$$

又 k_{AE}, k_{AD}, k_{AB} 依次成等比数列, 则 $k_{AE} \cdot k_{AB} = k_{AD}^2$, 即 $\frac{1}{3k} \cdot k = \left(\frac{k}{3}\right)^2$,

解得 $k = \pm\sqrt{3}$.

【小问 3 详解】

结合 (1) 有 $B(-x_0, -y_0)$, $k_{BE} = k_{BD} = -\frac{y_0}{x_0} = -k$, 即 $y_0 = kx_0$,

则 BE 的直线方程为 $y + y_0 = -k(x + x_0)$, 即 $y = -kx - 2y_0$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = -kx - 2y_0 \\ \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 整理得 } (1 + 3k^2)x^2 + 12ky_0x + 12y_0^2 - 3 = 0.$$

设 BE 的中点为 M , 则 $x_M = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{12ky_0}{1 + 3k^2}\right) = -\frac{6ky_0}{1 + 3k^2}$, 则 $y_M = -kx_M - 2y_0 = -\frac{2y_0}{1 + 3k^2}$,

$$\text{联立 } AB, BE \text{ 的垂直平分线 } \begin{cases} y = -\frac{1}{k}x \\ y - y_M = \frac{1}{k}(x - x_M) \end{cases},$$

解得外接圆圆心为 P 的纵坐标为 $y_P = \frac{y_M - \frac{1}{k}x_M}{2} = \frac{-\frac{2y_0}{1 + 3k^2} - \frac{1}{k}\left(-\frac{6ky_0}{1 + 3k^2}\right)}{2} = \frac{2y_0}{1 + 3k^2}$,

又 $y_0 = kx_0$, 且 $\frac{x_0^2}{3} + y_0^2 = 1$, 解得 $k^2 = \frac{y_0^2}{3(1 - y_0^2)}$,

$$\text{所以 } y_P = \frac{2y_0}{1 + 3k^2} = \frac{2y_0}{1 + 3 \times \frac{y_0^2}{3(1 - y_0^2)}} = 2y_0(1 - y_0^2) = 2(y_0 - y_0^3),$$

设 $f(x) = x(1 - x^2) = x - x^3$, $-1 \leq x \leq 1$, 则 $f'(x) = 1 - 3x^2$,

由于 $f(-x) = (-x) - (-x)^3 = -(x - x^3) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 为奇函数,

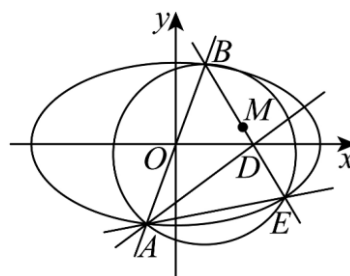
则只需考虑 $0 \leq x \leq 1$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

当 $0 \leq x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $f'(x) > 0$, $y = f(x)$ 单调递增;

当 $\frac{\sqrt{3}}{3} < x \leq 1$ 时, $f'(x) < 0$, $y = f(x)$ 单调递减,

所以当 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 且 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$,

故 y_p 的最大值为 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$.



19. 已知 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 为 $1, 2, \dots, m$ 的一个排列 A , 定义一次划分变换 F : 把小于 a_1 的数按照原排列的顺序排在 a_1 左边 (若没有小于 a_1 , 则其左侧不放任何数); 把大于 a_1 的数按照原排列的顺序排在 a_1 右边 (若没有大于 a_1 , 则其右侧不放任何数), 得到新的数列记为 $F(A)$, 其中 $F^0(A) = A$, $F^n(A) = F(F^{n-1}(A))$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 若排列 A 为 $4, 2, 3, 1$, 写出 $F(A)$ 以及 $F^2(A)$;

(2) 对于任意有限排列 A , 必定存在正整数 k 使得 $F^k(A) = F^{k-1}(A)$. 记使得 $F^k(A) = F^{k-1}(A)$ 成立的最小的正整数 k 为随机变量 X , 且 $N_{m,k}$ 表示满足 $X = k$ 的排列 A 的个数 ($1 \leq k \leq m$), 其中 $N_{1,1} = 1$.

(i) 若 $N_{m,k} = N_{m-1,k-1} + \lambda N_{m-1,k}$ ($m \geq 2$), 求 λ 的值 (用 m 表示);

(ii) 证明: $E(X) \leq 1 + \ln m$.

【答案】(1) $F(A)$: $2, 3, 1, 4$, $F^2(A)$: $1, 2, 3, 4$

(2)

(i) $\lambda = m - 1$

(ii) 解法一: $P(X = k) = \frac{N_{m,k}}{m!}$,

当 $m = 1$ 时, $X = 1$, 从而 $E(X) = 1 = 1 + \ln 1$, 满足结论.

当 $m \geq 2$ 时, 由 (i) 得 $E_m(X) = \sum_{k=1}^m k \cdot \frac{N_{m,k}}{m!} = \frac{1}{m!} \sum_{k=1}^m k (N_{m-1,k-1} + (m-1)N_{m-1,k})$.

令 $j = k - 1$ ，则

$$\sum_{k=1}^m k \cdot N_{m-1,k-1} = \sum_{j=1}^{m-1} (j+1) \cdot N_{m-1,j} = \sum_{j=1}^{m-1} j \cdot N_{m-1,j} + \sum_{j=1}^{m-1} N_{m-1,j} = (m-1)! E_{m-1}(X) + (m-1)!$$

$$\text{又因为 } (m-1) \sum_{k=1}^m k \cdot N_{m-1,k} = (m-1) \cdot (m-1)! E_{m-1}(X),$$

$$\text{于是 } E_m(X) = E_{m-1}(X) + \frac{1}{m}.$$

$$\text{综上, } E_m(X) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}.$$

$$\text{记 } f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1} (x \geq 0), \text{ 则 } f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} \geq 0,$$

于是 $f(x)$ 单调递增，从而 $f(x) \geq f(0) = 0$ ，当且仅当 $x = 0$ 等号成立。

$$\text{所以 } f\left(\frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + 1} > 0, \text{ 即 } \frac{1}{n+1} < \ln \frac{n+1}{n}.$$

$$\text{故 } E_m(X) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} < 1 + \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{m}{m-1} = 1 + \ln m.$$

命题得证。

解法二：当 $m = 1$ 时， $X = 1$ ，从而 $E(X) = 1 = 1 + \ln 1$ ，满足结论。

当 $m \geq 2$ 时，将 $1, 2, \dots, m$ 任意排列得到随机排列 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ ，

使得 $F^k(A) = F^{k-1}(A)$ 成立的最小的正整数 k 为 X ，记此时 X 的期望为 E_m 。

设 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ 中 $a_1 = t$ ，则 t 等可能地取 $1, 2, \dots, m$ ，

$$\text{故 } P(a_1 = t) = \frac{1}{m}, \quad t = 1, 2, \dots, m.$$

对 A 作用一次划分变换 F

若 $t = 1$ ，则没有小于 1 的数，变换后排列不变，此时 $X = 1$ ；

若 $t \geq 2$ ，则 $F(A)$ ：

$a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{t-1}}, t, a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_{m-t}}$ 其中 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{t-1}}$ 是 $1, 2, \dots, t-1$ 的一个排列，

并且此后的划分变换 F 只对左侧的 $t-1$ 个数起作用，右侧大数保持相对顺序不变，

此时满足 $F^k(A) = F^{k-1}(A)$ ，后续需要的最少次数的期望为 E_{t-1} ，

于是, 在 $a_1 = t$ 的条件下, 有 $E(X | a_1 = t) = E_{t-1} + 1$,

$$\text{故 } E_m = \frac{1}{m} \times 1 + \sum_{t=2}^m \frac{1}{m} (E_{t-1} + 1),$$

$$\text{即 } mE_m = \sum_{t=2}^m E_{t-1} + m \text{ ①, 从而 } (m-1)E_{m-1} = \sum_{t=2}^{m-1} E_{t-1} + m-1 \text{ ②,}$$

$$\text{①-②得 } mE_m - (m-1)E_{m-1} = E_{m-1} + 1 (m \geq 3), \text{ 即 } E_m = E_{m-1} + \frac{1}{m} (m \geq 3) \text{ ③}$$

$$\text{易知 } E_1 = 1, E_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \text{ 容易验证 } E_2 = E_1 + \frac{1}{2} \text{ 满足 } E_m = E_{m-1} + \frac{1}{m},$$

$$\text{从而有 } E_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m},$$

$$\text{记 } f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1} (x \geq 0), \text{ 则 } f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} \geq 0,$$

于是 $f(x)$ 单调递增, 从而 $f(x) \geq f(0) = 0$, 当且仅当 $x = 0$ 等号成立.

$$\text{所以 } f\left(\frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + 1} > 0, \text{ 即 } \frac{1}{n+1} < \ln \frac{n+1}{n}.$$

$$\text{故 } E_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} < 1 + \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{m}{m-1} = 1 + \ln m.$$

综上, X 的期望 $E(X) \leq 1 + \ln m$.