



- A.  $\frac{2\pi}{3}$                       B.  $\frac{\pi}{3}$                       C.  $\frac{\pi}{6}$                       D.  $\frac{\pi}{12}$

7. 已知圆  $C_1: x^2 + (y-a)^2 = 13$  与圆  $C_2: (x-b)^2 + y^2 = 4$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ) 交于  $A, B$  两点, 若存在实数  $b$ , 使得公共弦长  $|AB| = 4$ , 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $[-3, 3]$                       B.  $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$                       C.  $[-2, 2]$                       D.  $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

8. 已知  $a, b \in \mathbf{R}$ , 函数  $f(x) = x^3 - (a+1)x^2 + (a-b)x + b$ , 对任意  $x \in (0, +\infty)$ , 恒有  $f(x) \geq 0$  成立, 则  $a^2 + b$  的最小值为 ( )

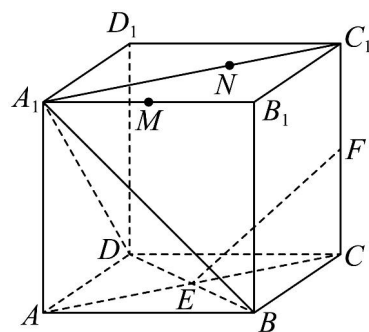
- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{3}{4}$                       C. 1                      D. 2

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $na_{n+1} = (n+2)a_n + 1$ , 则 ( )

- A.  $a_2 = \frac{5}{2}$                       B.  $\{a_n\}$  为递增数列  
C.  $\left\{ \frac{a_n}{(n+1)n} \right\}$  为等比数列                      D.  $a_{10} = \frac{109}{2}$

10. 如图, 在棱长为 2 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $E$  为  $AC$  的中点,  $F$  为  $CC_1$  的中点,  $M$  为  $A_1B_1$  的中点, 点  $N$  为线段  $A_1C_1$  上的动点 (含端点), 则下列说法正确的是 ( )



- A.  $EF \perp$  平面  $A_1BD$   
B. 三棱锥  $N - ACM$  的体积不是定值  
C. 三棱锥  $B_1 - BEM$  的外接球的表面积是  $6\pi$   
D. 当直线  $NE$  与平面  $A_1BD$  所成角最大时, 线段  $NE$  长为 2

11. 过抛物线  $C: x^2 = 4y$  焦点  $F$  的直线与  $C$  交于  $A, B$  两点, 其中  $A$  在第一象限且  $|FA| > |FB|$ , 已知点

$P(4,0)$ ，若直线  $PA$ ， $PB$  与  $C$  分别另外交于  $M$ ， $N$  两点，则 ( )

- A. 当  $|FA|=3$  时， $|OA|=2\sqrt{3}$
- B. 当  $|FA|=2|FB|$  时， $|FB|=3$
- C. 当直线  $AB$  与直线  $MN$  平行时，直线  $AB$  的斜率为 2
- D. 当直线  $AB$  的斜率为  $\frac{1}{4}$  时，直线  $MN$  的斜率为  $-\frac{3}{2}$

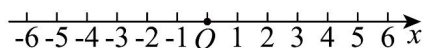
**三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.**

12. 已知圆锥的侧面展开图是周长为  $\pi+2$  的半圆，则圆锥的表面积为\_\_\_\_\_.

13. 已知  $\{a_n\}$  为等差数列，定义数列  $\{b_n\}$  满足： $b_n = \begin{cases} 3a_n, n \text{ 为奇数} \\ a_n + 6, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，记  $S_n$  为数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和，已知

$a_2 + a_4 = 18$ ，且  $S_4 = 50$ ，则  $S_{2n} =$ \_\_\_\_\_.

14. 如下图，一个质点在随机外力的作用下，从原点  $O$  出发在数轴上移动，每次向左或向右移动一个单位且相互独立，已知向右移的概率为  $\frac{3}{5}$ ，向左移的概率为  $\frac{2}{5}$ ，设该质点移动  $n$  次后在数轴上对应的数为随机变量  $\xi_n$ ，则  $\xi_n$  的方差  $D(\xi_n) =$ \_\_\_\_\_ (用含  $n$  的式子表示).



**四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

15. 在  $\triangle ABC$  中，内角  $A$ ， $B$ ， $C$  的对边分别是  $a$ ， $b$ ， $c$ ，且  $\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin C} = \frac{c}{a-b}$ .

(1) 求角  $B$  的大小；

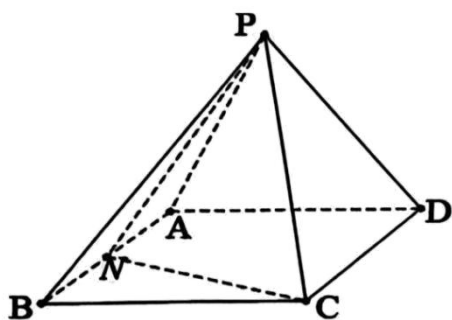
(2) 若点  $D$  满足  $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DC}$ ，且  $BD = 2$ ，求  $\triangle ABC$  面积的最大值.

16. 已知函数  $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ .

(1) 求  $f(x)$  的单调区间；

(2) 已知  $a > 1$ ，求证：当  $x > a$  时， $f(x) > a$ .

17. 如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  是菱形， $AD = 2$ ， $\angle BAD = 120^\circ$ ，平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ ， $\triangle PAD$  是等边三角形.



(1) 若平面  $PAB \cap$  平面  $PCD = m$ , 证明:  $CD \parallel m$ ;

(2) 求直线  $PD$  和平面  $PBC$  所成角的正弦值;

(3) 在棱  $AB$  上 (含端点) 是否存在点  $N$ , 使二面角  $N-PC-B$  的余弦值为  $\frac{4\sqrt{70}}{35}$ ? 若存在, 求出

$\frac{AN}{NB}$  的值. 若不存在, 说明理由.

18. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左焦点为  $F_1(-1, 0)$ , 且经过点  $\left(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ , 直线  $l$  的斜率为

$k (k \neq 0)$ , 且与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点.

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

(2) 若  $l$  不过  $F_1$ , 且直线  $AF_1, l, BF_1$  的斜率成等差数列, 求  $k$  的取值范围;

(3) 若  $l$  经过原点  $O$ , 过椭圆上一点  $P$  的切线  $l_1$  与  $l$  垂直, 求  $\triangle ABP$  面积的最大值.

19. 设集合  $M = \{2026, 2026+1, \dots, 2026+n\}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 若存在非空集合  $A, B$ , 满足  $A \cup B = M$ ,

$A \cap B = \emptyset$ , 则称  $A, B$  是集合  $M$  的一个划分. 记  $\varphi(P)$  为任意非空集合  $P$  的所有元素之和.

(1) 当  $n=3$  时, 求集合  $M$  的一个划分  $A, B$ , 使得  $\varphi(A) = \varphi(B)$ ;

(2) 当  $n=2026$  时, 是否存在集合  $M$  的一个划分  $A, B$  使得  $\varphi(A) = \varphi(B)$ . 若存在, 求出  $A, B$ ; 若不存在, 说明理由;

(3) 若集合  $M$  存在一个划分  $A, B$ , 使得  $\varphi(A) = \varphi(B)$ , 求满足条件的所有正整数  $n$ .