

从解题者到命题人： 教师专业发展的新视角

南京师范大学附属扬子中学

郝结红



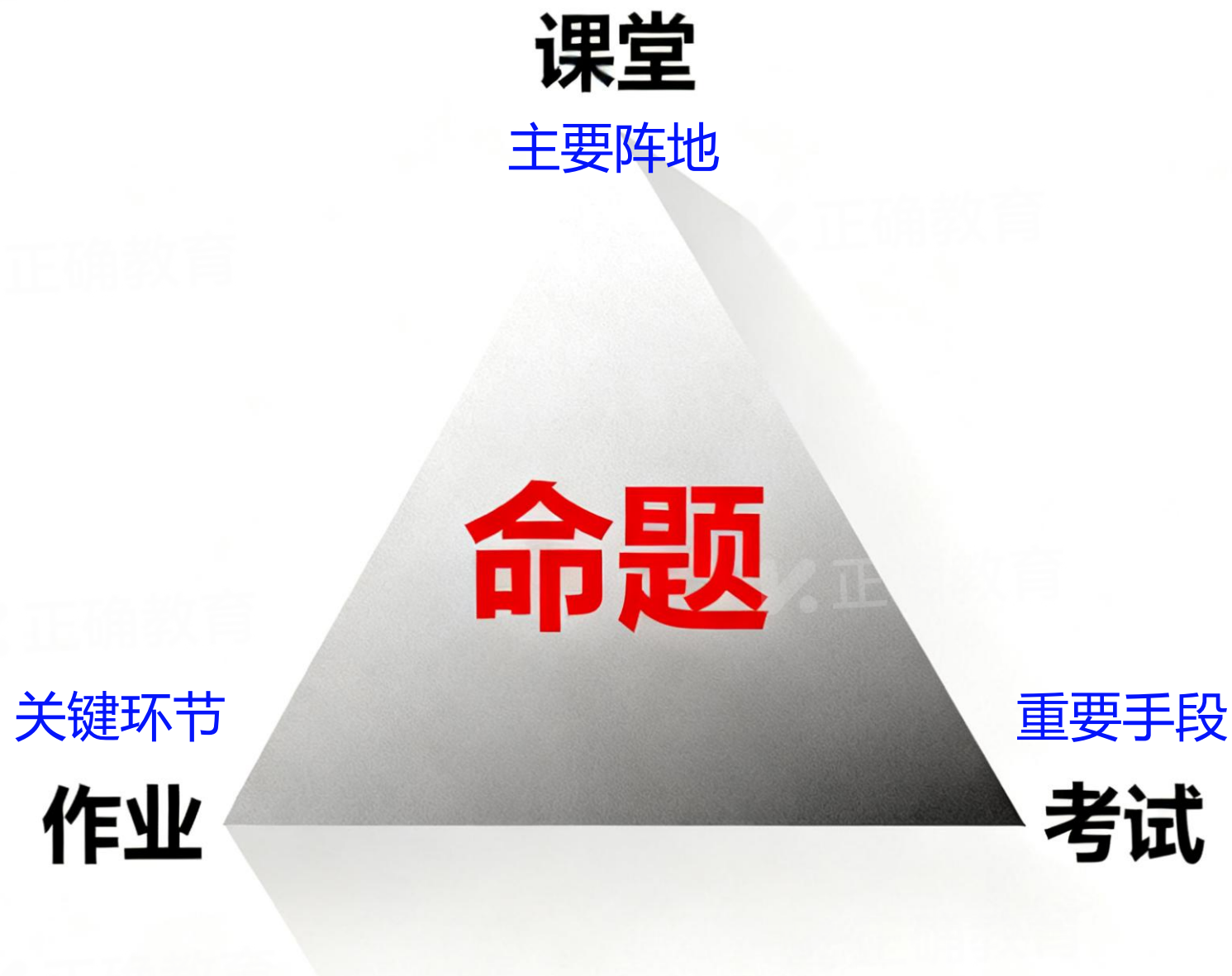
公众号



**说明：扫码关注“郝老师数学团队”教研
公众号，可以免费获取以下任一课件。**

2023年12月22日	四川绵竹市	授课《选填空题解法》
2024年04月08日	福建福州市	讲座《实践中积累，反思中成长》
2024年08月28日	江苏南京市	讲座《备课组长的角色定位 ——谈我的9年备课组长得与失》
2024年09月21日	云南大理市	讲座《高考数学重难点解析与微专题分享》
2024年11月05日	陕西府谷县	授课《一轮复习课线面垂直》 讲座《高考数学一轮复习的实践与思考》
2024年12月07日	宁夏同心县	讲座《校本教研：质量提升与团队发展的法宝》
2024年12月24日	浙江义乌市	讲座《基于校本资源库建设的集体备课》
2025年03月02日	福建龙岩市	讲座《从解题者到命题人：教师专业发展的新视角》
2025年03月16日	江苏泰州市	讲座《精准教学：二轮微专题与错题讲评实践分享》

2025年03月29日	山东济南市	授课《算两次思想》 讲座《阅读、思想、操作——解题教学实践分享》
2025年08月19日	江苏南京市	讲座《熟悉教材、站稳讲台、岗位成才 ——与新教师备课经验交流》
2025年08月25日	江苏南京市	讲座《以研促教：教研(组)案例分享》
2025年08月30日	江苏苏州市	讲座《以研促教：教研组备课组案例分享》
2025年09月20日	江苏镇江市	讲座《从解题者到命题人：教师专业发展的新视角》
2025年09月24日	扬子中学	讲座《从个人资源库到校本资源库 ——集体备课再升级》
2025年10月20日	指课网	讲座《从解题者到命题人：教师专业发展的新视角》



评价体系
核心素养
教学设计
讲义编写
作业布置
素材积累
论文写作
.....

01

破除迷思

命题高不可攀？比解题更简单

案例

市青年教师解题命题能力调研测试

数 学 学 科

考试时间 90 分钟

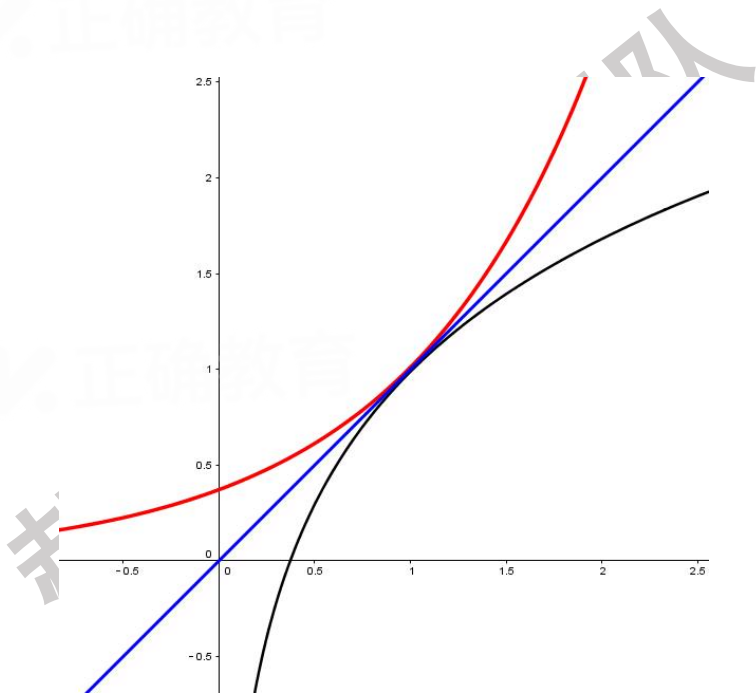
试卷满分 120 分

$$12. (0, \frac{1}{\sqrt{e}}]$$

12. 若函数 $f(x) = a^2 e^x + 2 \ln a - \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在零点, 则实数 a 的取值范围是 ▲ .

某老师: 我认为这道题, 本质应该是想考同构。先选定好同构的函数 $y = e^x + x$, 然后在自变量里加入参数, 最后整理一下方程, 将方程有解变为对应函数有零点的问题。

并且对于函数有零点, 也可以用最常用的导数来解, 不局限于这一种方法。



$$\text{单调} f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x$$

$$\text{设 } f(x) = a^2 e^x, \text{ 则 } f^{-1}(x) = \ln x - 2 \ln a$$

研究方程 $a^2 e^x = \ln x - 2 \ln a$ 的根

即函数 $f(x) = a^2 e^x - \ln x + 2 \ln a$ 的零点

$$\Leftrightarrow a^2 e^x = x \Leftrightarrow a^2 = \frac{x}{e^x}$$

案例

设函数 $f(x) = x(x^2 - \cos \frac{x}{3} + 2)$, $x \in (-3, 3)$, 则不等式 $f(1+x) + f(2) < f(1-x)$ 的解集是()

2022年xx市高一期末，选A

A. $(-2, -1)$ B. $(-2, 1)$ C. $(-1, 2)$ D. $(1, 2)$

设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且单调递增，

则 $a < 0$ 的充要条件是 $f(a+b) + f(a) < f(b)$.

这是因为：若 $a < 0$ ，则 $a+b < b$ ，于是 $f(a) < f(0) = 0$ ， $f(a+b) < f(b)$ ，

相加即得 $f(a+b) + f(a) < f(b)$.

反之，若 $f(a+b) + f(a) < f(b)$ ，

假设 $a \geq 0$ ，则 $a+b \geq b$ ，于是 $f(a) \geq f(0) = 0$ ， $f(a+b) \geq f(b)$ ，

相加即得 $f(a+b) + f(a) \geq f(b)$ ，这与 $f(a+b) + f(a) < f(b)$ 相矛盾，因此 $a < 0$.

【答案解析】

方法一：易知 $f(2) > 0$ ，于是 $f(1+x) < f(1+x) + f(2) < f(1-x)$ ，因此 $f(1+x) < f(1-x)$ ，从而 $1+x < 1-x$ ，于是 $x < 0$ ，故选 A.

方法二：构造函数 $g(x) = f(1+x) + f(2) - f(1-x)$ ，因为 $f(1+x)$ 单调递增， $f(1-x)$ 单调递减，所以 $g(x)$ 单调递增，注意到 $g(-1) = 0$ ，于是 $f(1+x) + f(2) < f(1-x)$ 即为 $g(x) < g(-1)$ ，因此 $x < -1$ ，且 $-3 < 1+x < 3$ ， $-3 < 1-x < 3$ ，解得 $-2 < x < -1$.

方法三：注意到 $2 = (1+x) + (1-x)$ ，则有 $f(1+x) + f((1+x) + (1-x)) < f(1-x)$ ，若 $1+x \geq 0$ ，则 $(1+x) + (1-x) \geq 1-x$ ，于是 $f(1+x) \geq f(0) = 0$ ， $f((1+x) + (1-x)) \geq f(1-x)$ ，相加得 $f(1+x) + f((1+x) + (1-x)) \geq f(1-x)$ ，当 $1+x < 0$ 时， $(1+x) + (1-x) < 1-x$ ，于是 $f(1+x) < f(0) = 0$ ， $f((1+x) + (1-x)) < f(1-x)$ ，相加得 $f(1+x) + f((1+x) + (1-x)) < f(1-x)$ ，因此 $1+x < 0$ 即 $x < -1$ ，下同方法二.

【命题意图】 考查函数基本性质的判断及其应用，并能通过转化与化归、分类讨论等思想解决问题.

原先作的替换是 $a=2x-1$, $b=2-3x$, 得到下面一题:

设函数 $f(x)=x(x^2-\cos\frac{x}{3}+2)$, $x\in(-3, 3)$, 则不等式 $f(2x-1)+f(1-x)<f(2-3x)$ 的解集是

- A. $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ B. $(\frac{1}{2}, \frac{5}{3})$ C. $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ D. $(\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$

题目 18: 求满足数列 a_n 的通项, 使其满足 $a_1=2t-3(t \neq \pm 1)$, 且

$$a_{n+1} = \frac{(2t^{n+1}-3)a_n + 2(t-1)t^n - 1}{a_n + 2t^n - 1}.$$

评注: 本题看起来递推公式比较复杂, 但观察到递推式分子中有分母的项, 则不妨再两边同时加上常数 1 再进行恒等变形, 则可变为:

$$\frac{a_{n+1}+1}{t^{n+1}-1} = \frac{2(a_n+1)}{t^n-1}$$

后面则令 $b_n = \frac{a_n+1}{t^n-1}$, 则原式变为 $b_{n+1} = \frac{2b_n}{b_n+2}$, 则通过取倒数变成一个简单的待

定系数法求通项的问题, 本题构造性稍强, 主要困难点在于加上常数 1 的第一步,

难题指数: 四颗半星.

h(x)

$$(x+1+\frac{1}{x})e^xe^{1+\frac{1}{x}}=(1+\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x})e^{\ln\frac{1}{x}}e^{1+\frac{1}{x}}\leftarrow$$

$$(x+1+\frac{1}{x})e^{x+1+\frac{1}{x}}=(1+\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x})e^{\ln\frac{1}{x}+1+\frac{1}{x}}\leftarrow$$

则令 $k(x)=xe^x$ ，则易知此函数为 R 上的增函数，于是上式等价于 $x+1+\frac{1}{x}=\ln\frac{1}{x}+1+\frac{1}{x}$ ，则 $x=\ln\frac{1}{x}$ ，即 $e^x=\frac{1}{x}$ 成立，上式的构造可谓精妙绝伦！后面的步骤则完全和上面相同。综合来看以上两种方法都有各有其妙处，本题主要是对指数和对数综合形式的一种比较复杂且隐蔽同构形式的挖掘，非常不容易想到 (特别是更加有技巧性的后者)，本题难度指数：五颗星。←

$$(x^2+x+1)e^x=1+\frac{1}{x}-\ln x\leftarrow$$

$$(x^2+x+1)e^x=1+\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\leftarrow$$

$$(x+1+\frac{1}{x})e^x=(1+\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x})e^{\ln\frac{1}{x}}\leftarrow$$

题目 20: 若对于 $\forall$ 的 $a, b \in R$ 不等式 $(6a-6b+1)e^{2a-b} \geq 6a-1-mbe^a$, 求实数 a 的最小值为____. $\leftarrow$

评注: 本题是对前面题目的又一种复杂变式, 同理需要构造成式子的两边是同构的形式. 首先观察到左边 $a-b$ 的形式, 则不妨两边同除 e^a , 则变为 $[6(a-b)+1]e^{a-b} \geq (6a-1)e^{-a}-mb$, 接下来则考虑到右边单独的 " mb " 这一项, 于是再右边同时加上 " $ma-ma$ " 再移项得 $[6(a-b)+1]e^{a-b}-m(a-b) \geq -[6(-a)+1]e^{-a}-m(-a)$, 于是只需再令 $f(x)=(6x+1)e^x-mx$, 则原式等价于 $f(a-b) \geq -f(-a)$, 而又由 $a, b \in R$ 且 a 与 b 又没有任何等量关系, 故原式又等价于 $f(x)_{\min} \geq [-f(x)]_{\max}$, 即 $f(x)_{\min} \geq 0$, 则对于 $f(x)$ 而言有 $f(x) \geq 0$ 恒成立则后面只需参变分离通过求导求解最值即可. 本题的变形和构造比较复杂, 需要对所给代数式的同构形式有较强的整体感觉属于难题, 难度指数: 五颗星. $\leftarrow$

步骤一 (选取不等式模型) 选取 $x - e \ln x \geq 0$. $\leftarrow$

步骤二 (确定代换函数模型) 将 $x - e \ln x \geq 0$ 中的 x 替换为 ax , 得到 $ax - e \ln(ax)$.

题: 已知函数 $f(x) = ax - e \ln(ax)$. $\leftarrow$

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性; $\leftarrow$

(2) 若 $\forall x \in (0, +\infty)$, $f(x) \geq ax(2 - e^{2x})$, 求实数 a 的取值范围. $\leftarrow$

步骤三

xe^{2x}

步骤四

下伏

的单

$\forall x \in$

答案 (1) 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{e}{a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{e}{a}, 0)$ 上单调递增; 当

$a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{e}{a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{e}{a}, +\infty)$ 上单调递增. (2) 实数 a 的取值

范围为 $(0, 2e]$. $\leftarrow$

02

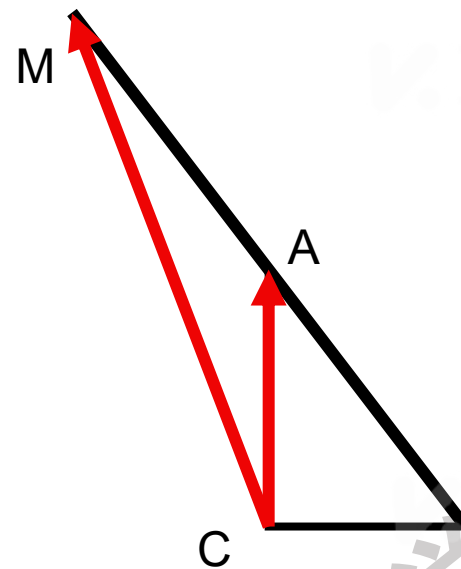
命题意识

选题备课，其实就在命题

一次真实的调查：

题目：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $CA = CB = 3$ ，

点 M 满足 $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AM}$ ，求 $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CA} = \underline{12}$ 。



调查结果:

定义法	——	1人	正确16人	共31人
投影法	——	1人		
基底法	——	3人		
坐标法	——	7人		
混合法	——	1人	错误15人	
结果为6的	——	2人		
未交	——	13人		

选择基底(例1)

想到建系(例2)

选择基底(例1)

想到建系(例2)

研究高考 研究学生 研究教学

理解数学 理解学生 理解教学

论文发表——以“情”定标，因“材”施教（对“圆锥曲线统一定义”公开课的反思与改进）

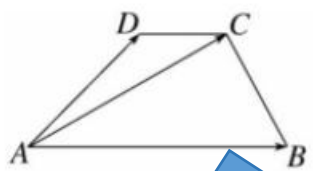
一、向量数量积

例1 (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角是 90° , $|\overrightarrow{AB}|=2$, $|\overrightarrow{AC}|=1$, M 是 BC 上的一点, 且 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$), 且 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}=0$, 则 $\frac{\lambda}{\mu}$ 的值为_____.

(2) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $CD=2$,

$\angle BAD = \frac{\pi}{4}$, 若 $\overrightarrow{AB} \cdot$

$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____.



跟踪训练1 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=BC=3$, $AB=2$, 点 M, N 分别是边 BC 和 AB 上的点, 且满足 $\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NB}$, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CN} =$ _____.

二、向量数量积的应用

求数量积的方法

例题 (步步高24页)、在 $\triangle ABC$ 中, $AC=BC=3$, $AB=2$, 点 M, N 分别是边 BC 和 AB 上的点, 且满足 $\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NB}$, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CN} =$ _____.

更多 换题 解析 题序 小结 下载

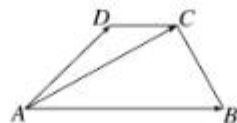
加入默认试题篮

练习1 (步步高24页)、在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角是 90° , $|\overrightarrow{AB}|=2$, $|\overrightarrow{AC}|=1$, M 是 BC 上的一点, 且 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$), 且 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}=0$, 则 $\frac{\lambda}{\mu}$ 的值为_____.

更多 换题 解析 题序 小结 下载

加入默认试题篮

练习2 (步步高24页)、如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $CD=2$, $\angle BAD = \frac{\pi}{4}$, 若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____.



更多 换题 解析 题序 小结 下载

加入默认试题篮

外来资料的确很好，未必适合我们

一轮复习

哪本资料都行、

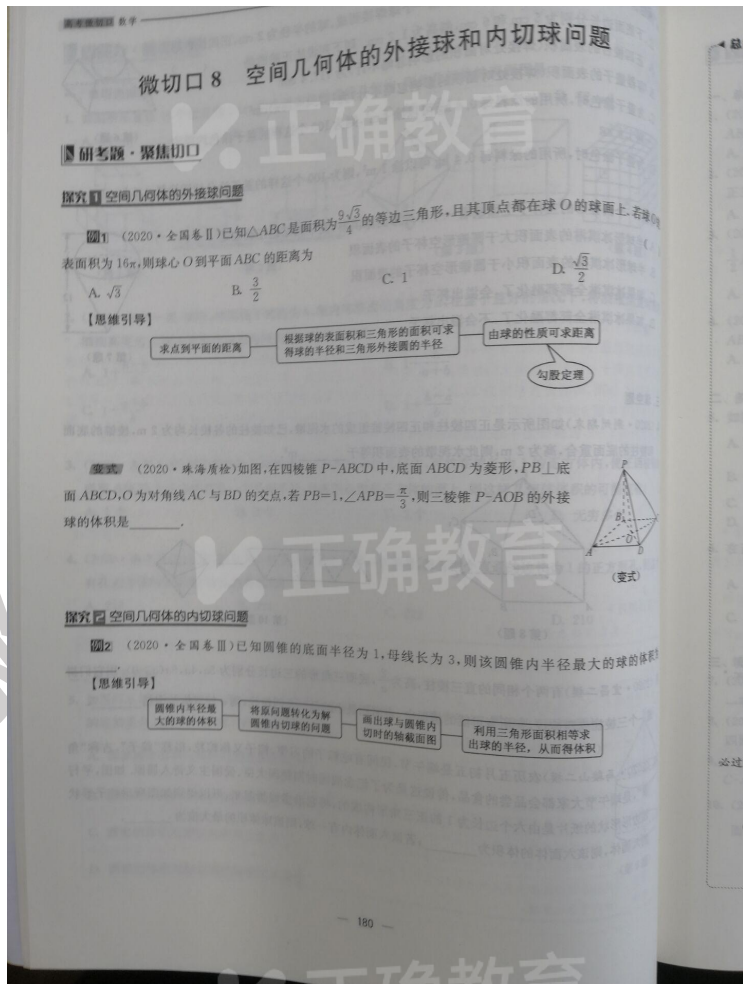
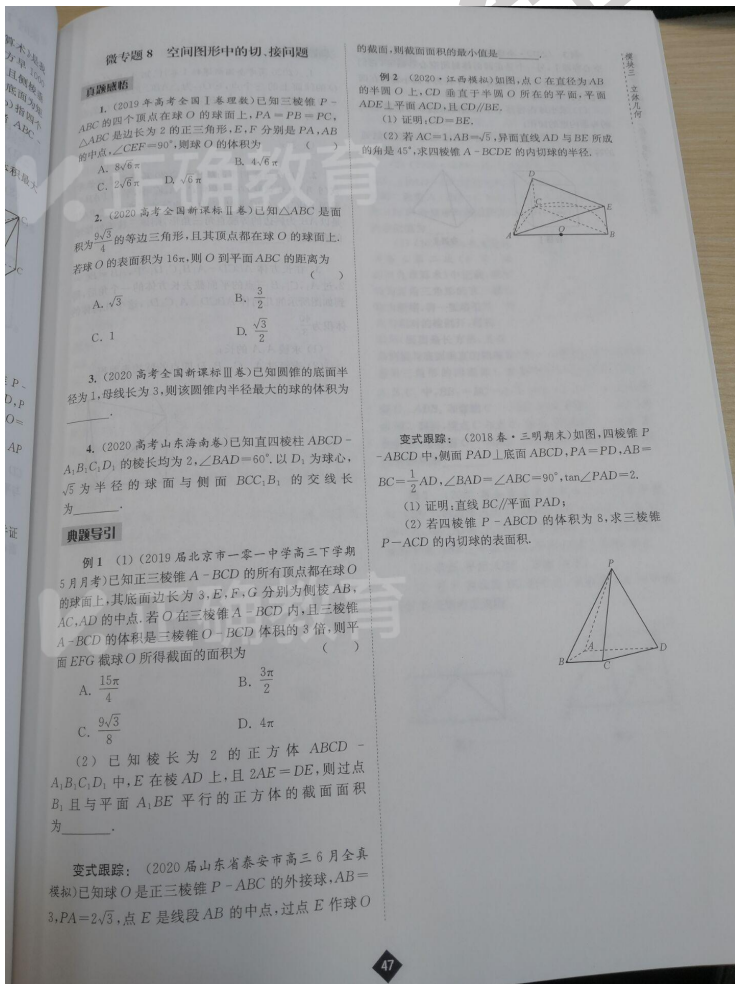
哪位老师都行；

二轮复习

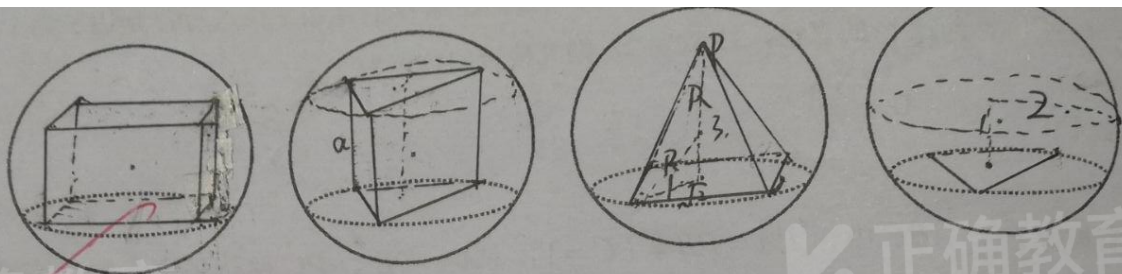
哪本资料都不行

不集体备课真不行。

经过我们课堂检验过的教学设计，更精准



环节一 课前预习 (请画出每小问题的空间图形)



1. (2010 全国 7) 设长方体的长、宽、高分别为 $2a$, a , a , 其顶点都在一个球面上, 则该球的表面积为 ()

- A. $3\pi a^2$ B. $6\pi a^2$ C. $12\pi a^2$ D. $24\pi a^2$

2. (2010 全国 10) 设三棱柱的侧棱垂直于底面, 所有的棱长都为 a , 顶点都在一个球面上, 则该球的表面积为 ()

- A. πa^2 B. $\frac{7}{3}\pi a^2$ C. $\frac{11}{3}\pi a^2$ D. $5\pi a^2$

3. (2018 全国 12 改编) 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的各顶点都在同一球面上, 底面正方形的边长为 $\sqrt{2}$, 若该正四棱锥的体积为 2, 则此球的体积为 ()

- A. $\frac{124\pi}{3}$ B. $\frac{625\pi}{81}$ C. $\frac{500\pi}{81}$ D. $\frac{256\pi}{27}$

4. (2020 全国 11) 已知 $\triangle ABC$ 是面积为 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ 的等边三角形, 且其顶点都在球 O 的表面上,

若球 O 的表面积为 16π , 则球 O 到平面 ABC 的距离为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 1 D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(1) 通过小题 1 回顾长方体的外接球, 会用半径公式 $R = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$; 通过画图, 培养直观能力, 理解长方体或正方体的外接球的球心就是体对角线的中点, 为墙角模型铺垫.

(2) 通过小题 2 直棱柱外接球的解法, 掌握所有柱体的外接球——汉堡模型.

(3) 通过小题 3 三棱锥外接球的解法回顾, 需要由立体转平面计算, 进一步理解球心位置.

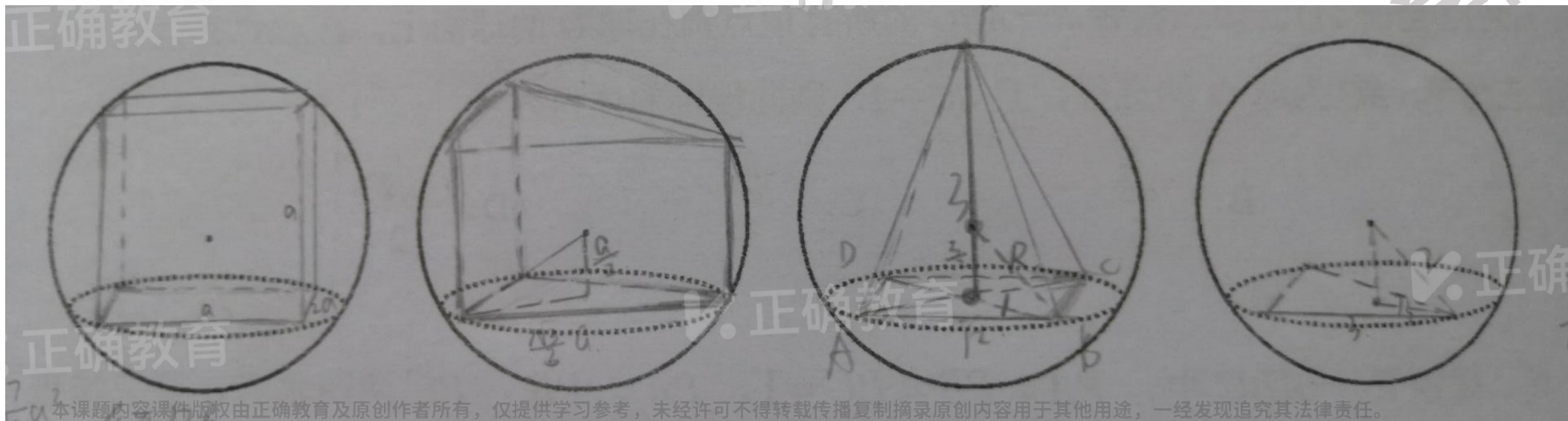
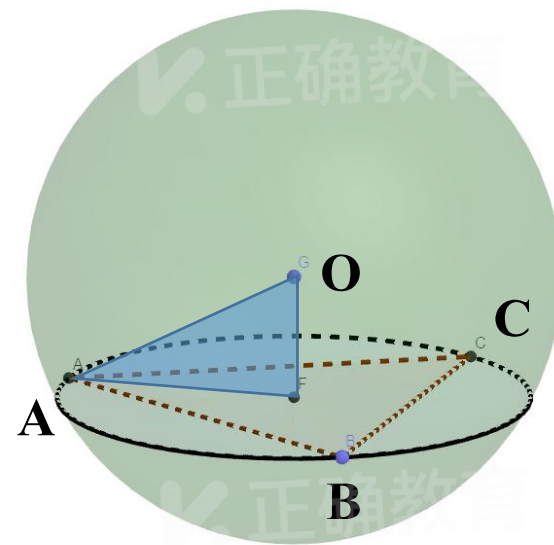
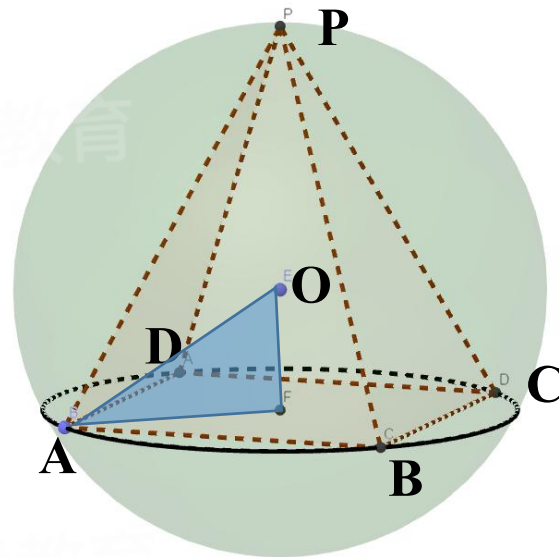
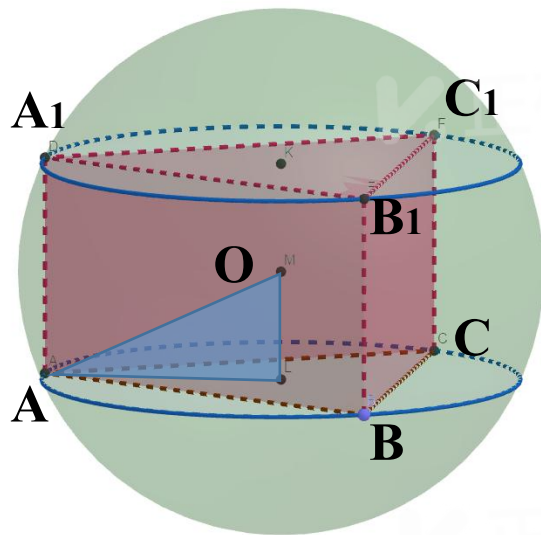
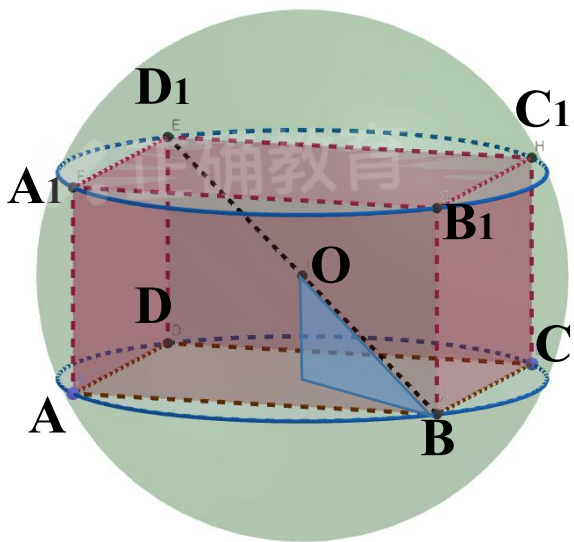
(4) 通过小题 4 得出找球心的常用方法: “垂径定理”画图, 勾股定理计算; 牢记三者之间的关系: $R^2 = r^2 + OO_1^2$.

二、规范目标的陈述格式和标准

目标的叙写

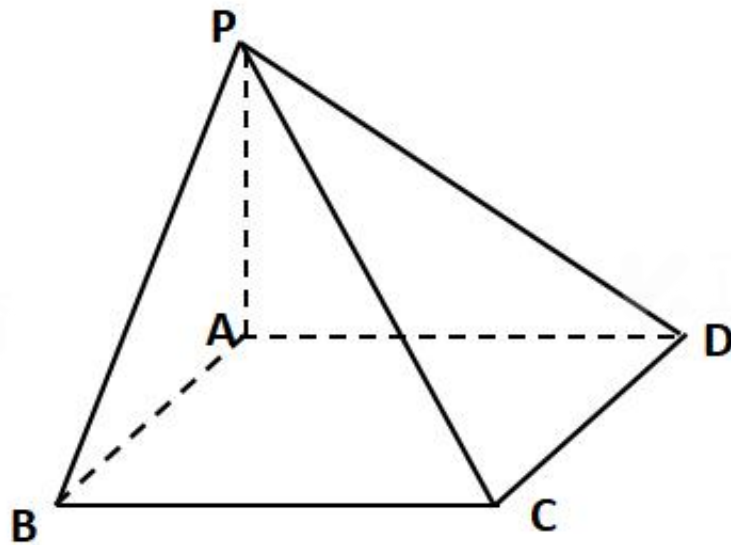


环节二：请结合课前预习题，**小组讨论**：解决外接球问题有哪些思路？

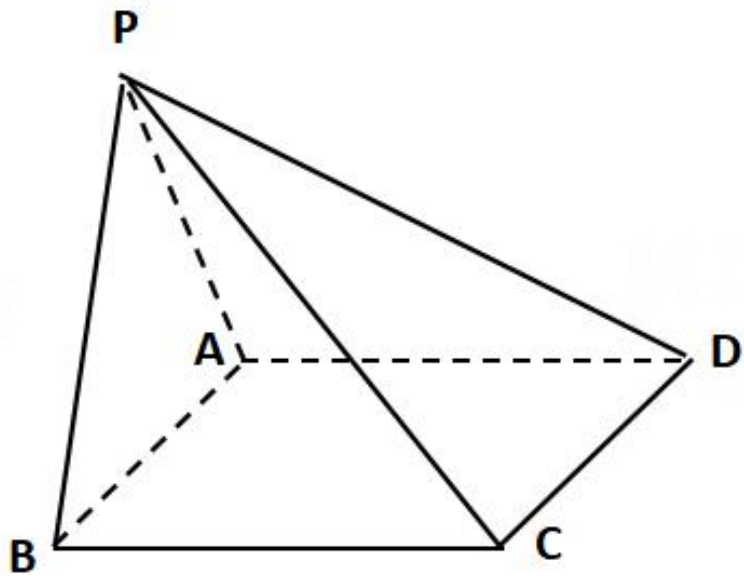


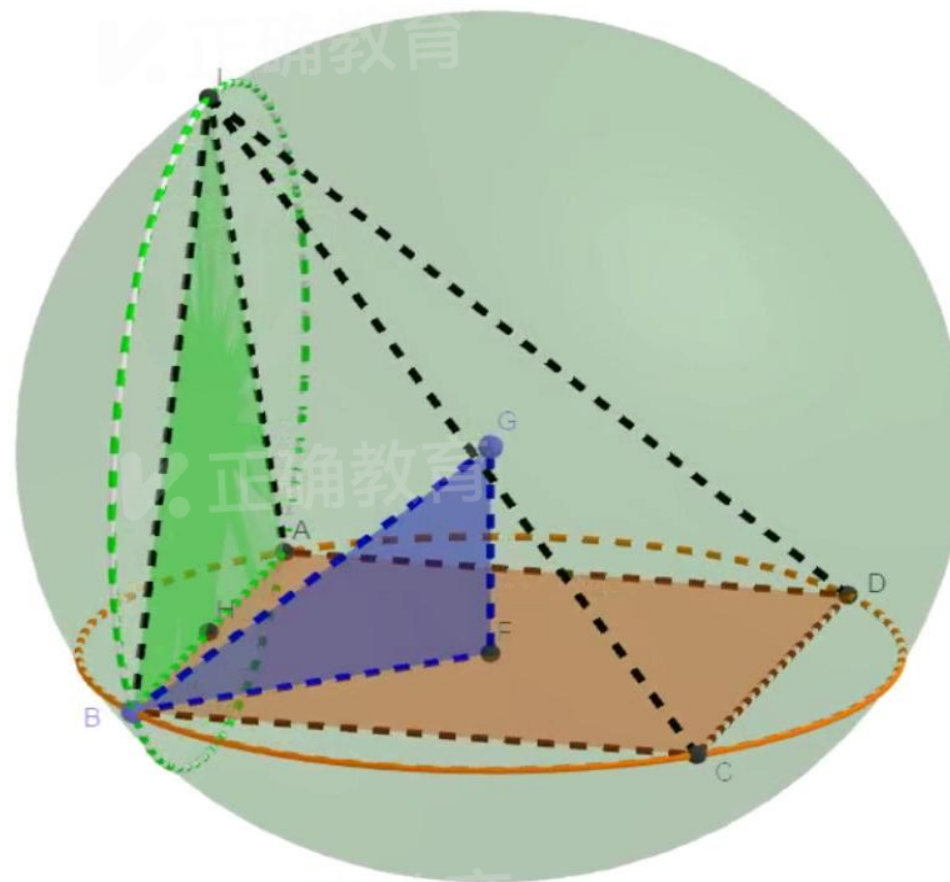
环节三 知识运用

【例题】 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 6 的正方形， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，
 $PA = 6$ ，则该四棱锥的外接球半径为_____.



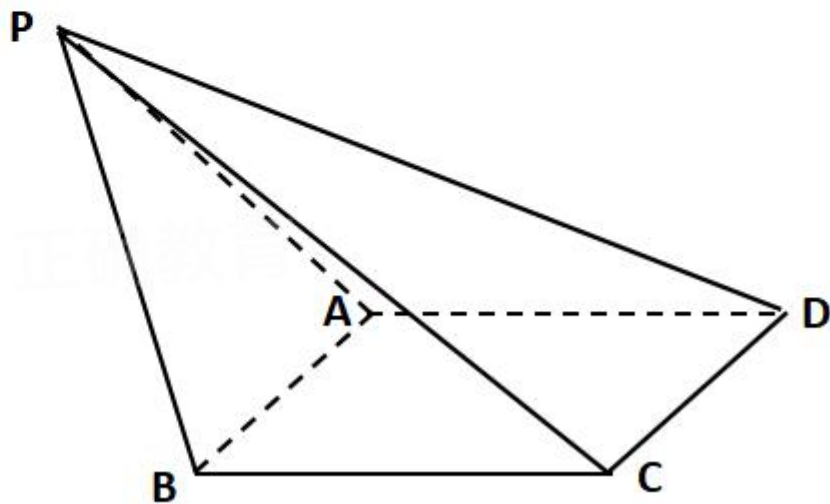
【变式 1】 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 6 的正方形，平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$ ，
 $PA = PB = 6$ ，则该四棱锥的外接球半径为_____.

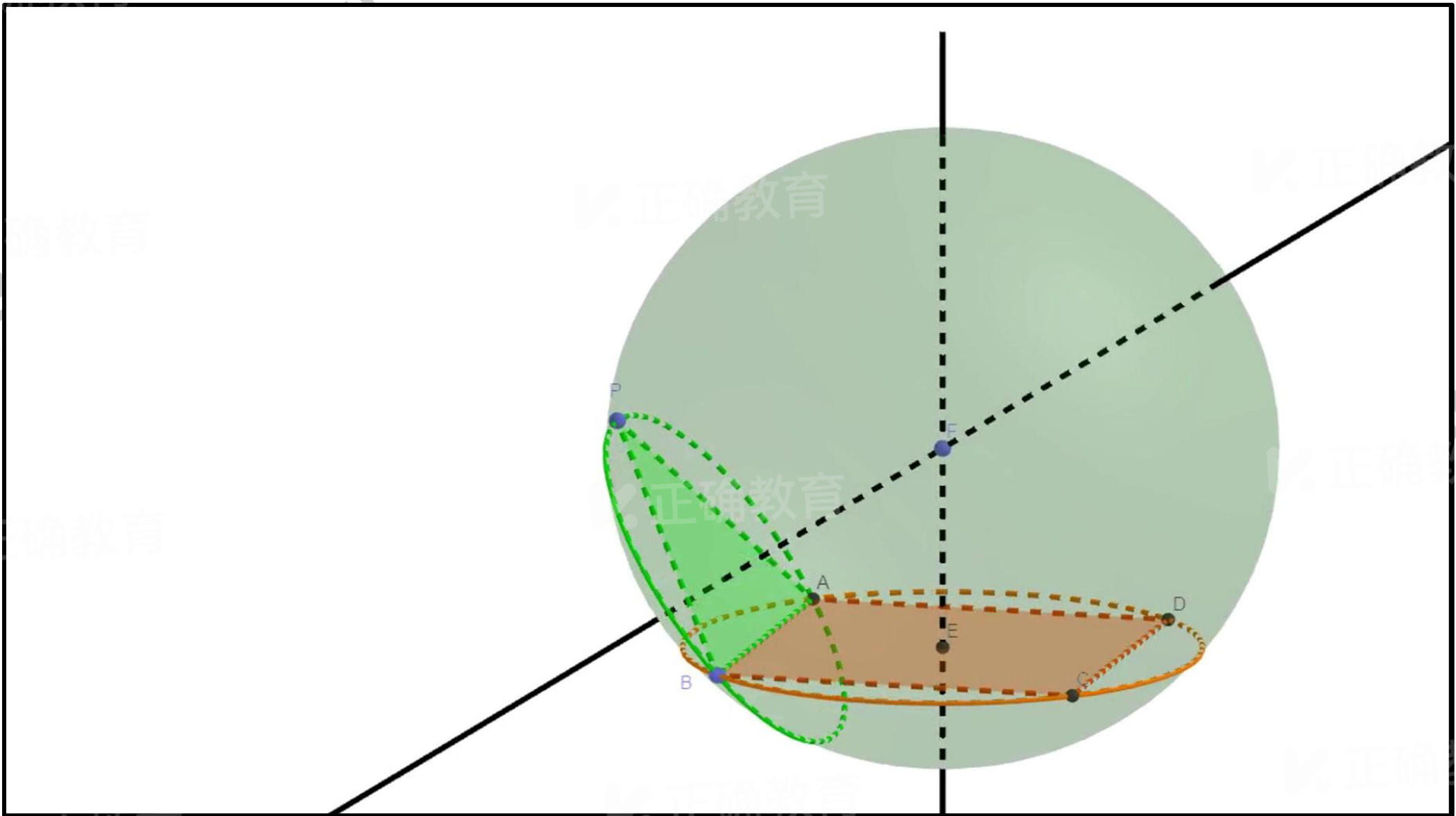




【变式2】四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 6 的正方形，平面 PAB 与平面 $ABCD$ 所成的角为 150° ， $PA = PB = 6$ ，则该四棱锥的外接球半径为_____。

(11月4日周练16题)

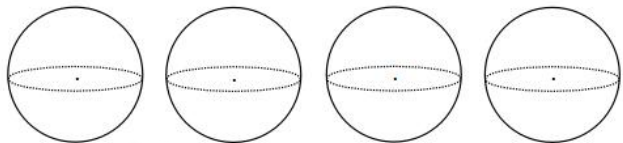




微专题：多面体的外接球

编写：郝结红

环节一 课前预习（请画出每小道的空间图形）



1、(2010 全国 7) 设长方体的长、宽、高分别为 $2a$ ， a ， a ，其顶点都在一个球面上，则该球的表面积为（ ）

- A. $3\pi a^2$ B. $6\pi a^2$ C. $12\pi a^2$ D. $24\pi a^2$

2、(2010 全国 10) 设三棱柱的侧棱垂直于底面，所有的棱长都为 a ，顶点都在一个球面上，则该球的表面积为（ ）

- A. πa^2 B. $\frac{7}{3}\pi a^2$ C. $\frac{11}{3}\pi a^2$ D. $5\pi a^2$

3、(2018 全国 12 改编) 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的各顶点都在同一球面上，底面正方形的边长为 $\sqrt{2}$ ，若该正四棱锥的体积为 2，则此球的体积为（ ）

- A. $\frac{124\pi}{3}$ B. $\frac{625\pi}{81}$ C. $\frac{500\pi}{81}$ D. $\frac{256\pi}{9}$

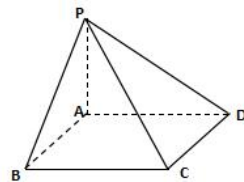
4、(2020 全国 11) 已知 $\triangle ABC$ 是面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 的等边三角形，且其顶点都在球 O 的表面上，若球 O 的表面积为 16π ，则球 O 到平面 ABC 的距离为（ ）

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 1 D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

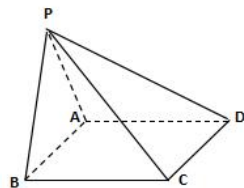
环节二 方法梳理

环节三 知识运用

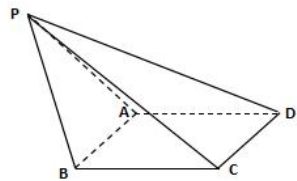
【例题】四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 6 的正方形， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $PA=6$ ，则该四棱锥的外接球半径为_____。



【变式 1】四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 6 的正方形， $PA=PB=6$ ，则该四棱锥的外接球半径为_____。



【变式 2】四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 6 的正方形， $PA=PB=6$ ，则该四棱锥的外接球半径为_____。（11 月 4 日周练 16 题）



多面体的外接球

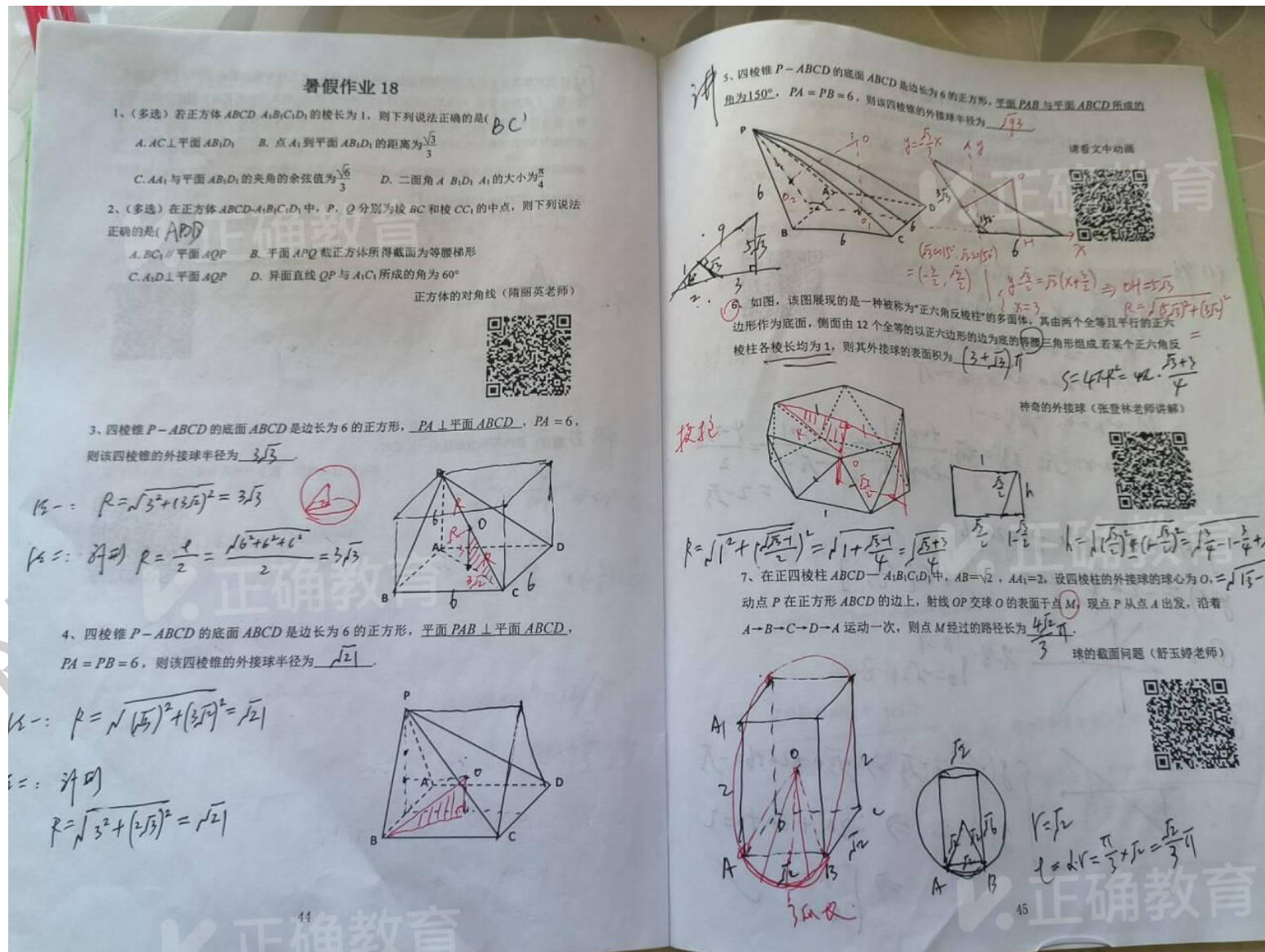
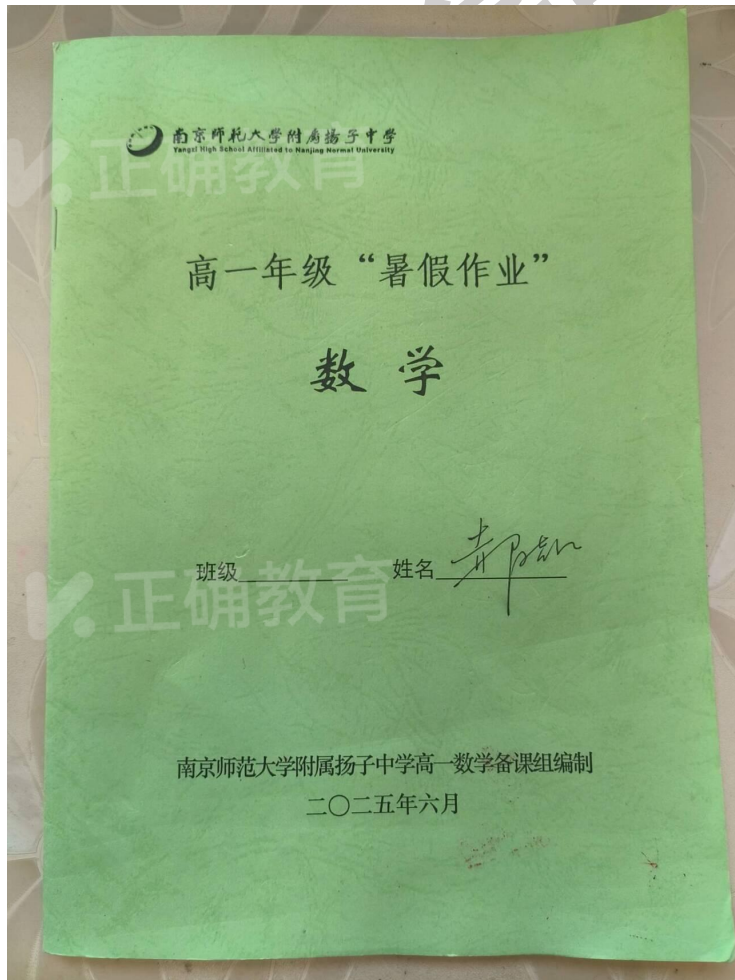
环节四 针对练习

【练习1】 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AP=2$, $AB=3\sqrt{3}$, $PA \perp$ 面 ABC , $\angle ACB=60^\circ$, 则该三棱锥外接球的半径为_____.

【练习2】 三棱锥 $D-ABC$ 的四个顶点均在球 O 的球面上, $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 所在平面相互垂直, $AB=3$, $AC=\sqrt{3}$, $BC=CD=BD=2\sqrt{3}$, 则球 O 的半径为_____.

【练习3】 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $\triangle ABD$ 与 $\triangle CBD$ 均为边长为 2 的等边三角形, 且二面角 $A-BD-C$ 的平面角为 120° , 则该三棱锥的外接球的半径为_____.

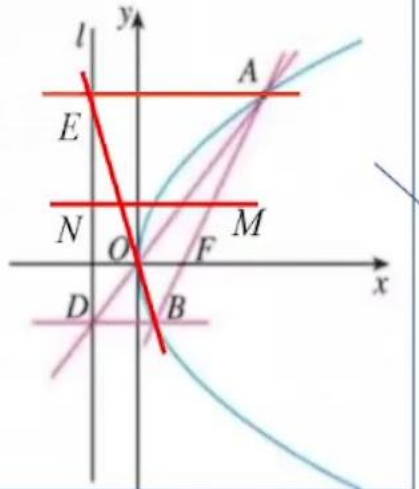
多面体的外接球



案例5 从课本一道例题探究抛物线焦点弦性质的作业设计

例5 经过抛物线焦点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点，经过点 A 和抛物线顶点的直线交抛物线的准线于点 D ，求证：直线 DB 平行于抛物线的对称轴。

分析：我们用坐标法证明这个结论，即通过建立抛物线及直线的方程，运用方程研究直线 DB 与抛物线对称轴之间的位置关系。建立如图 3.3-5 所示的直角坐标系，只要证明点 D 的纵坐标与点 B 的纵坐标相等即可。



人教版选择性必修第一册第三章
圆锥曲线的方程
P135

探究作业：

- (1) 该问题的逆命题是什么？你能证明吗？
- (2) 你能证明你能写出 A, B 两点横、纵坐标之间的哪些等量关系式？
- (3) 你能计算出 AB 弦长吗？什么时候最短？能从不同角度证明吗？（提示：引出参数进行表示）
- (4) 你能找到图中的一些垂直关系吗？（提示：可尝试连接其中的一些点）
- (5) 通过作辅助线，你还可以获得哪些结论？（如连接 AN, BN ，将会得到什么？等等）
- (6) 上述结论在椭圆、双曲线中仍然成立吗？哪些结论作适当改变仍然成立？哪些结论不成立？……

核心素养导向下高中
数学作业设计的探索

丁益民 正高级教师
江苏省苏州实验中学



心得：以“微专题编写”为抓手，
着眼课堂，让**集体备课**更为现实。

心得：以“相互听课”为抓手，
着眼学生，让**教师成长**更为现实。

讲座：微专题编写实践（郝结红）

17题答案解读

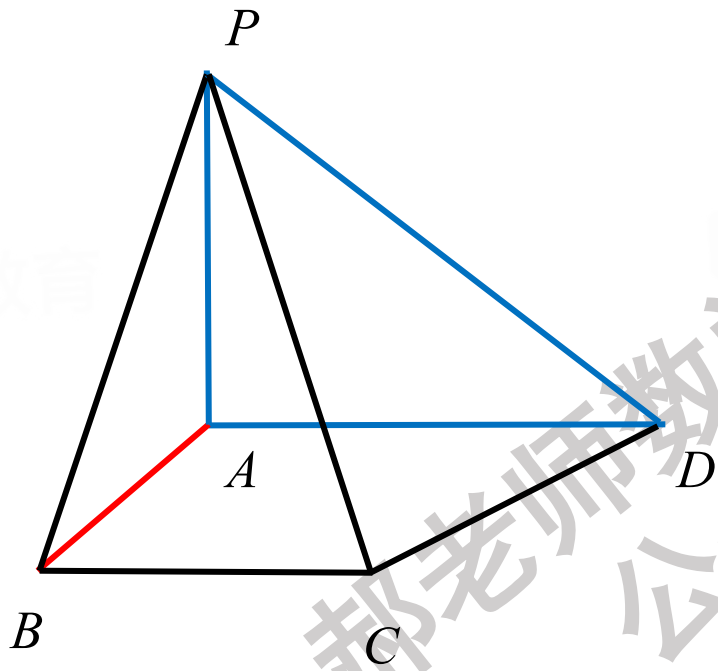
17. (15分) 如图所示的四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$.

(1) 证明: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD ;

(2) 若 $PA = AB = \sqrt{2}$, $AD = \sqrt{3} + 1$, $BC = 2$, P, B, C, D 在同一个球面上, 设该球面的球心为 O .

(i) 证明: O 在平面 $ABCD$ 上;

(ii) 求直线 AC 与直线 PO 所成角的余弦值.



案例：基于解析几何背景的函数图象对称探究

(2024 年新 I —18) 已知函数 $f(x) = \ln 2 - \frac{x}{2} + ax + b(x-1)^3$.

- (1) 若 $b=0$, 且 $f'(x) \geq 0$, 求 a 的最小值;
- (2) 证明: 曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形;
- (3) 若 $f(x) > -2$ 当且仅当 $1 < x < 2$, 求 b 的取值范围.

(2023 年全国乙卷—21) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x+a} \ln(1+x)$.

- (1) 当 $a=-1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
- (2) 是否存在 a, b , 使得曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x=b$ 对称, 若存在, 求 a, b 的值, 若不存在, 说明理由.
- (3) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 存在极值, 求 a 的取值范围.

关键是探索发现
对称中心、对称轴

关键是想到要去发现

课本学习生长点、
固着点在哪里

一轮备考如何落实

.....

案例：基于解析几何背景的函数图象对称探究

2. 对称性

探究

观察椭圆的形状，可以发现椭圆既是轴对称图形，又是中心对称图形，如何利用方程说明椭圆的对称性？

观察是可能“**对称**”的。
猜想是正确的吗？
怎样证明你的猜想呢？
从方程出发……

在椭圆的标准方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 中，以 $-y$ 代 y ，方程不变。这说明当点 $P(x, y)$ 在椭圆上时，它关于 x 轴的对称点 $P_1(x, -y)$ 也在椭圆上，所以椭圆关于 x 轴对称。……

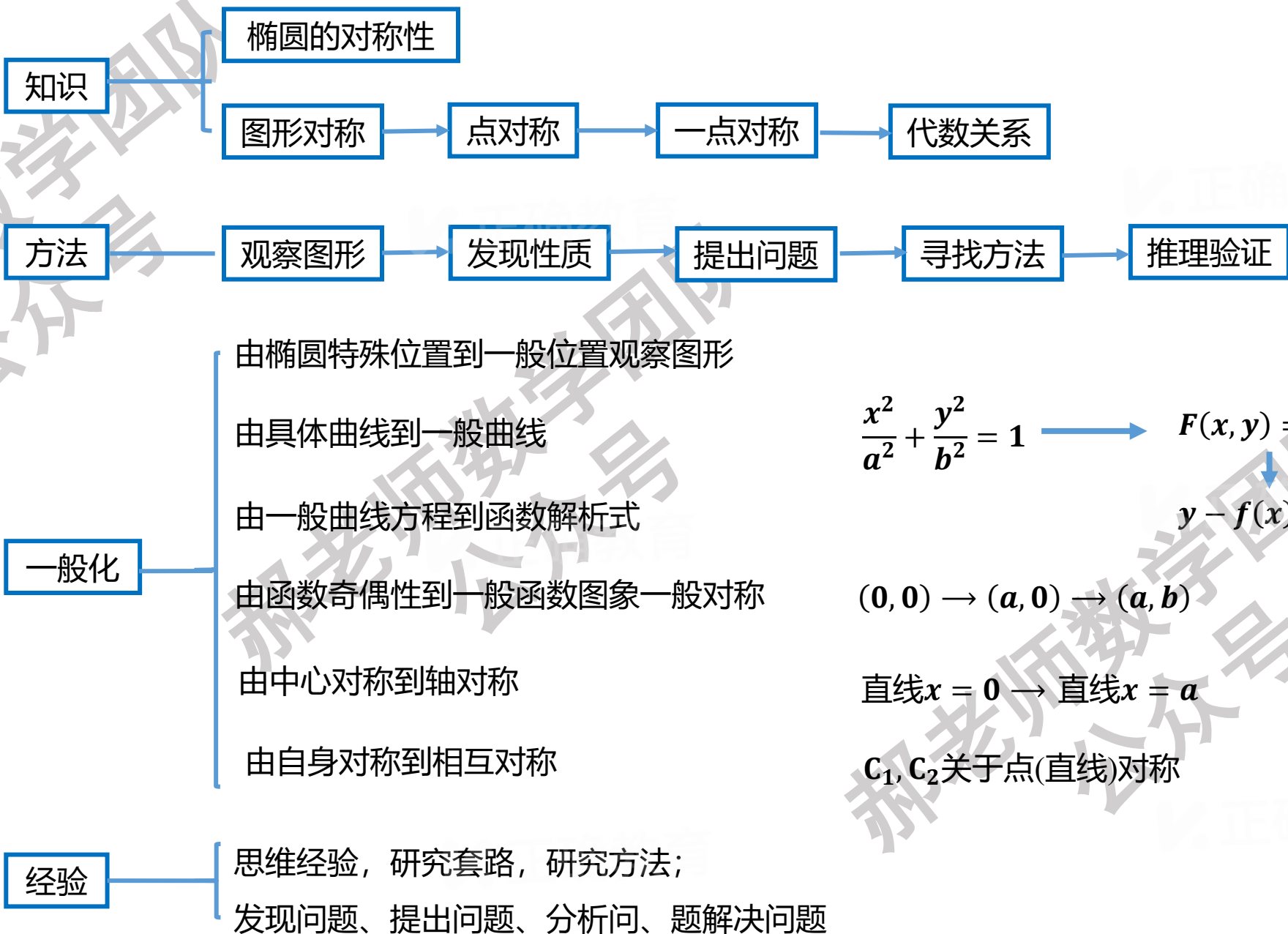
综上，椭圆关于 x 轴、 y 轴都是对称的。这时，坐标轴是椭圆的对称轴，原点是椭圆的对称中心，椭圆的对称中心叫做**椭圆的中心**。

探究教学问题串自然形成：

- 发现可能是对称的？（发现问题）
- 发现是可靠的吗？（提出问题）
- 可以验证你的发现吗？（分析问题）
- 如何验证呢？（分析问题）
- 用代数方法验证？（解决问题）

……

课本 椭圆对称性



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \longrightarrow F(x, y) = 0$$

$$\downarrow$$

$$y - f(x) = 0$$

$$(0, 0) \longrightarrow (a, 0) \longrightarrow (a, b)$$

$$\text{直线 } x = 0 \longrightarrow \text{直线 } x = a$$

$$C_1, C_2 \text{ 关于点(直线)对称}$$

教学实践：函数图象的对称性研究

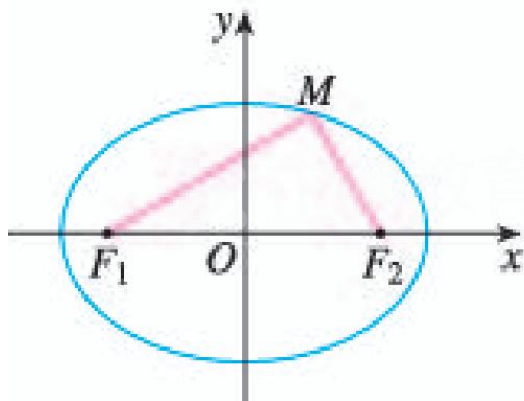
请看：椭圆的几何性质（人教A版教材）

2. 对称性

探究

观察椭圆的形状，可以发现椭圆既是轴对称图形，又是中心对称图形，如何利用方程说明椭圆的对称性？

在椭圆的标准方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 中，以 $-y$ 代 y ，方程不变。这说明当点 $P(x, y)$ 在椭圆上时，它关于 x 轴的对称点 $P_1(x, -y)$ 也在椭圆上，所以椭圆关于 x 轴对称。同理，以 $-x$ 代 x ，方程也不变，这说明如果点 $P(x, y)$ 在椭圆上，那么它关于 y 轴的对称点 $P_2(-x, y)$ 也在椭圆上，所以椭圆关于 y 轴对称。以 $-x$ 代 x ，以 $-y$ 代 y ，方程也不变，这说明当点 $P(x, y)$ 在椭圆上时，它关于原点的对称点 $P_3(-x, -y)$ 也在椭圆上，所以椭圆关于原点对称。



一、大家对这段话有什么问题吗？

(1)既然已经发现，为何还要证明？

(2)既然终归要证明，为何还要看，还要看出？

(3)针对画线部分回答：凭什么可以这样证明？

①怎样理解这里的方程不变？

②怎样理解椭圆关于原点对称？

.....

二、再针对如下一段话

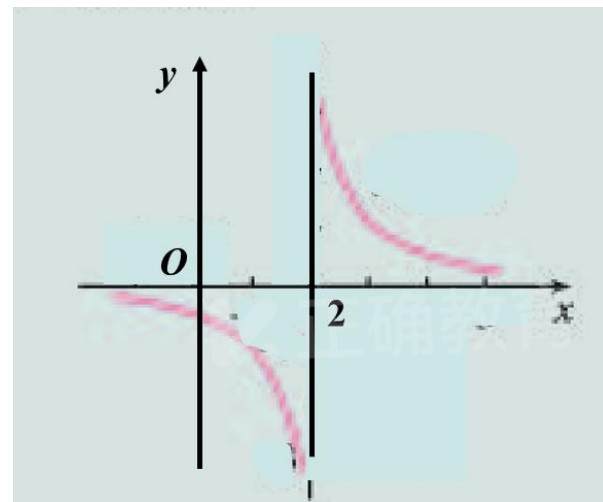
以 $-x$ 代 x ，以 $-y$ 代 y ，
方程也不变，这说明当点 $P(x, y)$ 在椭圆上时，它关于原点的对称点 $P_3(-x, -y)$ 也在椭圆上，所以椭圆关于原点对称。

- (1) 上述证明方法可以推广至一般的曲线吗？
- (2) 函数的图象可以看成曲线吗？
- (3) 奇函数图象有何特征？其代数条件是怎样的？
- (4) 奇函数对的定义域有何特征？怎样解释？

三、再探究：

(1) 若函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $M(2,0)$ 对称，其代数条件可以是怎样的？

(2) 上述(1)中的条件可以一般化吗？



四、更进一步：

(1) 关于图象轴对称的话题，你打算探究什么，如何探究？

(2) 你可以本课图象中心对称的过程与结果，给出图象轴对称的有关结论吗？

五、请看问题：

1. 已知函数 $f(x) = \ln 2 - \frac{x}{2} + ax + b(x-1)^3$. 证明：曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形.

2. 是否存在 a, b , 使得曲线 $g(x) = (x+a)\ln(1+\frac{1}{x})$ 关于直线 $x=b$ 对称,
若存在, 求 a, b 的值, 若不存在, 说明理由.

六、再回首：

- (1) 本课我们研究了什么？
- (2) 我们是怎样研究的？
- (3) 你还想说什么？

课题：函数图象的对称性探究

03

新手入门

从改编题开始，迈出命题第一步

8. 一个不透明的纸箱中放有大小、形状均相同的 10 个小球，其中白球 6 个、红球 4 个，现无放回分两次从纸箱中取球，第一次先从箱中随机取出 1 个球，第二次再从箱中随机取出 2 个球，分别用 A_1 , A_2 表示事件“第一次取出白球”和“第一次取出红球”；用 B 表示事件“第二次取出两球为 1 个红球 1 个白球”，则下列结论正确的有

A. $P(B|A_1) = \frac{5}{9}$

B. $P(B) = \frac{4}{15}$

C. $P(A_1B) = \frac{1}{3}$

D. $P(A_1|B) = \frac{5}{8}$

8. ACD

改编错题，刻意训练

三点要求：

- (1) 不可换题
- (2) 方法不可改变，
只能改变数字或者条件结论
- (3) 只能变简单不能难

高三数学纠错练习 (第6周)

一、简单题——确保不丢分

1. (谢秀芳老师改编) 已知 $x, y \in \mathbb{R}$, 则“ $a=1$ ”是“直线 $ax-y-1=0$ 与直线 $ax+ay+1=0$ 垂直”的_____条件.

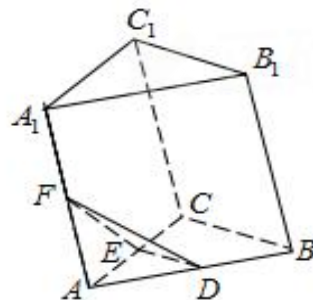
2. (孙壮志老师改编) 已知函数 $f(x) = x^2 - kx + 4$, 对任意 $x \in [3, 4]$, 不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 则实数 k 的最大值为_____.

3. (郝结红老师改编) 已知函数 $f(x) = -x^2 + mx - 1$, 若对于任意 $x \in [m, m+1]$, 都有 $f(x) > 0$ 成立, 则实数 m 的取值范围是_____.

4. (郝结红老师改编) 如图, 在三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 中, D, E, F 分别是三等分点

($AD=2DB, AE=2EC, AF=2FA_1$), 设三棱锥 $F-ADE$ 的体积为 V_1 ,

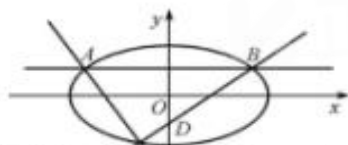
三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 的体积为 V_2 , 则 $V_1:V_2 =$ _____.



5. (栗春云老师改编) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知

椭圆 $E: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$, 直线 $l: y=t$ 与椭圆交于 A, B 两点, M 为椭圆 E 上异于 A, B 的点.

(2) 若 M 为下顶点, 以 AB 为直径的圆 P 过点 M , 求圆 P 的标准方程;



6. (张朋举老师改编) 如图, 准备在墙上钉一个支架, 支架由两直杆接点 D 把杆 AC 分成 AD, CD 两段, 其中两固定点 A, B 间的距离为 1 m , 60° , 杆 AC 长为 1 m . 若制作 AD 段的成本为 100 元/m , 制作 CD 段的成本是 400 元/m . 设 $\angle ABD = \alpha$, 制作整个支架的总成本记为 S .

(1) 求 S 关于 α 的函数表达式, 并指出 α 的取值范围;

(2) 问 BD 段多长时, S 最小? 并求出最小值?

二、中档题——争取多拿分

7. (孙燕红老师改编) 函数 $y = \cos x - x \tan x$ 的定义域为 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$, 且

8. 已知点 $P(1, 0)$, 直线 $l: y=x+t$ 与函数 $y=x^2$ 的图象交于 A, B 两点, 当 $\overrightarrow{PA}$ 程为_____.

9. (黄自桥老师改编) 已知 A 为椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 上的动点, MN

18. (本题满分 16 分)

(第 17 题图)

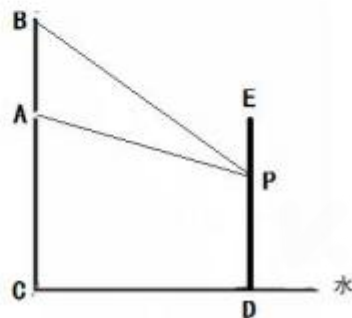
南京市江北新区计划在一个竖直长度为 20 米的瀑布 AB 正前方修建一座观光电梯 DE 。如图所示, 瀑布底部 A 距离水平地面的高度 AC 为 60 米, 电梯上设有一个安全拍照口 P , P 上升的最大高度为 60 米。设 P 距离水平地面的高度为 a 米, P 处拍照瀑布的视角 $\angle BPA$ 为 θ 。摄影爱好者发现, 要使照片清晰, 视角 θ 不能小于 30° 。

(1) 当 $a=50$ 米时, 视角 θ 恰好为 30° , 求电梯和山脚的水平距离 CD 。

(2) 要使电梯拍照口 P 的高度 a 在 52 米及以上时, 拍出的照片均清晰, 请求出电梯和山脚的水平距离 CD 的取值范围。



第 3 页

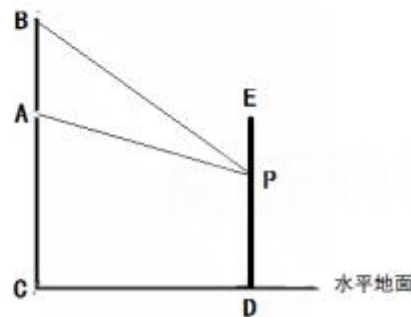


改条件

10. 南京市江北新区计划在一个竖直长度为 20 米的瀑布 AB 正前方铺设一段铁轨, 铁轨上有一座移动观光电梯 DE 。如图所示, 瀑布底部 A 距离水平地面的高度 AC 为 60 米, 电梯上预设置一个安全拍照口 P , P 上升的最大高度为 60 米。设 P 距离水平地面的高度为 a 米, P 处拍照瀑布的视角 $\angle BPA$ 为 θ 。摄影爱好者发现, 要使照片清晰, 视角 θ 不能小于 30° 。

(1) 当 $a=50$ 米时, 视角 θ 的正切值恰好为 $\frac{1}{2}$, 求电梯和山脚的水平距离 CD 。

(2) 要使 CD 在 $[20, 10\sqrt{3} + 10\sqrt{2}]$ 之间都能拍出清晰的照片, 请问 a 的取值范围。



【2017 年高考题】

18. 如图，水平放置的正四棱柱形玻璃容器 I 和正四棱台形玻璃容器 II 的高均为 32cm，容器 I 的底面对角线 AC 的长为 $10\sqrt{7}$ cm，容器 II 的两底面对角线 EG， E_1G_1 的长分别为 14cm 和 62cm. 分别在容器 I 和容器 II 中注入水，水深均为 12cm. 现有一根玻璃棒 l，其长度为 40cm.（容器厚度、玻璃棒粗细均忽略不计）

- (1) 将 l 放在容器 I 中，l 的一端置于点 A 处，另一端置于侧棱 CC_1 上，求 l 没入水中部分的长度；
- (2) 将 l 放在容器 II 中，l 的一端置于点 E 处，另一端置于侧棱 GG_1 上，求 l 没入水中部分的长度.

改数字

18、（郝结红改编）如图，水平放置的正四棱柱形玻璃容器 I 和正四棱台形玻璃容器 II 的高均为 27cm，容器 I 的底面对角线 AC 的长为 36cm，容器 II 的两底面对角线 EG， E_1G_1 的长分别为 25cm 和 97cm. 分别在容器 I 和容器 II 中注入水，水深均为 8cm. 现有一根玻璃棒 l，其长度为 39cm.（容器厚度、玻璃棒粗细均忽略不计）

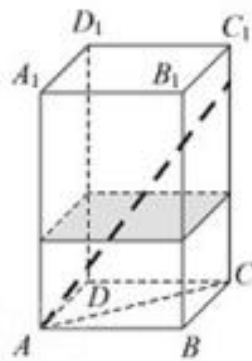
- (1) 将 l 放在容器 I 中，l 的一端置于点 A 处，另一端置于侧棱 CC_1 上，求 l 浸没入水中部分的长度；
- (2) 将 l 放在容器 II 中，l 的一端置于点 E 处，另一端置于侧棱 GG_1 上，求 l 浸没入水中部分的长度.

$$\text{从而 } AP_1 = \frac{P_1Q_1}{\sin \angle MAC} = 20.8$$

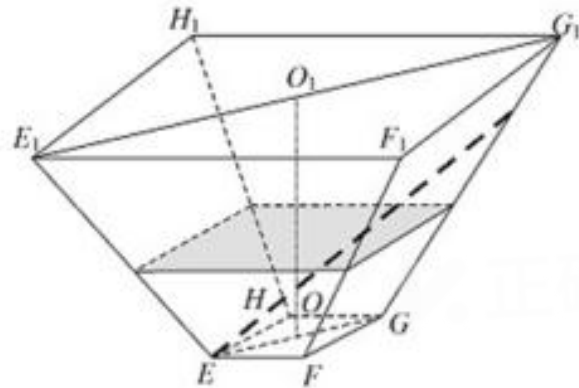
答：玻璃棒 l 没入水中部分的长度为 20.8cm.

$$\text{从而 } EP_2 = \frac{P_2Q_2}{\sin \angle NEG} = 32.5$$

答：玻璃棒 l 没入水中部分的长度为 32.5cm.



容器 I



容器 II

暑假作业 17

- 1、(1) 如图 (1), 长方形 AA_1C_1C 中, $AA_1 = 27$, $AC = 36$, M 为 C_1C 上一点且 $AM = 39$, AM 上一点 P_1 到 AC 的距离 P_1Q_1 为 8, 求 AP_1 的长。

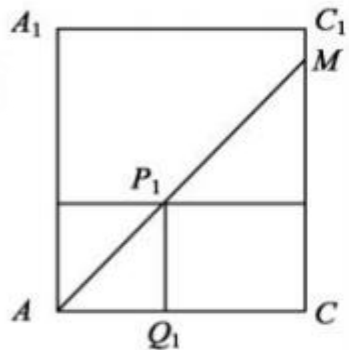


图 (1)

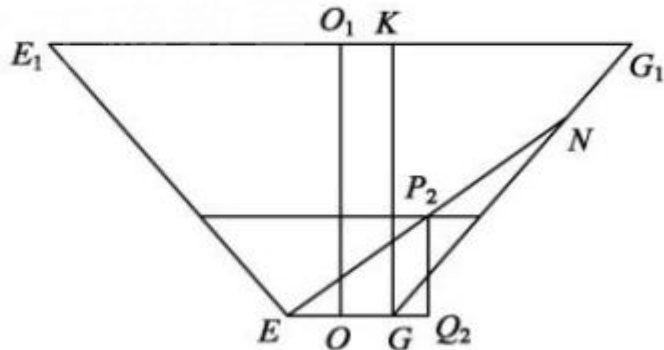


图 (2)

- (2) 如图 (2), 等腰梯形 EE_1G_1G 的高 $KG = 27$, $EG = 25$, $E_1G_1 = 97$, N 为 G_1G 上一点且 $EN = 39$, EN 上一点 P_2 到 EG 的距离 P_2Q_2 为 8, 求 EP_2 的长。

如何解多个三角形 (钱健老师/郝结红老师/张登林老师)



17. (本小题满分 14 分)

调查某地居民每年到商场购物次数 m 与商场面积 S 、到商场距离 d 的关系, 得到关系式 $m = k \times \frac{S}{d^2}$ (k

为常数). 如图, 某投资者计划在与商场 A 相距 10km 的新区新建商场 B , 且商场 B 的面积与商场 A 的面积之比为 λ ($0 < \lambda < 1$). 记“每年居民到商场 A 购物的次数”、“每年居民到商场 B 购物的次数”分别为 m_1 、 m_2 , 称满足 $m_1 < m_2$ 的区域叫做商场 B 相对于 A 的“更强吸引区域”.

(1) 已知 P 与 A 相距 15km, 且 $\angle PAB = 60^\circ$. 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, 居住在 P 点处的居民是否在商场 B 相

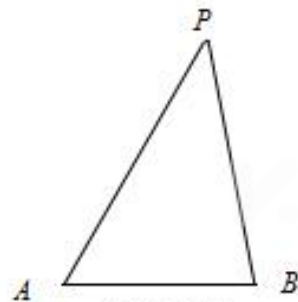
对于 A 的“更强吸引区域”内? 请说明理由;

(2) 若要使与商场 B 相距 2 km 以内的区域(含边界)均为商场 B 相对于 A 的“更强吸引区域”, 求 λ 的取值范围.

17、(郝结红老师改编) 调查某地居民每年到商场购物次数 m 与商场面积 S 、到商场距离 d 的关系, 得到关系式 $m = k \times \frac{S}{d^2}$ (k 为常数). 如图, 某投资者计划在与商场 A 相距 10km 的新区新建商场 B , 且商场 B 的面积与商场 A 的面积之比为 λ ($0 < \lambda < 1$). 记“每年居民到商场 A 购物的次数”、“每年居民到商场 B 购物的次数”分别为 m_1 、 m_2 , 称满足 $m_1 < m_2$ 的区域叫做商场 B 相对于 A 的“更强吸引区域”.

(1) 若要使与商场 B 相距 4 km 以内的区域(含边界)均为商场 B 相对于 A 的“更强吸引区域”, 求 λ 的取值范围.

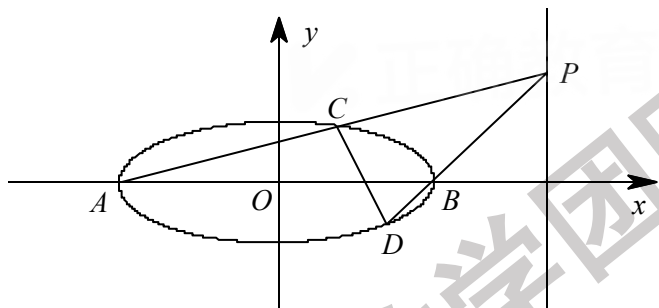
(2) 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, 且 $\angle PAB = 45^\circ$. 居住在马路 AP 边上的居民是否在商场 B 相对于 A 的“更强吸引区域”内? 请说明理由;



(第 17 题)

(2020 全国 1 卷理科 20) 已知 A, B 分别为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 的左, 右顶点,

G 为 E 的上顶点, $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} = 8$, P 为直线 $x=6$ 上的动点, PA 与 E 的另一交点为 C , PB 与 E 的另一交点为 D .

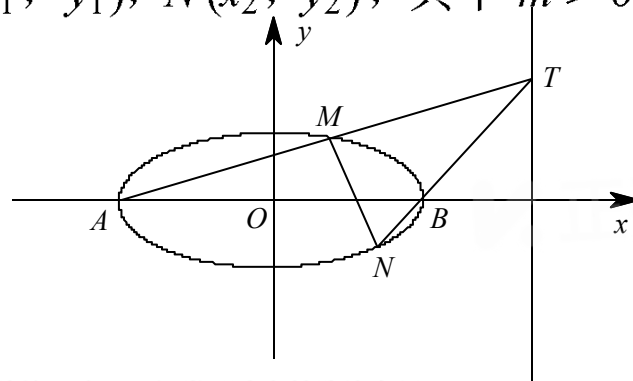


(1) 求 E 的方程;

(2) 证明: 直线 CD 过定点.

2010 年江苏高考第 18 题:

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的左右顶点为 A, B , 右焦点为 F , 设过点 $T(t, m)$ 的直线 TA, TB 与椭圆分别交于点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 其中 $m > 0$, $y_1 > 0, y_2 < 0$.



(3) 设 $t=9$, 求证: 直线 MN 必过 x 轴上的一点.

案例

(原题) 已知 α, β 均为锐角, 且 $\tan(\alpha + \beta) = 2\tan\alpha$,

则 $\tan\beta$ 的最大值是_____.

由 $\tan(\alpha + \beta) = 2\tan\alpha$ 可得 $\sin(\alpha + \beta)\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos(\alpha + \beta)$,

即 $\sin(\alpha + \beta)\cos\alpha - \sin\alpha\cos(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos(\alpha + \beta)$,

于是 $\sin\beta = \sin\alpha\cos(\alpha + \beta)$, 即 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$,

已知 α, β 均为锐角, 且 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, 则 $\tan\beta$ 的最大值是_____.

案例

(原题) 已知向量 a, b 满足 $|a+b| \leq 4$, 则 $a \cdot b$ 的最大值是_____.

方法 1: 将 $|a+b| \leq 4$ 两边同时平方得 $a^2 + b^2 + 2a \cdot b \leq 16$,

注意到 $a^2 + b^2 = |a|^2 + |b|^2 \geq 2|a||b| \geq 2a \cdot b$,

因此 $4a \cdot b \leq 16$ 即 $a \cdot b \leq 4$,

当且仅当 $|a| = |b| = 2$, 且 a, b 同向时取等号,

因此 $a \cdot b$ 的最大值是 4.

方法 2: 极化恒等式 $a \cdot b = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} \leq \frac{(a+b)^2}{4} \leq 4$.

试题 1: 向量 a, b 满足 $|a+b|, |a-b| \in [1, 2]$, 则 $a \cdot b$ 的最小值是_____;

最大值是_____.

$$a \cdot b = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} \leq \frac{2^2 - 1^2}{4} = \frac{3}{4}, \text{ 等号成立 } |a+b|=2, |a-b|=1;$$

$$a \cdot b = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} \geq \frac{1^2 - 2^2}{4} = -\frac{3}{4}, \text{ 等号成立 } |a+b|=1, |a-b|=2;$$

所以 $a \cdot b$ 的最小值是 $-\frac{3}{4}$, 最大值是 $\frac{3}{4}$.

进一步的 $a \cdot b$ 也可以表示为 $a \cdot b = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$ ，由此设计出第 2 道题：

试题 2：向量 a, b 满足 $|a|, |b|, |a+b| \in [1, 2]$ ，则 $a \cdot b$ 的最小值是_____；

最大值是_____。

$$a \cdot b = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} \leq \frac{2^2}{4} = 1, \text{ 等号成立 } a=b, \text{ 且 } |a|=|b|=1;$$

$$a \cdot b = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2} \geq \frac{1^2 - 2^2 - 2^2}{2} = -\frac{7}{2},$$

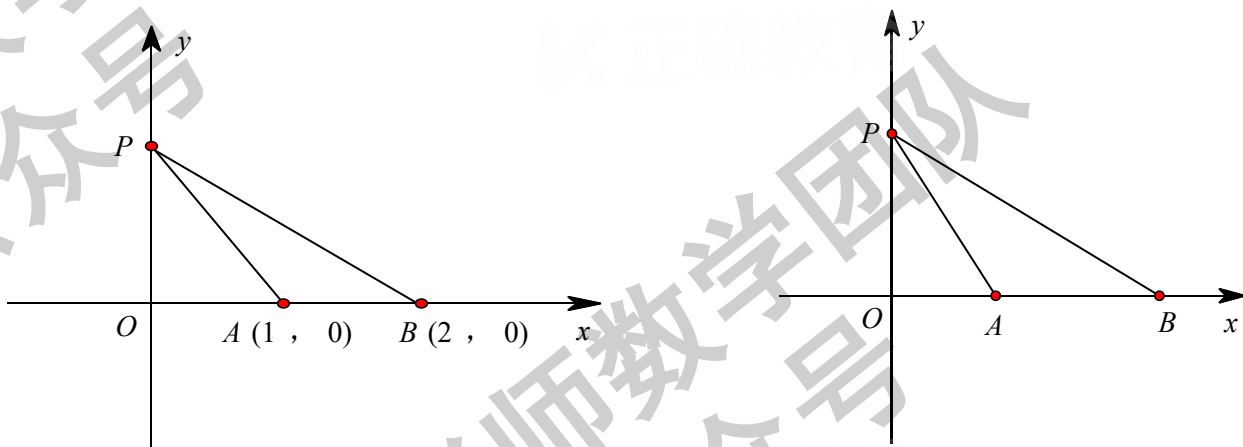
等号成立 $|a|=|b|=2, |a+b|=1$;

所以 $a \cdot b$ 的最小值是 $-\frac{7}{2}$ ，最大值是 1。

案例

(原题) 已知两定点 $A(1, 0)$, $B(2, 0)$, 点 P 是 y 轴正半轴上一动点, 试确

点 P 的坐标, 使得 $\angle APB$ 最大.



将原题中 A, B 为 x 轴正半轴上的两个定点, P 为 y 轴正半轴上一动点, 改为 $A,$

B 为 x 轴正半轴上的两个动点, P 为 y 轴正半轴上的定点, 那么就有以下两种想法:

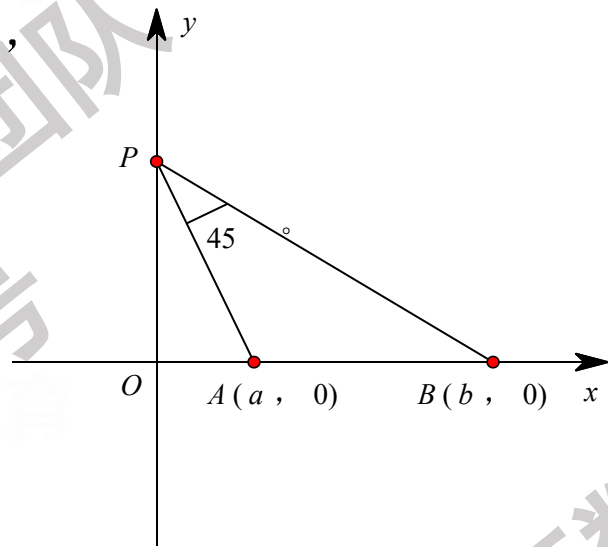
(1) 需要增加什么条件, 使得 $\angle APB$ 有最值;

(2) 需要增加什么条件, 使得 $\angle APB$ 为定值.

不妨先假设 $\angle APB$ 为定角 45° (选择 45° 的目的是因为它的正切值为 1, 计算方

便), 定点 P 的坐标为 $(0, 1)$, $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $b > a > 0$,

则有 $\tan \angle APB = \frac{b-a}{1+ab} = 1$, 即 $b-a=1+ab$,



于是改编后的试题可以这样体现:

已知 $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $b > a > 0$, $b-a=1+ab$, P 为 y 轴正半轴上的定点,

若 $\angle APB$ 为定角, 则点 P 的坐标为_____.

命题的难点：如何将 $b-a=1+ab$ 转换成几何条件.

将 $b-a=1+ab$ 变形为 $b-a=1+\frac{(b+a)^2-(b-a)^2}{4}$,

整理得 $(\frac{b-a}{2}+1)^2=2+(\frac{b+a}{2})^2$,

即 $\frac{b-a}{2}+1=\sqrt{2+(\frac{b+a}{2})^2}$ (*),

上式右边 $\sqrt{2+(\frac{b+a}{2})^2}$ 表示线段 AB ($A(a, 0)$, $B(b, 0)$) 的中点到点 $(0, \sqrt{2})$ 的距离,

左边中的 $\frac{b-a}{2}$ 表示线段 AB 长的一半,

在平面直角坐标系 xOy 中, A, B 为 x 轴正半轴上的两个动点, P 为 y 轴正半轴上的定点, 以 AB 直径的圆与圆 $x^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 1$ 相外切. 若 $\angle APB$ 为定角, 则点 P 的坐标为_____.

在平面直角坐标系 xOy 中, A, B 为 x 正半轴上的两个动点, P (异于原点 O) 为 y 轴上一定点, 以 AB 直径的圆与圆 $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ 相外切. 若 $\angle APB$ 的大小恒为定值, 则线段 OP 的长为_____.

案例

(原题) 已知 a, b 为正实数, 且 $2a+b=1$, 则 $\frac{1}{b}+\frac{b}{a}$ 的最小值是_____.

$$\frac{1}{b}+\frac{b}{a}=1+\frac{2a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 1+2\sqrt{2},$$

已知条件是等式关系, 如果改成不等式 $2a+b\leqslant 1$ 也能做, 依然是“1 的代换”,

$$\frac{1}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 1+\frac{2a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 1+2\sqrt{2},$$

构造函数 $f(x)=2ax^2+bx-1$, 保证 $f(1)\leqslant 0$ 即可, 如何创造条件呢?

$f(1)\leqslant 0$ 也即 1 在不等式 $f(x)\leqslant 0$ 的解集当中,

已知函数 $f(x) = 2ax^2 + bx - 1$ (其中 a, b 为常数, 且均为正数), 不等式 $f(x) < 0$ 的

解集记为 M , 集合 $N = \{x | 1 - t < x < 1 + t, t > 0\}$, 若对于任意正数 t , $M \cap N \neq \emptyset$,

则 $\frac{1}{b} + \frac{b}{a}$ 的最小值是_____.

已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (其中 a, b, c 为常数, 且均为正数), 不等式 $f(x) < 0$

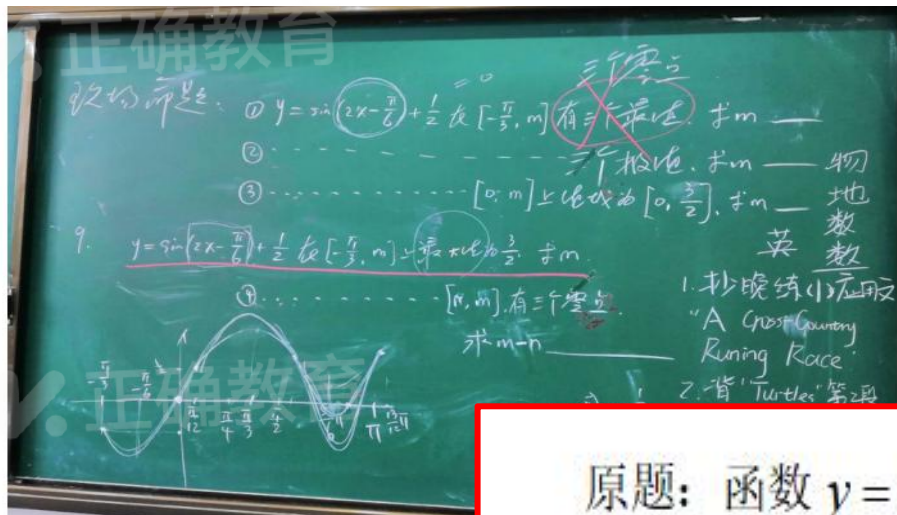
的解集记为 M , 集合 $N = \{x | -2 - t < x < -2 + t, t > 0\}$, 若对于任意正数 t , $M \cap$

$N \neq \emptyset$, 则 $b(\frac{1}{a} + \frac{1}{c})$ 的最小值是_____.

已知函数 $f(x) = ax^2 + x - b$ (a, b 均为正数), 不等式 $f(x) < 0$ 的解集记为 P ,

集合 $Q = \{x | -2 - t < x < -2 + t, t > 0\}$, 若对于任意正数 t , $P \cap Q \neq \emptyset$, 则 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ 的

最大值是_____.



原题：函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, m]$ 上最大值为 $\frac{3}{2}$ ，则 $m \geq \frac{\pi}{3}$ 。

改编：1、函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, m]$ 上有三个零点，则 $\frac{2\pi}{3} \leq m < \pi$

2、函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, m]$ 上有三个极值点，则 $\frac{5\pi}{6} \leq m < \frac{4\pi}{3}$

3、函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}$ 在 $[0, m]$ 上的值域为 $[0, \frac{3}{2}]$ ，则 $\frac{\pi}{3} \leq m \leq \frac{2\pi}{3}$

4、函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}$ 在 $[m, n]$ 上有三个零点，则 $\pi \leq |m - n| < 2\pi$

04

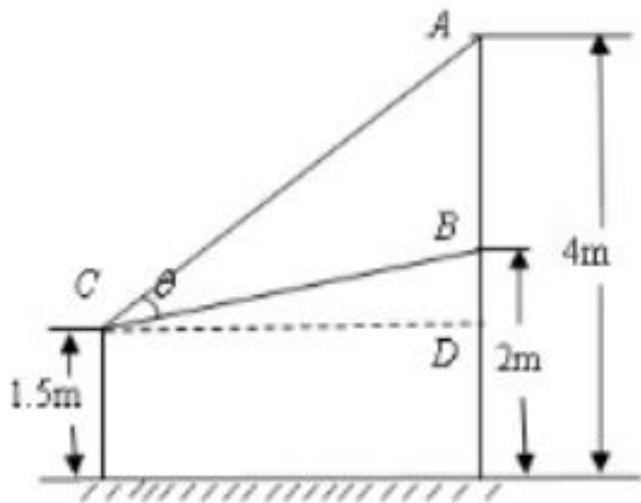
实战经验

一道题，叩开命题组的大门

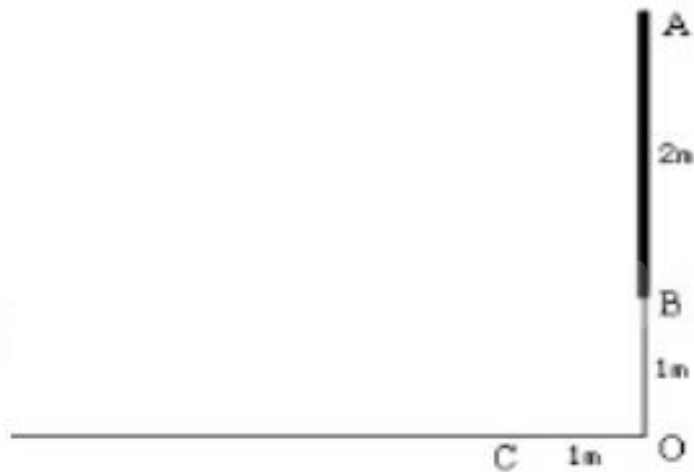
一道应用题的命制与思考

1、经验启发——积累阶段

原题. (课本必修4第106页习题) 如图, 有一壁画, 最高点A处离地面4米, 最低点B处离地面2米, 若从离地高1.5米的C处观赏它, 则离墙多远时, 视角 θ 最大?



启发 1: 国庆长假期间小明去参观画展, 为了保护壁画, 在壁画前方用垂直于地面的透明玻璃墙与观众隔开, 小明在一幅壁画正前方驻足观看。下图是小明观看该壁画的纵截面示意图, 已知壁画高度 AB 是 2 米, 壁画底端与地面的距离 BO 是 1 米, 玻璃墙与壁画之间的距离 OC 是 1 米。若小明身高为 _____, 他在壁画正前方 x 米处观看。问 x 为多少时, 小明观看这幅画最清楚? (视角 θ 最大)



启发 2: 12 年高考题

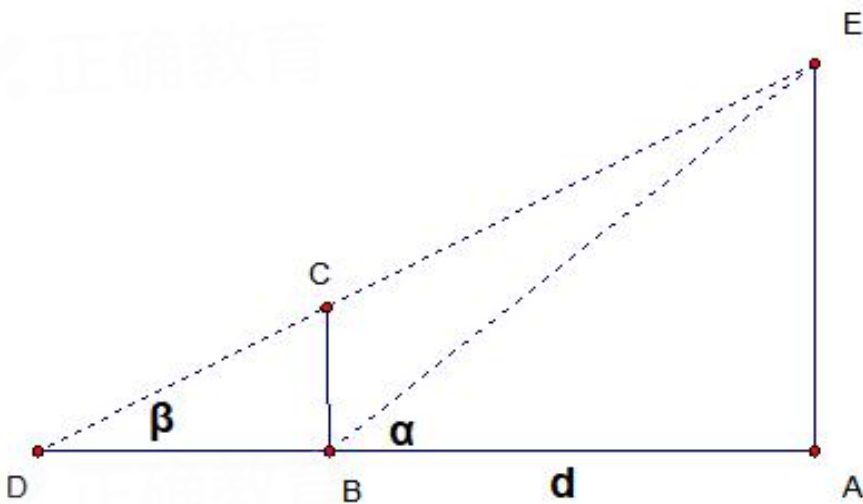
2、寻找题根——研究阶段

如图，三角形 ABE 和三角形 ADE 均为直角三角形，AE 为 H，BC 为 h，仰角 $\angle ABE = \alpha$ ， $\angle ADE = \beta$ ，AB 为 d，BD 为 m。

(1) 已知 $\tan \alpha = 1.8$ ， $\tan \beta = 1.2$ ， $h = 2$ ，求 H。 $H = \frac{h \tan \alpha}{\tan \alpha - \tan \beta}$

(2) 已知 $m = 20$ ， $d = 10$ ， $\alpha - \beta = 30^\circ$ ，求 H。

(3) 已知 $H = 25$ ， $h = 9$ ，问 d 为多少时， $\alpha - \beta$ 最大。 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{h}{d + \frac{H(H-h)}{d}}$

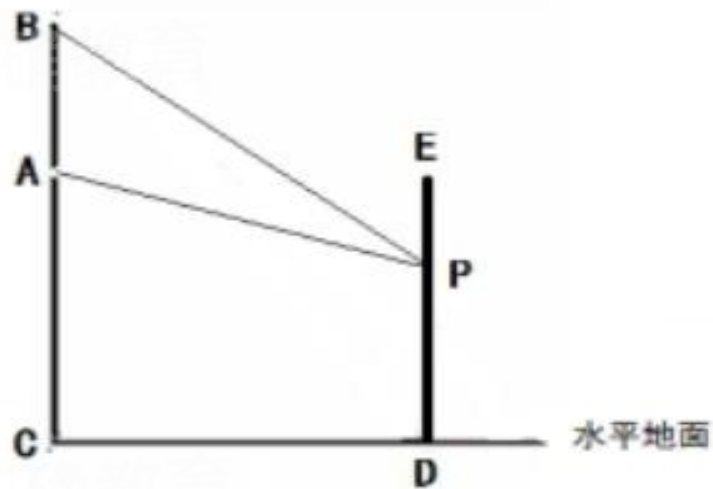


3、赋予背景——加工阶段

最终稿：南京市江北新区计划在一个竖直长度为 20 米的瀑布 AB 正前方修建一座观光电梯 DE 。如图所示，瀑布底部 A 距离水平地面的高度 AC 为 60 米，电梯上设有一个安全拍照口 P ， P 上升的最大高度为 60 米。设 P 距离水平地面的高度为 a 米， P 处拍照瀑布的视角 $\angle BPA$ 为 θ 。摄影爱好者发现，要使照片清晰，视角 θ 不能小于 30° 。

(1) 当 $a=50$ 米时，视角 θ 恰好为 30° ，求电梯和山脚的水平距离 CD 。

(2) 要使电梯拍照口 P 的高度 a 在 52 米及以上时，拍出的照片均清晰，请求出电梯和山脚的水平距离 CD 的取值范围。



设计意图:

- (1)
- (2) 考查学生的求解策略, 涉及直角边选用正切而不是余弦;
- (3) 双变量问题的处理策略
- (4) 为能力强的学生提供更多思考空间: 圆的方程角度。

测试结果

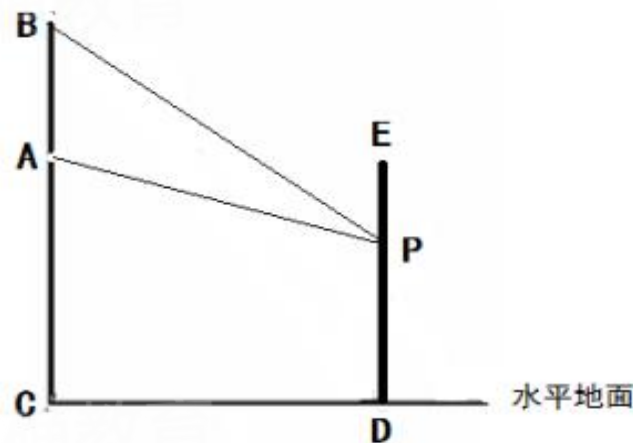
试题分析											
题号	小题号	答案	人数	最大值	最小值	平均分	标准差	得分率	满分率	零分率	难度
T18	1		502	6	0	3.97	2.68	66.2	59.6	28.3	0.66
T18	2		502	10	0	1.22	2.72	12.2	5	77.1	0.12
T18			502	16	0	5.2	4.36	32.5	4.4	28.1	0.32

3、纠错练习：

10.南京市江北新区计划在一个竖直长度为 20 米的瀑布 AB 正前方铺设一段铁轨，铁轨上有一座移动观光电梯 DE 。如图所示，瀑布底部 A 距离水平地面的高度 AC 为 60 米，电梯上预设置一个安全拍照口 P ， P 上升的最大高度为 60 米。设 P 距离水平地面的高度为 a 米， P 处拍照瀑布的视角 $\angle BPA$ 为 θ 。摄影爱好者发现，要使照片清晰，视角 θ 不能小于 30° 。

(1) 当 $a=50$ 米时，视角 θ 的正切值恰好为 $\frac{1}{2}$ ，求电梯和山脚的水平距离 CD 。

(2) 要使 CD 在 $[20, 10\sqrt{3} + 10\sqrt{2}]$ 之间都能拍出清晰的照片，请问 a 的取值范围。



案例

$$2^n > 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1, n \in \mathbb{N}^*.$$

$$2^n - 2^{n-1} - 2^{n-2} - \cdots - 2 - 1 > 0; -2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 < 0.$$

我们研究在 $2^n, 2^{n-1}, 2^{n-2}, \dots, 2, 1$ 各项前任意添加“+”或“-”后的结果情况.

由第一个式子可以知道, 在 2^n 前面添加正号, 其和必为正数;

由第一个式子可以知道, 在 2^n 前面添加负号, 其和必为负数.

因此如果存在两种不同的添加方式使得和相等, 那么 2^n 前面添加的符号必定相同,

去掉 2^n 这一项, 问题转化为在 $2^{n-1}, 2^{n-2}, \dots, 2, 1$ 前添加“+”或“-”号其和

仍相等, 和上面的分析一样: 2^{n-1} 前面添加的符号必定相同,

如此下去, 可以得到 $2^n, 2^{n-1}, 2^{n-2}, \dots, 2, 1$ 各项前添加的符号必定是一致的,

也就是说, 如果添加“+”或“-”后, 和相等, 则每一项必相等.

根据以上分析，我们可以编拟出这样一题：

已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_2=3$ ， $S_3=7$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式； $a_n=2^{n-1}$

(2) 已知数列 $\{b_n\}$ ， $\{c_n\}$ 满足 $|b_n|=|c_n|=a_n$ ，若 $b_1+b_2+\cdots+b_{100}=c_1+c_2+\cdots+c_{100}$ ，

求证：任意正整数 $k(1\leq k\leq 100)$ ， $b_k=c_k$ 。

注重积累，每一个小的基本事实都是原创试题的素材，对素材采取有效的改造、变形、嫁接等手段，并能结合想要考查的知识点、思想方法、能力要求等，原创出适合考查学生的试题。

05

情境创设

数学加情境，还是情境找数学

原创：来自一道物理题，除去电场磁场背景

(物理选修3-1多选题)
 已知 $OD: x^2 + y^2 = 1$, $OC: (x-m)^2 + y^2 = 4$, 两圆相切于
 A、B 两点. OC 与 y 轴交于点 D , 且点 D 在 OD 内部, 求
 AD 的最小值?

解: $\triangle AOC$ 中, $\frac{2}{\sin \angle O} = \frac{1}{\sin \angle C}$
 $\angle O$ 最大 $\Rightarrow \angle C$ 最大
 $\Rightarrow$ 弦长 AD 最大
 故当 A 点在 $(1,0)$ 处时, AD 最大为 $AD=1$.

高三政治一轮复习用书

专题二 推进经济高质量发展

项目	出口			实际使用 外商直接 投资	对外非金 融类直接 投资	对外承 包工程
	加工 贸易	高新技 术产品	服务			
金额 (亿元)	52 676	49 374	17 658	1 349.7	7 974	11 186
同比 增长	2.5%	9.3%	14.6%	3%	-1.6%	-1.7%

①我国对外贸易结构更加趋于优化 ✓
 ②我国开放型经济水平提高,已经形成了出口竞争新优势
 ③我国抵御国际经济风险的能力不断增强
 ④我国对外直接投资和承包工程的压力加大 ✓
 A. ①③ B. ②③ C. ②④ D. ①④
 答案 D
 解析 ②错在“已经形成”上。题干没有涉及抵御国际经济风险的能力不断增强,③不选。

学生用书 第21页

大题突破 主观题对发展更高层次的开放型经济的考查

①坚持以人为本,创新发展理念
 ②改善生态环境,提高人民生活质量
 ③消除城乡收入差距,实现共同富裕
 ④以生态建设为中心,促进可持续发展
 A. ①② B. ①④ C. ②③ D. ②④

7. 下图反映了1995年到2019年我国服务业增加值占GDP比重的变化情况。

年份	比重 (%)
1995年	~35.00%
2000年	~40.00%
2005年	~42.00%
2010年	~45.00%
2015年	~48.00%
2019年	~54.00%

注:近年来,我国服务业中的现代服务业(如信息技术产业等)的增速高于服务业整体增速。

上述变化表明我国 ()
 ①产业结构不断优化,经济发展质量有所提升
 ②服务业发展势头良好,现代服务业就业前景广阔
 ③各产业发展不平衡,第一、二产业产值出现下降趋势
 ④虚拟经济挤压实体经济,增强发展协调性任务艰巨
 A. ①② B. ①④ C. ②③ D. ③④

8. 2019年11月5日,第二届中国国际进口博览会在上海开

正确教育

10. 这个声音能传到多远?

声音有强有弱,强烈的声音响得“震耳欲聋”,微弱的声音轻得“细不可闻。”

声音的强弱用声波的能流密度(单位时间有多少能量垂直通过单位面积)来计算,叫做声强。

人耳刚能听到的声音的声强是

$$I_0 = 10^{-9} \text{ 尔格/厘米}^2 \cdot \text{秒}.$$

为了表示其他任意一个声音的声强 I , 我们一般不是直接写出它的能流密度,而是用这个声强 I 与 I_0 的比的常用对数,下同)的 10 倍来表示,叫做这个声强 I 的声强单位是“分贝”。就是说,一个声强 I 的声强级是

$$10 \lg \frac{I}{I_0} \text{ (分贝)}.$$

我们知道,声音传播时,在某处听到的声强与该处离声源的距离平方成反比。

你能回答下面的问题吗?

如果在离声源 15 米的地方,听到一个声音的声强级是 20 分贝,那么离声源多远的地方这个声音就听不到了呢?就是说,这个声音能传到多远呢?

6. 声音的强弱可以用声波的能流密度来计算,叫做声强. 通常人耳能听到声音的最小声强为 $I_0 = 10^{-12}$ (瓦/米²). 对于一个声音的声强 I , 用声强 I 与 I_0 比值的常用对数的 10 倍表示声强 I 的声强级, 单位是“分贝”, 即声强 I 的声强级是 $10 \lg \frac{I}{I_0}$ (分贝). 声音传播时, 在某处听到的声强 I 与该处到声源的距离 s 的平方成反比, 即 $I = \frac{k}{s^2}$ (k 为常数). 若在距离声源 15 米的地方, 听到声音的声强级是 20 分贝, 则能听到该声音(即声强不小于 I_0)的位置到声源的最大距离为
- A. 100 米 B. 150 米 C. 200 米 D. $15\sqrt{10}$ 米

2020 年，面对突如其来的新冠肺炎疫情冲击，我国各地区各部门统筹疫情防控和经济社会发展取得显著成效，下表显示的是 2020 年 4 月份到 12 月份中国社会消费品零售总额数据，其中同比增长率是指和去年同期相比的增长率，环比增长率是指与上月份相比的增长率，则下列说法正确的是

中国社会消费品零售总额

月 份	当月（亿元）	同比增长
2020 年 04 月份	28178	-7.50%
2020 年 05 月份	31973	-2.80%
2020 年 06 月份	33526	-1.80%
2020 年 07 月份	32203	-1.10%
2020 年 08 月份	33571	0.50%
2020 年 09 月份	35295	3.30%
2020 年 10 月份	38576	4.30%
2020 年 11 月份	39514	5.00%
2020 年 12 月份	40566	4.60%

- A、2020 年 4 月份到 12 月份社会消费品零售总额逐月上升
 B、相比 2019 年同期，表中 2020 年 11 月份同比增长率最大
 C、2020 年 4 月份到 12 月份，5 月份环比增长率最大
 D、第 4 季度的月消费品零售总额相对于第 2 季度的月消费品零售总额，方差更小

答案：BCD

9. 面对新冠肺炎疫情的冲击，我国各地区各部门统筹疫情防控和经济社会发展均取得显著成效，下表显示的是 2020 年 4 月份到 12 月份中国社会消费品零售总额数据，其中同比增长率是指和去年同期相比的增长率，环比增长率是指与上月份相比的增长率，则下列说法正确的是

中国社会消费品零售总额

月 份	零售总额（亿元）	同比增长	环比增长	累计（亿元）
4	28178	-7.50%	6.53%	106758
5	31973	-2.80%	13.47%	138730
6	33526	-1.80%	4.86%	172256
7	32203	-1.10%	-3.95%	204459
8	33571	0.50%	4.25%	238029
9	35295	3.30%	5.14%	273324
10	38576	4.30%	9.30%	311901
11	39514	5.00%	2.43%	351415
12	40566	4.60%	2.66%	391981

- A. 2020 年 4 月份到 12 月份，社会消费品零售总额逐月上升
 B. 2020 年 4 月份到 12 月份，11 月份同比增长率最大
 C. 2020 年 4 月份到 12 月份，5 月份环比增长率最大
 D. 第 4 季度的月消费品零售总额相比第 2 季度的月消费品零售总额，方差更小

三模命题

要求：概率统计
20大题、频率分
布直方图、正态
分布、二项分布、
体育背景、数据
处理

想法来源：

3 比赛的平均场数的确定

例4 设篮球队A与B进行比赛,每场比赛均有一队获胜,若有一队获胜4场,则比赛宣告结束.假定A、B在每场中胜的概率均为 $\frac{1}{2}$,那么比赛平均需要几场才能结束?

解 理解一队获胜4场,比赛平均需要场数就是求以“场数为随机变量”的数学期望.设场数为随机变量 ξ ,

$$P(\xi = 4) = 2 \times C_4^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{2}{16},$$

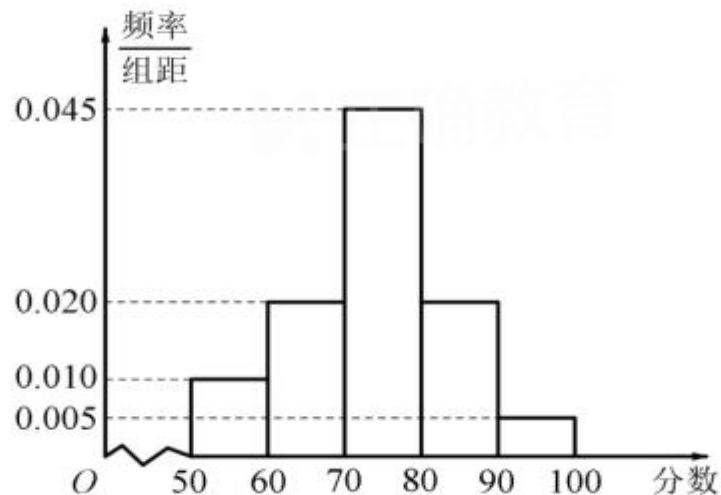
$$P(\xi = 5) = 2C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{16},$$

$$P(\xi = 6) = 2 \times C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16},$$

$$P(\xi = 7) = 2C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}.$$

则结束比赛的平均场数 $E\xi = 5.8125$,由于两队实力相当,故平均要进行六场比赛才能结束.

乒乓球作为我们的国球，一直深受大家的喜爱。如今，越来越多的同学加入乒乓球学习社团，感受到了乒乓球运动带来的健康和快乐。某乒乓球教练为了解某同学近期的训练效果，随机记录了该同学 20 局接球训练成绩，每局训练时教练连续发 100 个球，该同学成功接球得 1 分，没接到球或者推送不到位不得分，且每局训练相互独立，得到如图所示的频率分布直方图：



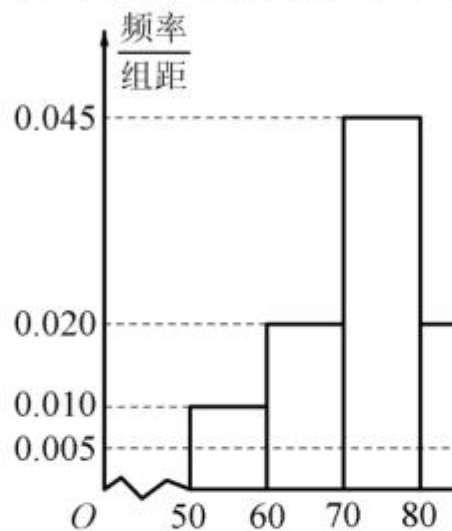
(1) 同一组数据用该区间的中点值作代表，求该同学 20 局接球训练成绩的样本平均数 $\bar{x}$ 和样本方差 s^2 。由反复统计可以认为，该同学的接球训练成绩 X 近似地服从正态分布 $N(\mu, 100)$ ，其中 μ 近似为样本平均数 $\bar{x}$ ，求 $P(54 < X < 64)$ ；

(2) 教练为了提高该同学学习乒乓球的兴趣，规定：每次训练最后一段时间，教练与他进行比赛，每局教练连续发 100 个球，该同学成功接球达到 80 分为获胜，否则算教练获胜；每局比赛均有一人获胜，若有人获胜 3 局，则比赛宣告结束；并且每局比赛均奖励该同学 100 积分，按照图中该同学近期获胜的频率作为概率，请问该同学近期平均每次训练能获得多少积分？

(3) 参考数据：若随机变量 $\zeta \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - \sigma < \zeta \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$ ，
 $P(\mu - 2\sigma < \zeta \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$ ， $P(\mu - 3\sigma < \zeta \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$ 。

20. (本小题满分 12 分)

某乒乓球教练为了解某同学近期的训练效果, 随机记录了该同学 40 局接球训练成绩, 每局训练时教练连续发 100 个球, 该同学成功接球得 1 分, 没接到球或者推送不到位不得分, 且每局训练相互独立, 得到如图所示的频率分布直方图:



(1) 同一组数据用该区间的中点值作代表, 求该同学的接球训练成绩中 μ 近似为样本平均数 $\bar{x}$, 求 $P(54 < X < 64)$;

(2) 教练为了提高该同学学习乒乓球的兴趣, 他进行比赛, 每局教练连续发 100 个球, 该同学成功接球得 1 分, 没接到球或者推送不到位不得分; 每局比赛均有一人获胜, 若有人获胜 3 局, 则比赛结束; 若无人获胜 3 局, 则继续比赛, 请问平均比赛需要几局才能结束?

参考数据: 若随机变量 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < \xi \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma < \xi \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$, $P(\mu - 3\sigma < \xi \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$.

解: (1) $\bar{x} = 55 \times 0.1 + 65 \times 0.2 + 75 \times 0.45 + 85 \times 0.2 + 95 \times 0.05 = 74$,2 分

所以 $\mu = 74$, 由 $x \sim N(\mu, 100)$ 得

$$P(54 < X < 64) = P(\mu - 2\sigma < \xi \leq \mu - \sigma) = \frac{0.9545 - 0.6827}{2} = 0.1359 \dots \dots \dots 4 \text{ 分}$$

(2) 设“该同学每局获胜”为事件 A, 由频率分布直方图知, $P(A) = \frac{1}{4}$.

设比赛局数为随机变量 Y, 则 Y 的可能取值为 3, 4, 5.

$$P(Y=3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{7}{16} \dots \dots \dots 6 \text{ 分}$$

$$P(Y=4) = C_3^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + C_3^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{45}{128} \dots \dots \dots 8 \text{ 分}$$

$$P(Y=5) = C_4^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} + C_4^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} = \frac{27}{128} \dots \dots \dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{数学期望 } E(Y) = 3 \times \frac{7}{16} + 4 \times \frac{45}{128} + 5 \times \frac{27}{128} = \frac{483}{128} \approx 3.77$$

答: 平均比赛需要 3.77 局才能结束.12 分

20. (本小题满分 12 分)

某乒乓球教练为了解某同学近期的训练效果，随机记录了该同学 40 局接球训练成绩，每局训练时教练连续发 100 个球，该同学接球成功得 1 分，否则不得分，且每局训练结果相互独立，得到如图所示的频率分布直方图.

(1) 若同一组数据用该区间的中点值作代表，

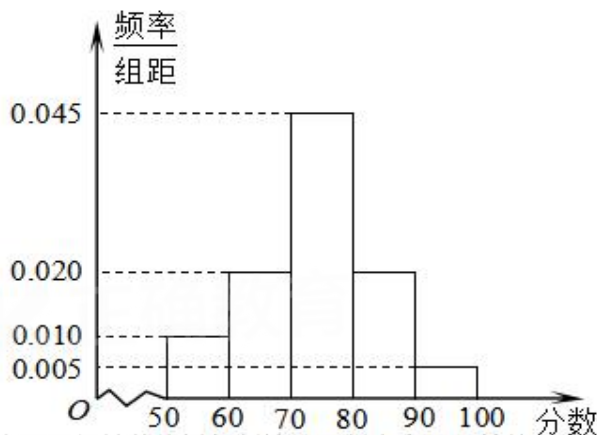
①求该同学 40 局接球训练成绩的样本平均数 $\bar{x}$ ；

②若该同学的接球训练成绩 X 近似地服从正态分布 $N(\mu, 100)$ ，其中 μ 近似为样本平均数 $\bar{x}$ ，求 $P(54 < X < 64)$ 的值；

(2) 为了提高该同学的训练兴趣，教练与他进行比赛，一局比赛中教练连续发 100 个球，该同学得分达到 80 分为获胜，否则教练获胜. 若有人获胜达 3 局，则比赛结束，记比赛的局数为 Y . 以频率分布直方图中该同学获胜的频率作为概率，求 $E(Y)$.

参考数据：若随机变量 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - \sigma < \xi < \mu + \sigma) \approx 0.6827$ ，

$P(\mu - 2\sigma < \xi < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$ ， $P(\mu - 3\sigma < \xi < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$.



[发布答案与解析](#)

06

真题研究

研究真题，怎么都不为过

(2021 全国 1 卷 1) 设集合 $A = \{x | -2 < x < 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$

- A. $\{2\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{3, 4\}$ D. $\{2, 3, 4\}$

(2022 全国 1 卷 1) 若集合 $M = \{x | \sqrt{x} < 4\}$, $N = \{x | 3x \geq 1\}$, 则 $M \cap N = (\quad)$

- A. $\{x | 0 \leq x < 2\}$ B. $\{x | \frac{1}{3} \leq x < 2\}$ C. $\{x | 3 \leq x < 16\}$ D. $\{x | \frac{1}{3} \leq x < 16\}$

(2023 全国 1 卷 1) 已知集合 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $N = \{x | x^2 - x - 6 \geq 0\}$, 则 $M \cap N =$

- A. $\{-2, -1, 0, 1\}$ B. $\{0, 1, 2\}$
C. $\{-2\}$ D. $\{2\}$

(2024 新课标 I 卷 1) 已知集合 $A = \{x | -5 < x^3 < 5\}$, $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{-1, 0\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{-3, -1, 0\}$ D. $\{-1, 0, 2\}$

研究真题：探索新高考命题改革方向之——①试卷结构

研究真题：探索新高考命题改革方向之——②位置变化

研究真题：探索新高考命题改革方向之——③内容选择

研究真题：探索新高考命题改革方向之——④情境创新

研究真题：探索新高考命题改革方向之——⑤方法变化

研究真题：探索新高考命题改革方向之——⑥回归课本

研究真题：探索新高考命题改革方向之——⑦很少给图

研究真题：探索新高考命题改革方向之——⑧优化运算

研究真题：探索新高考命题改革方向之——⑨突出思维

研究真题：探索新高考命题改革方向之——⑩试卷对比

研究真题：探索新高考命题改革方向之——⑪重要文献

(2024新 I —11)

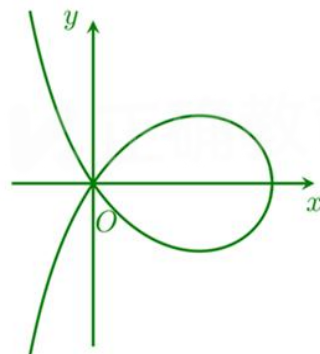
. 造型  可以看作图中的曲线 C 的一部分, 已知 C 过坐标原点 O , 且 C 上的点满足横坐标大于 -2 , 到点 $F(2, 0)$ 的距离与到定直线 $x=a(a<0)$ 的距离之积为 4 , 则

A. $a=-2$

B. 点 $(2\sqrt{2}, 0)$ 在 C 上

C. C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1

D. 当点 (x_0, y_0) 在 C 上时, $y_0 \leq \frac{4}{x_0+2}$

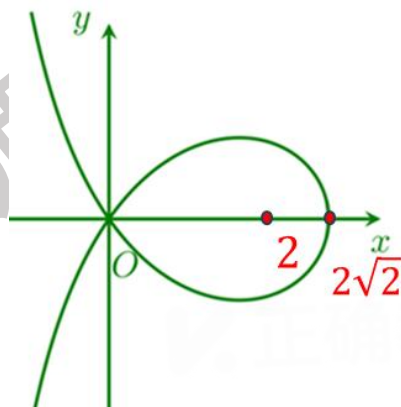


A. 因为 O 在 C 上, 故 O 到定直线 $x=a$ 的距离为 $-a$, 又 $|OF|=2$, 所以 $-2a=4$, $a=-2$

$$|x-a|\sqrt{(x-2)^2+y^2}=4$$

B. $(x+2)\sqrt{(x-2)^2+y^2}=4$, 将 $(2\sqrt{2}, 0)$ 代入, 故正确

$$D. \quad y^2 = \frac{16}{(x+2)^2} - (x-2)^2 \leq \frac{16}{(x+2)^2}, \text{ 故 } -\frac{4}{x+2} \leq y \leq \frac{4}{x+2}$$



核心素养	直观想象、逻辑推理、数学建模、数学运算
数学方法	回到定义、解析几何的一般思想方法
数学知识	求轨迹方程、点在曲线上、函数观点导数工具、几何性质
爱因斯坦	教育就是当一个人忘记了在学校所学的一切东西之后还留下来的

C. ① 用尺子量? $y_{\max} \approx 1.0388$

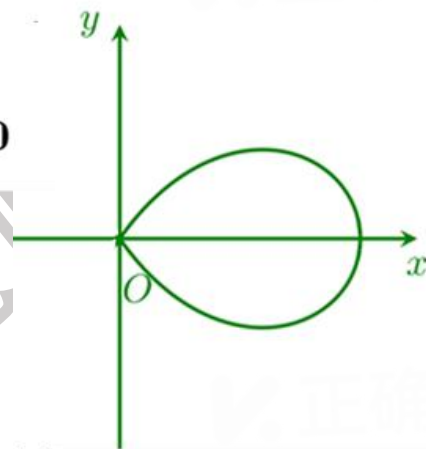
② 图形分析, (2, 1)处于递减段, 可猜得

③ 论证 $(x+2)\sqrt{(x-2)^2+y^2}=4$, $y^2=\frac{16}{(x+2)^2}-(x-2)^2$,

令 $f(x)=\frac{16}{(x+2)^2}-(x-2)^2$, $f'(x)=-\frac{32}{(x+2)^3}-2(x-2)$, $f(2)=1$, $f'(2)=-\frac{1}{2}<0$

④ 选择数代入 $y^2|_{x=\frac{3}{2}}=\frac{16}{(\frac{3}{2}+2)^2}-(\frac{3}{2}-2)^2=\frac{207}{196}$

⑤ 求极值点 $x=\frac{2(\sqrt[3]{3\sqrt{33}+19}+\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}-2)}{3} \approx 1.67857351$



十年 高考 频点

频点1——三角函数的概念

频点2——同角三角函数的基本关系式

频点3——三角函数的图象与性质

3.1 图象判断

3.2 单调性

3.3 奇偶性

3.4 周期性

3.5 图象变换

3.6 零点、极值、最值

频点4——两角和(差)的正弦、余弦及正切

频点5——二倍角的正弦、余弦及正切

频点6——辅助角公式

频点7——通过解方程求三角函数值

频点8——正弦定理、余弦定理及其应用

8.1 解三角形

8.1.1 求长度

8.1.2 求角度或三角函数值

8.1.3 求周长

8.1.4 给面积或者求面积

8.1.5 求范围或最值

8.2 解三角形应用题

1、分类汇编

2、做三遍

新高考综合改革的路向分析——

试卷结构出新
题目位置变化
内容选择考查
思路指向多维
难度飘忽不定
创设情境新颖
已有经验失灵
刷题难以奏效

.....



没有套路，就是最大套路
没有模式，就是最大模式
没有规律，就是最大规律
不去押题，就是最大押题
回归本源，就是最大原则
发展素养，就是最大课题

.....

表 1 2025 年 I 卷试题评价表

题号	题型				赋分	知识点数	问题理解			解题步数	步间跨度			难易程度		
	单选题	多选题	填空题	解答题			易	中	难		小	中	大	易	中	难
1	✓				5	4(复数乘法、分配律、 i 平方、虚部)	✓			3	✓			✓		
2	✓				5	3(用描述法表示集合、集合的元素个数、补集运算)	✓			3	✓			✓		
3	✓				5	3(双曲线的基本量、双曲线的实轴与虚轴、双曲线的离心率)	✓			7	✓			✓		
4	✓				5	2($y = \tan x$ 的对称中心、不等式求解范围)	✓			5		✓			✓	
5	✓				5	3(函数的周期性、函数的奇偶性、根据函数性质求函数值)	✓			7	✓				✓	
6	✓				5	6(向量加法的三角形法则、坐标表示、差运算、模长的意义、公式、表格数据分析)			✓	25	✓				✓	
7	✓				5	5(圆的方程、点到直线的距离公式、直线与圆的位置关系、作示意图、平移)		✓		18			✓			✓
8	✓				5	4(对数运算、指数运算、参数搭桥, 比较大小)		✓		35			✓			✓
9		✓			6	7(线线、线面的平行与垂直的判定, 向量的平行与垂直, 法向量)	✓			61	✓				✓	

题号	题型				赋分	知识点数	问题理解			解题步数	步间跨度			难易程度		
	单选题	多选题	填空题	解答题			易	中	难		小	中	大	易	中	难
10		✓			6	3(抛物线的焦点与准线、抛物线的焦半径公式、三角形的面积公式)		✓		64		✓			✓	
11		✓			6	7(三角函数二倍角公式、三角函数的性质、正弦定理、余弦定理、面积公式、和差化积、勾股定理)		✓		110			✓			✓
12			✓		5	5(切线、两种函数求导、导数的几何意义、解方程)	✓			13	✓			✓		
13			✓		5	3(等比数列通项公式、前 n 项和公式、等比数列的等分性)	✓			18	✓			✓		
14			✓		5	4(随机变量、数学期望、古典概型、期望的性质计算)			✓	18			✓		✓	
15				✓	13	2(古典概型、独立性检验)		✓		14		✓		✓		
16				✓	15	7(等差数列与等比数列的定义、通项公式, 及前 n 项和公式、错位相减法、函数求导)	✓			50		✓			✓	
17				✓	15	11(面面垂直的判定与性质、外接球球心位置、外接圆圆心、中垂线方程、斜率、异面直线夹角、空间直角坐标系、两点间的距离公式、向量的坐标表示及其夹角公式)		✓		105			✓		✓	
18				✓	17	14(椭圆的方程、离心率、顶点、长轴、短轴、焦距及其公式、动点坐标求解, 向量的坐标表示, 模长公式, 斜率公式, 动点轨迹方程的求解, 二次不等式, 最大距离)		✓		78		✓			✓	
19				✓	17	9(函数求导、单调性、周期、最值、极值、参数值分类讨论、不等式恒成立、反证法、下确界)			✓	83			✓			✓

16. (15分) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, $\frac{a_{n+1}}{n} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$.

(1) 证明: 数列 $\{na_n\}$ 是等差数列;

(2) 给定正整数 m , 设函数 $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$, 求 $f'(-2)$.

① $1a_1=3$ $2a_2=4$ $3a_3=5$... $\therefore \{na_n\}$ 为等差数列
 $a_1=3$ $a_2=2$ $a_3=\frac{5}{3}$... $\therefore \{na_n\}$ 为等差数列

② $(n+1)(a_{n+1}-1) = n(a_n-1) \Rightarrow \{n(a_n-1)\}$ 为常数列
 $n(a_n-1) = 1(a_1-1) = 2$
 $na_n = 2+n \therefore \{na_n\}$ 为等差数列

如有归纳, 必须归纳出 na_n 的规律,
 不能归纳 a_n 不得分

证明一大通, 只找关键步骤, 其余步骤
 有错扣分, 无错不扣分

$$(2) 1a_1 = 3, \therefore na_n = 3 + (n-1) \cdot 1 = n+2, \therefore a_n = \frac{n+2}{n}$$

.....2'

2'通项

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + ma_mx^{m-1}$$

.....4'

2'求导

$$f'(x) = 3 + 4x + 5x^2 + \cdots + (m+2)x^{m-1} \text{ ①,}$$

.....5'

1'代入

$$xf'(x) = 3x + 4x^2 + \cdots + (m+1)x^{m-1} + (m+2)x^m \text{ ②,}$$

.....8'

3'错位

$$\text{①} - \text{②}, (1-x)f'(x) = 3 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1} - (m+2)x^m, x = -2$$

.....9'

1'代入

$$3f'(-2) = 3 + \frac{-2[1 - (-2)^{m-1}]}{1 - (-2)} - (m+2)(-2)^m$$

$$3f'(-2) = 3 + \frac{-2 - (-2)^m}{3} - (m+2)(-2)^m = \frac{7}{3} - \left(m + \frac{7}{3}\right)(-2)^m$$

$$f'(-2) = \frac{7}{9} - \left(\frac{m}{3} + \frac{7}{9}\right)(-2)^m.$$

.....10'

1'化简

07

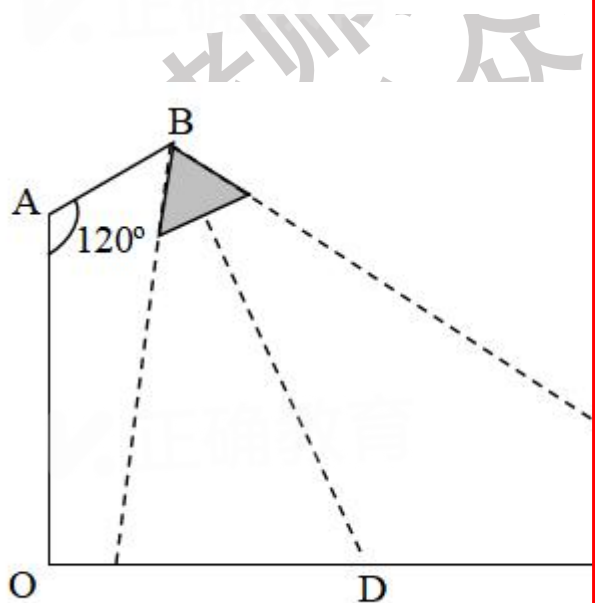
有章可循

从“猜中”高考题，看命题思路

8. (课本习题改编) 在路边安装路灯, 灯柱 OA 的高为 h , 路宽 OC 为 23 米, 灯杆 AB 的长为 2.5 米, 且与灯柱 OA 成 120° 角。路灯采用锥形灯罩, 灯罩轴线 BD 与灯杆 AB 垂直。请你建立适当的直角坐标系, 解决以下问题:

(1) 当 $h=10$ 米时, 求灯罩轴

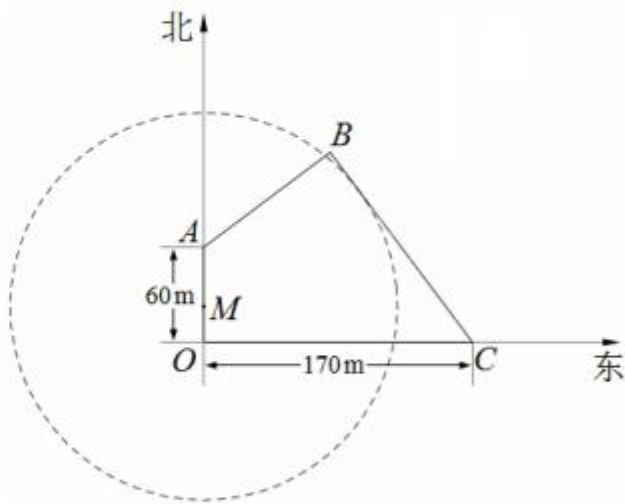
(2) 当 h 为多少米时, 灯罩



18. (本小题满分 16 分) 如图, 为保护河上古桥 OA , 规划建一座新桥 BC , 同时设立一个圆形保护区, 规划要求: 新桥 BC 与河岸 AB 垂直; 保护区的边界为圆心 M 在线段 OA 上并与 BC 相切的圆, 且古桥两端 O 和 A 到该圆上任意一点的距离均不少于 80m. 经测量, 点 A 位于点 O 正北方向 60m 处, 点 C 位于点 O 正东方向 170m 处 (OC 为河岸), $\tan \angle BCO = \frac{4}{3}$.

(1) 求新桥 BC 的长;

(2) 当 OM 多长时, 圆形保护区的面积最大?



解: 本小题主要考查直线方程、直线与圆的位置关系和解三角形等基础知识, 考查建立数学模型及运用数学知识解决实际问题的能力.

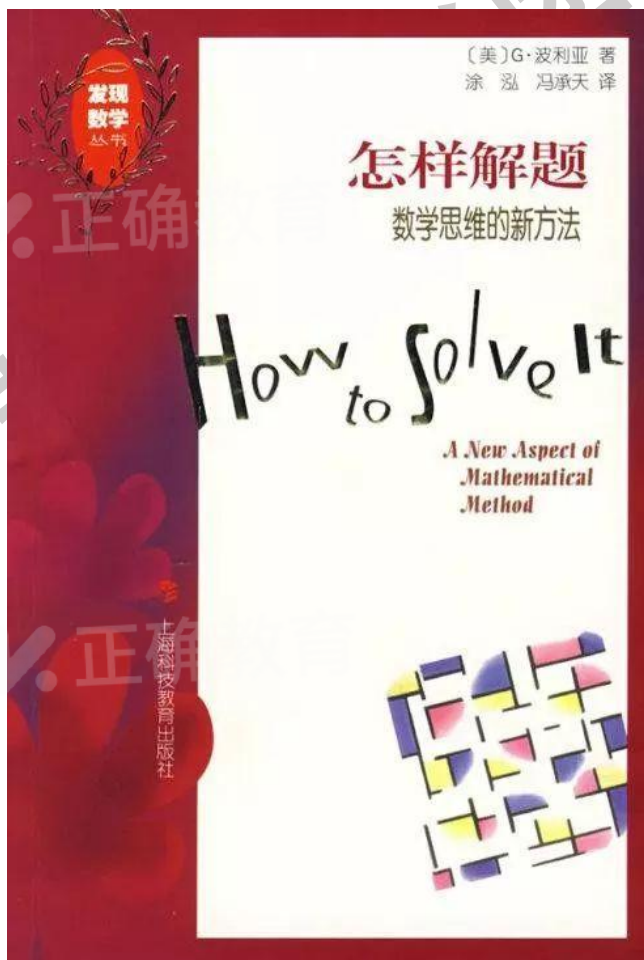
微专题：函数图象的对称性探究

微专题：圆锥曲线中的定点定值问题？

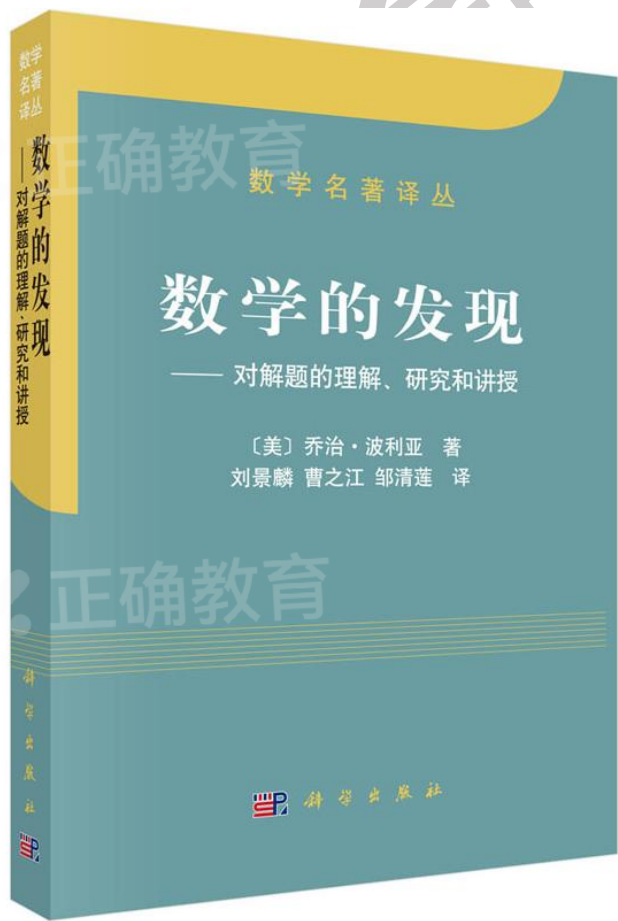
微专题：圆锥曲线中的范围问题？

.....

微专题？ 大难题？

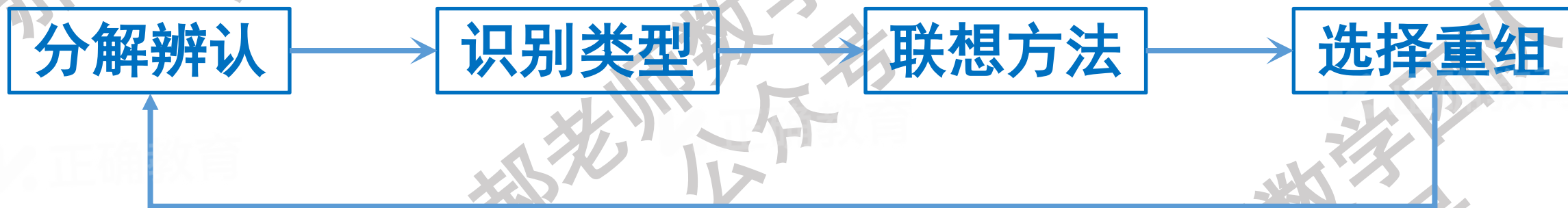


分解和重组是思维的重要活动。你把一个整体分解成它的各个部分，然后又把这些部分重组，使之成为一个与原来或多或少有些不同的整体。



分离和组合就是这样相辅相成地推动的解的进程。分离把整体分成若干个细部，随之而来的组合就把这些细部重新集合为一个多少有些不同的整体。**分解，重新结合，再分解，再重新结合**，我们对问题的了解可能就是这样朝着一个更有希望的前景演化着。

波利亚分解重组观下一个数学解题思维模型的构建





(2024 年新课标 I 卷) 18. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3$.

(1) 若 $b=0$, 且 $f'(x) \geq 0$, 求 a 的最小值;

(2) 证明: 曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形;

(3) 若 $f(x) > -2$ 当且仅当 $1 < x < 2$, 求 b 的取值范围.



(2024 新课标 I 卷) 已知函数 $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3$. 证明: 曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形.

(2023 全国乙卷理) 已知函数 $f(x) = (\frac{1}{x} + a)\ln(1+x)$. 是否存在 a, b , 使得曲线 $y=f(\frac{1}{x})$ 关于直线 $x=b$ 对称? 若存在, 求 a, b 的值, 若不存在, 说明理由.

(2022 全国乙卷文) 若 $f(x) = \ln|a + \frac{1}{1-x}| + b$ 是奇函数, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

对称函数——判断和证明 (结合定义域找对称)



1. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3$. 若 $f(x) > -2$ 当且仅当 $1 < x < 2$, 求 a 的值.

对称函数——不等式解集问题



(2024 新课标II卷) 设函数 $f(x) = a(x+1)^2 - 1$, $g(x) = \cos x + 2ax$ (a 为常数), 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 恰有一个交点, 则 $a = (\quad)$

- A. -1 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

(2017 全国 3 理) 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + a(e^{x-1} + e^{-x+1})$ 有唯一零点, 则 $a = (\quad)$

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

对称函数——零点个数 (唯一零点)

对称函数（总）

对称函数——判断和证明

对称函数——判断和证明（结合定义域找对称）

对称函数——不等式解集问题

对称函数——零点个数

对称函数——零点个数（唯一零点）

对称函数——零点求和



1. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax$, 求 $f(x)$ 定义域和 $f'(x)$.

2. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} + a$. 若对任

求 a 的最小值.

3. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b$ (

中心对称图形.

4. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b$ (

$1 < x < 2$, 求 a

的值.

5. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} - 2x + b(x-1)^3$. 若 $f(x)$

取值范围.

分解

抽象函数（总）

抽象函数——特殊化（代换）

抽象函数——特殊化（构造图象）

抽象函数——特殊化（构造函数）

抽象函数——对称性判断与证明

抽象函数——对称性与周期性

抽象函数——与导数相关的对称性

微专题体系命名规则

函数中对称函数——判断与证明（结合定义域找对称）

章或节中 **问题 情形
**类型 —— 方法（技巧或特例）

南京市中玄武区——中山陵（梧桐大道）

章节知识

类型方法

☒ 任意包含☐ 严格匹配

Q 输入关键词搜索

☐ 必修第1章 集合☐ 必修第2章 常用逻辑用语☐ 必修第3章 不等关系☒ 必修第4章 函数概念与性质☐ 类型1 函数的概念☒ 类型2 函数的解析式☐ 类型3 分段函数☐ 类型4 函数的定义域☒ 类型5 函数的值域、最值☒ 类型6 函数的图象☒ 类型7 函数的单调性☒ 类型8 函数的奇偶性☐ 类型9 周期性☒ 类型10 对称性☒ 类型11 抽象函数☒ 类型12 二次函数☒ 必修第5章 幂函数、指数...☒ 必修第6章 三角函数☒ 必修第7章 函数的应用

我的收藏 我的上传

11 11 11

请输入关键词搜索

共11页

Word

函数的对称性——(唯一)零点求参数

2024-2025年度

共8题

错误纠正...

2025/03/11 使用: 0次

更多

上课

分享

Word

函数对称性——判断与证明 (变换构造对称性)

2025/03/11 使用: 0次

更多

上课

分享

Word

对称函数——零点个数 (唯一零点)

2024-2025年度

共2题

2025/03/11 使用: 0次

更多

上课

分享

Word

函数对称性——判断与证明 (结合定义域找对称)

2024-2025年度

共4题

2025/03/11 使用: 0次

更多

上课

分享

Word

函数对称性——零点求和

2024-2025年度

共1题

2025/03/11 使用: 0次

更多

上课

分享

Word

函数对称性——不等式的解集问题

2024-2025年度

共1题

2025/03/11 使用: 0次

更多

上课

分享

Word

函数对称性——综合

2024-2025年度

更多

上课

分享

圆锥曲线中离心率问题——方法选择

圆锥曲线中离心率问题——定义法

圆锥曲线中离心率问题——定义法（双三角形）

圆锥曲线中离心率问题——基本量法（方法选择）

圆锥曲线中离心率问题——基本量法（点代入）

圆锥曲线中离心率问题——基本量法（长度关系）

圆锥曲线中离心率问题——基本量法（设 b 计算优化）

圆锥曲线中离心率问题——范围

十年 高考 频点

频点1——三角函数的概念

频点2——同角三角函数的基本关系式

频点3——三角函数的图象与性质

3.1 图象判断

3.2 单调性

3.3 奇偶性

3.4 周期性

3.5 图象变换

3.6 零点、极值、最值

频点4——两角和(差)的正弦、余弦及正切

频点5——二倍角的正弦、余弦及正切

频点6——辅助角公式

频点7——通过解方程求三角函数值

频点8——正弦定理、余弦定理及其应用

8.1 解三角形

8.1.1 求长度

8.1.2 求角度或三角函数值

8.1.3 求周长

8.1.4 给面积或者求面积

8.1.5 求范围或最值

8.2 解三角形应用题

1、分类汇编

2、做三遍

- W 全国高考数学十年分章特点频点盲点分析 (不等式)
- W 全国高考数学十年分章特点频点盲点分析 (常用逻辑用语)
- W 全国高考数学十年分章特点频点盲点分析 (导数)
- W 全国高考数学十年分章特点频点盲点分析 (复数)
- W 全国高考数学十年分章特点频点盲点分析 (概率统计)
- W 全国高考数学十年分章特点频点盲点分析 (函数)
- W 全国高考数学十年分章特点频点盲点分析 (集合)
- W 全国高考数学十年分章特点频点盲点分析 (立体几何与空间向量)
- W 全国高考数学十年分章特点频点盲点分析 (平面向量)
- W 全国高考数学十年分章特点频点盲点分析 (三角函数及解三角形)
- W 全国高考数学十年分章特点频点盲点分析 (数列)
- W 全国高考数学十年分章特点频点盲点分析 (数学文化)
- W 全国高考数学十年分章特点频点盲点分析 (圆锥曲线)
- W 全国高考数学十年分章特点频点盲点分析

- W 高考真题分解分层微专题-导数1-导数的几何意义-求切线方程
- W 高考真题分解分层微专题-导数2-导数的几何意义-根据切线求参数
- W 高考真题分解分层微专题-导数3-利用导数研究函数的性质-求单调区间
- W 高考真题分解分层微专题-导数4-利用导数研究函数的性质-根据单调性求参数
- W 高考真题分解分层微专题-导数5-利用导数研究函数的性质-单调性的应用
- W 高考真题分解分层微专题-导数6-利用导数研究函数的性质-求函数的极值 (点)
- W 高考真题分解分层微专题-导数7-利用导数研究函数的性质-根据极值 (点) 求参数
- W 高考真题分解分层微专题-导数8-利用导数研究函数的性质-求最值
- W 高考真题分解分层微专题-导数9-利用导数研究函数的性质-根据最值求参数
- W 高考真题分解分层微专题-导数10-利用导数研究函数的性质-讨论零点的个数
- W 高考真题分解分层微专题-导数11-利用导数研究函数的性质-根据零点个数求参数
- W 高考真题分解分层微专题-导数12-利用导数研究函数的性质-零 (极值) 点相关不等式的证明
- W 高考真题分解分层微专题-导数13-利用导数研究函数的性质-恒成立 (分参)
- W 高考真题分解分层微专题-导数14-利用导数研究函数的性质-恒成立 (端点效应)
- W 高考真题分解分层微专题-导数15-利用导数研究函数的性质-证明不等式 (作差)
- W 高考真题分解分层微专题-导数16-利用导数研究函数的性质-证明不等式 (放缩)
- W 高考真题分解分层微专题-导数17-综合

- W 高考真题分解分层微专题-1统计-方差
- W 高考真题分解分层微专题-1统计-分层抽样
- W 高考真题分解分层微专题-1统计-统计图表中的基本信息
- W 高考真题分解分层微专题-1统计-样本特征量的比较
- W 高考真题分解分层微专题-2概率-独立事件的判断
- W 高考真题分解分层微专题-2概率-古典概型-古典概型中简单的概率问题
- W 高考真题分解分层微专题-2概率-古典概型-和事件的概率公式 (venn图法)
- W 高考真题分解分层微专题-2概率-古典概型-枚举法
- W 高考真题分解分层微专题-2概率-统计图表中的古典概型问题
- W 高考真题分解分层微专题-3计数-二项式定理
- W 高考真题分解分层微专题-3计数-加法计数原理
- W 高考真题分解分层微专题-3计数-配对问题
- W 高考真题分解分层微专题-3计数-先分类再分步
- W 高考真题分解分层微专题-3计数-先选后排问题
- W 高考真题分解分层微专题-3计数-优先法
- W 高考真题分解分层微专题-3计数-正难则反
- W 高考真题分解分层微专题-4随机变量及其分布-常见分布模型-超几何分布
- W 高考真题分解分层微专题-4随机变量及其分布-常见分布模型-二项分布
- W 高考真题分解分层微专题-4随机变量及其分布-常见分布模型-正态分布
- W 高考真题分解分层微专题-4随机变量及其分布-方差
- W 高考真题分解分层微专题-4随机变量及其分布-概率问题中的递推数列
- W 高考真题分解分层微专题-4随机变量及其分布-概率与函数的结合
- W 高考真题分解分层微专题-4随机变量及其分布-离散型随机变量的平均值
- W 高考真题分解分层微专题-4随机变量及其分布-连续型随机变量的平均值
- W 高考真题分解分层微专题-4随机变量及其分布-期望
- W 高考真题分解分层微专题-4随机变量及其分布-全概率公式
- W 高考真题分解分层微专题-4随机变量及其分布-特例1赛制问题
- W 高考真题分解分层微专题-4随机变量及其分布-特例2方案比较问题
- W 高考真题分解分层微专题-4随机变量及其分布-条件概率
- W 高考真题分解分层微专题-5成对数据的统计分析-独立性检验
- W 高考真题分解分层微专题-5成对数据的统计分析-线性回归分析

A老师的试卷讲评课——讲3个微专题

平面向量中向量与几何的转化问题——几何意义

一、方法归纳

1. 平面向量中向量

向量的代数条件
坐标
几何

【解析】①

②记 $\vec{OA} = \mathbf{a}$, $\vec{OB} = \mathbf{b}$

二、类题再现

1. (2011 全国理 12)

A. 2

三、试题订正

1. 若 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 均为

A. $\sqrt{2}-1$

四、类题选讲

1. 已知向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$,

五、同类巩固

1. 已知平面向量 $\mathbf{a}$

圆锥曲线中离心率问题——定义法(双三角形)

一、方法归纳

1. 圆锥曲线中

焦点

【解析】

二、类题再现

1. 已知椭圆 C :

点, 若 l 过

三、试题订正

1. 已知椭圆 C :

若 $PQ = PF$

四、类题选讲

1. (2023 新高

上, 点 B 在

五、同类巩固

1. 已知椭圆 E :

直线 PF_1/l

函数与导数中零点取点策略——放缩

一、方法归纳

1. 函数与导数中零点取点策略方法归纳

【解析】取点策略: 1°特殊值: 0, 1, e , $\frac{1}{e}$;

2°含参数的式子: a , $\ln a$, e^a ;

3°放缩: $e^x > x$, $\ln x < x$, $e^x > \frac{1}{2}x^2$, $\ln x < 2\sqrt{x}$...

二、类题再现

1. (2020 全国 I 卷文 20) 已知函数 $f(x) = e^x - a(x+2)$. 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

三、试题订正

1. (2017 全国 I 卷理 21) 已知函数 $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x$. 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

四、类题选讲

1. (2013 年江苏卷 20) 设函数 $f(x) = \ln x - ax$, $g(x) = e^x - ax$, 其中 a 为实数. 若 $g(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上是单调增函数, 求 $f(x)$ 的零点个数, 并证明你的结论.

五、同类巩固

1. (2021 年新高考全国 II 卷 22) 已知函数 $f(x) = (x-1)e^x - ax^2 + b$. 若 $0 < a < \frac{1}{2}$, $b \leq 2a$, 证明: $f(x)$ 有一个

零点.

08

跨学段命题

高中老师命制初中题

原题 (2010年江苏省高考第17题) 某兴趣小组测量电视塔 AE 的高度 H (单位 m), 如图 1 所示, 垂直放置的标杆 BC 高度 $h = 4m$, 仰角 $\angle ABE = \alpha$, $\angle ADE = \beta$.

(1) 该小组已经测得一组 α 、 β 的值, 并算出了 $\tan \alpha = 1.24$, $\tan \beta = 1.20$, 请据此算出 H 的值;

(2) 该小组分析若干测得的数据后, 发现适当调整标杆到电视塔的距离 d (单位 m), 使 α 与 β 之差较大, 可以提高测量精确度, 若电视塔实际高度为 $125m$, 问 d 为多少时, $\alpha - \beta$ 最大?

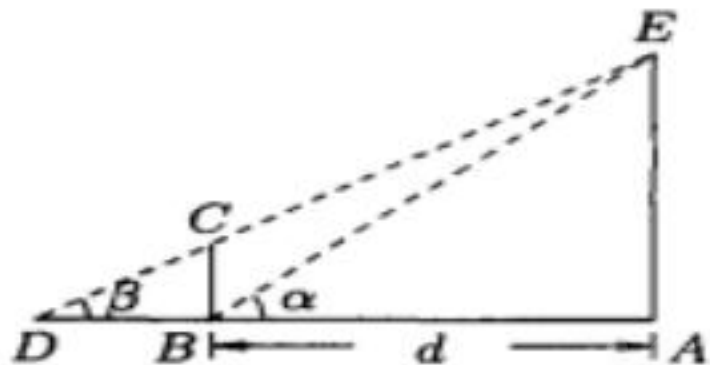


图 1

$$(1) \text{ 由 } AB = \frac{H}{\tan \alpha}, BD = \frac{h}{\tan \beta}, AD = \frac{H}{\tan \beta} \text{ 及 } AB + BD = AD \text{ 得, } \frac{H}{\tan \alpha} + \frac{h}{\tan \beta} = \frac{H}{\tan \beta}, \text{ 解得 } H = \frac{h \tan \alpha}{\tan \alpha - \tan \beta} = \frac{4 \times 1.24}{1.24 - 1.20} = 124.$$

所以电视塔的高度为 $124m$.

$$(2) \text{ 由题设知, } d = AB, \tan \alpha = \frac{H}{d}, \text{ 由 } AB = AD - BD = \frac{H}{\tan \beta} - \frac{h}{\tan \beta} \text{ 得 } \tan \beta = \frac{H-h}{d}, \text{ 所以}$$

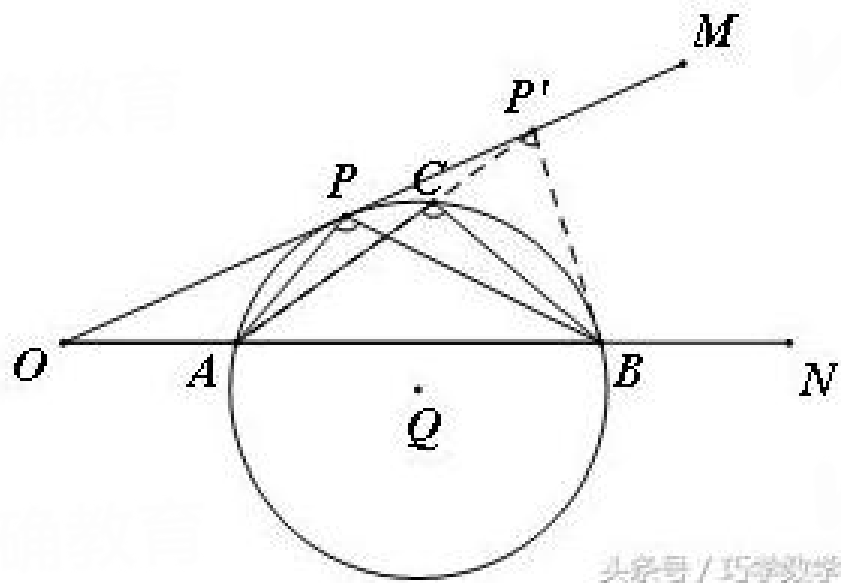
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{H}{d} - \frac{H-h}{d}}{1 + \frac{H}{d} \cdot \frac{H-h}{d}} = \frac{h}{d + \frac{H(H-h)}{d}} \leq \frac{h}{2\sqrt{H(H-h)}},$$

$$\text{当且仅当 } d = \frac{H(H-h)}{d}, \text{ 即 } d = \sqrt{H(H-h)} = \sqrt{125(125-4)} = 55\sqrt{5} \text{ 时, 上式取等号.}$$

所以当 $d = 55\sqrt{5}$ 时, $\tan(\alpha - \beta)$ 取最大值.

又因为 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 所以 $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$, 故 $d = 55\sqrt{5}$ 时, $\alpha - \beta$ 最大.

米勒定理：已知点A、B是 $\angle MON$ 的边ON上的两个定点，点P是边OM上的一个动点，则当且仅当三角形ABP的外接圆与边OM相切于点P时， $\angle APB$ 最大。



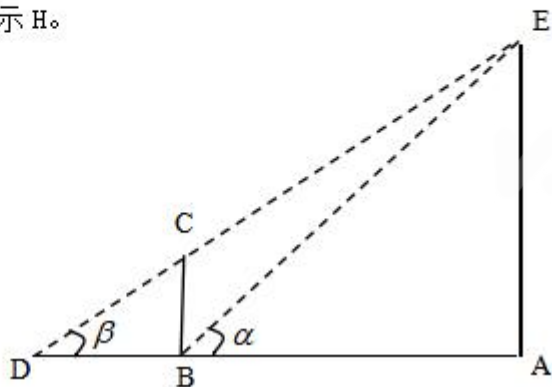
证明：如图，设 P' 是边OM上不同于点P的任意一点，连结 $P'A$ ， $P'B$ ， $P'A$ 与圆交于点C，连接CB，根据三角形外角的性质，可知 $\angle ACB > \angle AP'B$ ，根据圆周角定理可知， $\angle APB = \angle ACB$ ，因此 $\angle APB > \angle AP'B$ ，也就是当且仅当三角形ABP的外接圆与边OM相切于点P时， $\angle APB$ 最大。

15. (本题满分 14 分)

问题情境：

某兴趣小组测量电视塔 AE 的高度 H (单位: m), 如图, 垂直放置的标杆 BC 的高度为 4m, 仰角 $\angle ABE = \alpha$, $\angle ADE = \beta$ 。

(1) 用含 $\tan \alpha$ 和 $\tan \beta$ 的代数式表示 H 。

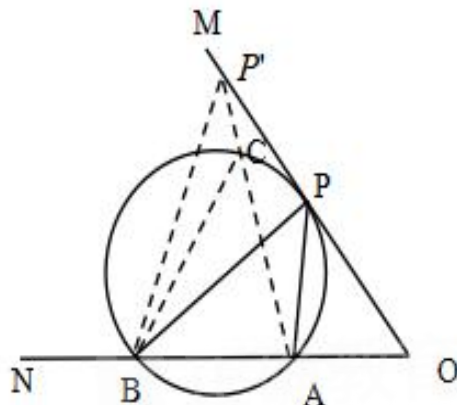


数学理论：

米勒定理：已知点 A 、 B 是 $\angle MON$ 的边 ON 上的两个定点，点 P 是边 OM 上的一个动点，则当且仅当三角形 ABP 的外接圆与边 OM 相切于点 P 时， $\angle APB$ 最大。

证明：

如图, 设 P' 是边 OM 上不同于点 P 的任意一点, 连结 AP' , BP' , AP' 与圆交于点 C , 连接 CB , 根据三角形外角的性质, 可知 $\angle ACB > \angle AP'B$, 根据圆周角定理可知, $\angle APB = \angle ACB$, 因此 $\angle APB > \angle AP'B$, 也就是当且仅当三角形 ABP 的外接圆与边 OM 相切于点 P 时, $\angle APB$ 最大。



问题解决：

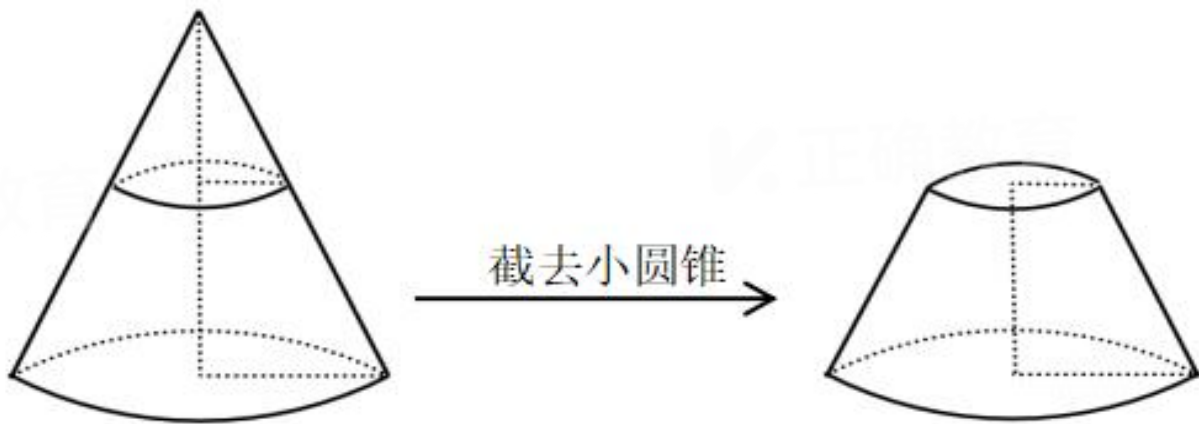
(2) 该小组分析若干测得的数据后, 认为适当调整标杆到电视塔的距离 AB (单位: m), 使 α 与 β 之差较大, 可以提高测量精确度。请直接利用米勒定理, 解决如下问题:

①发现 $AB = 20\sqrt{3}$, $BD = 40\sqrt{3}$ 时 $\alpha - \beta$ 最大, 求电视塔的高度 H 。

②若电视塔的实际高度 H 为 125m, 试问 AB 为多少时, $\alpha - \beta$ 最大?

第二部分 学科素养(科学学科)

某科技特长生研究发现：已知圆锥的底面面积为 S ，高为 h ，则体积为 $\frac{1}{3}Sh$ ，现将圆锥沿平行于底面截去一个小圆锥可以得到一个圆台(如图)，已知圆台的上底面面积为 S_1 ，下底面面积为 S_2 ，高为 h ，则圆台的体积为 $\frac{1}{3}(S_1 + \underline{\hspace{2cm}} + S_2)h$ 。



关于 x 的一元二次方程

(1) 若 $k=1$, 此方程

(2) 若一次函数 $y=kx$

$$(x_1-1)(x_2-1) + (y_1-\frac{3}{2})(y_2-\frac{3}{2}) = 0$$

该定点, 如果经过说

(1) $7x^2 + 8tx + 4t^2 - 12 = 0$, 将 $x=1$ 代入, $4t^2 + 8t - 5 < 0$,2 分

$$\text{解得 } -\frac{5}{2} < t < \frac{1}{2} \text{4 分}$$

(2) 则 $x_1 + x_2 = -\frac{8kt}{4k^2 + 3}$, $x_1x_2 = \frac{4t^2 - 12}{4k^2 + 3}$,

$$y_1 + y_2 = \frac{6t}{4k^2 + 3}, \quad y_1y_2 = \frac{3t^2 - 12k^2}{4k^2 + 3}, \quad \text{.....6 分}$$

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) + \left(y_1 - \frac{3}{2}\right)\left(y_2 - \frac{3}{2}\right) = 0,$$

$$\text{即 } x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 + y_1y_2 - \frac{3}{2}(y_1 + y_2) + \frac{9}{4} = 0,$$

$$\text{代入化简得 } 4k^2 + 32kt + (28t^2 - 36t - 9) = 0, \quad \text{.....8 分}$$

$$4k^2 + 32kt + (2t - 3)(14t + 3) = 0, \quad \text{即 } (2k + 2t - 3)(2k + 14t + 3) = 0,$$

当 $2k + 2t - 3 = 0$ 时, $t = \frac{3}{2} - k$, 此时函数为 $y = k(x - 1) + \frac{3}{2}$, 过定点 $(1, \frac{3}{2})$, 舍去;

当 $2k + 14t + 3 = 0$ 时, $t = -\frac{1}{7}k - \frac{3}{14}$, 此时函数为 $y = k\left(x - \frac{1}{7}\right) - \frac{3}{14}$, 过定点 $(\frac{1}{7}, -\frac{3}{14})$.

综上, 函数图象过定点 $(\frac{1}{7}, -\frac{3}{14})$10 分

09

高观点命题

站在更高视角，审视高考命题

案例

已知函数 $f(x) = e^x - ax \sin x - x - 1$, $x \in [0, \pi]$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 求证: $f(x) \geq 0$;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

本题的命制基于 e^x 的泰勒展开式, 即 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$, 考虑前三项, 构造函数

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1,$$

改造后的函数为 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x \sin x - x - 1$, 最后增加参数,

得到函数 $f(x) = e^x - ax \sin x - x - 1$.

案例

设函数 $f(x) = ae^x + \sin x - 3x - 2$, e 为自然对数的底数, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $a \leq 0$, 求证: 函数 $f(x)$ 有唯一的零点;

(2) 若函数 $f(x)$ 有唯一的零点, 求 a 的取值范围.

$f(x) = ae^x + b\sin x + cx + d$, 其中 $a(a > 0)$, b, c, d 为待定的参数.

为了便于问题的研究, 让函数的零点也为极值点,

设极值点 (零点) 为 x_0 , 则有: $f(x_0) = 0, f'(x_0) = 0$.

因此有 $ae^{x_0} + b\sin x_0 + cx_0 + d = 0, ae^{x_0} + b\cos x_0 + c = 0$,

为了方便, 我们取 $x_0 = 0$, 则有 $a + d = 0, a + b + c = 0$,

特别的取 $a = 2, b = 1, c = -3, d = -2$, 则有 $f(x) = 2e^x + \sin x - 3x - 2$,

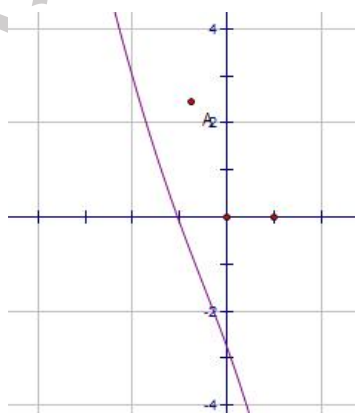
下面引进参数 a ，可以有如下 4 种方式：

$$\textcircled{1} f(x) = ae^x + \sin x - 3x - 2;$$

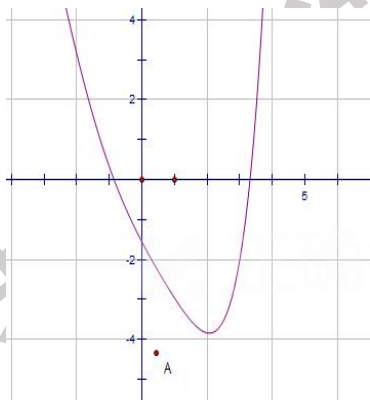
$$\textcircled{2} f(x) = e^x + a\sin x - 3x - 2;$$

$$\textcircled{3} f(x) = e^x + \sin x + ax - 2;$$

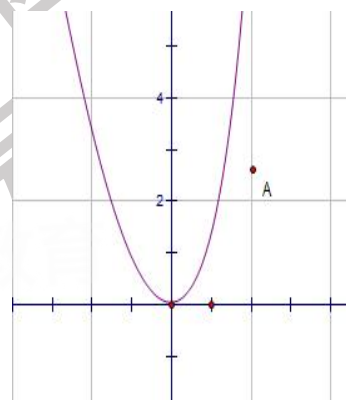
$$\textcircled{4} f(x) = e^x + \sin x - 3x + a.$$



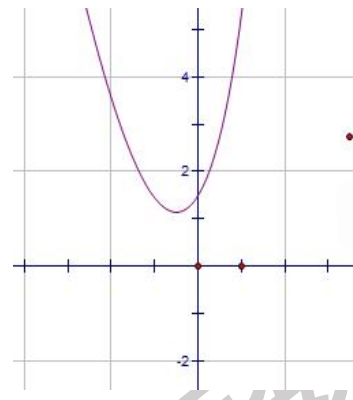
$a \leq 0$



$0 < a < 2$



$a = 2$



$a > 2$

在严格推理时，发现 $a \leq 0$ 这个分类对学生来说，不太容易想到，因此把 $a \leq 0$ 时，证明函数 $f(x)$ 有唯一的零点作为第（1）问，先解决，也为第（2）问作一个铺垫。

16. (本小题满分 20 分)

我们知道

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots$$

和参数 a

16. (本小题满

题：已知 $f(x) = e^x + \sin x - ax - 1$

解： $f'(x) = e^x + \cos x - a$

当 $x \geq 0$ 时

则 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上

因此 $f(x) \geq f(0) = 0$

故 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上

所以 $f(x) \geq 0$

由题意知

因此 $a \leq 1$

题：已知 $f(x) = e^x + \sin x - ax - 1$ ， a 为实数．若 $x \geq 0$ 时， $f(x) \geq 0$ ，求实数 a 的取值范围．10 分

解：因为 $f(x) = e^x + \sin x - ax - 1$ ，

$$\text{所以 } f'(x) = e^x + \cos x - a, f''(x) = e^x - \sin x,$$

因为 $x \geq 0$ ，所以 $f''(x) \geq 0$ ，

所以 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，

当 $a \leq 2$ 时，

$f'(x) \geq f'(0) = 2 - a \geq 0$ ， $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x) \geq f(0) = 0$ ，符合题意．

当 $a > 2$ 时，

$$f'(0) = 2 - a < 0, f'(\ln(a+2)) = 2 + \ln(a+2) > 0,$$

故存在 $x_0 \in (0, \ln(a+2))$ ，使得 $f'(x_0) = 0$ ，

且当 $x \in (0, x_0)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减；

因此 $f(x_0) < f(0) = 0$ ，不合题意．

综上， $a \leq 2$ ． 20 分

注：阅卷根据题目的新颖度、难度等评分，满分设 10，15，20 三个档，例如参考答案 1 满分设定 15 分；参考答案 2 满分设定 20 分．

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

两式相加得 $e^x + \sin x = 1 + 2x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \geq 1 + 2x$ 恒成立,

即 $e^x + \sin x - 2x - 1 \geq 0$ 恒成立,

加入参数:

正确答案:

$e^x + \sin x - 2x - a \geq 0$ 恒成立, 则 $a \leq 1$.

$e^x + \sin x - ax - 1 \geq 0$ 恒成立, 则 $a \leq 2$.

$e^x - \sin x - 1 \geq 0$ 恒成立,

过于简单:

$e^x + \sin x \geq a$ 恒成立,

错误结论:

当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $e^x + \sin x \geq a$ 恒成立, 则 $a \leq 1$.

泰勒公式在高中数学题的命题中主要有两种模式:

一是运用泰勒公式的特殊形式来命题;

二是借助泰勒公式的内涵及其结论来设计题目。

要按学生的认识规律进行教学, 用高等数学知识武装中学教师,

10

持续学习

命题路上，很多结论需要不断学习

一道四点共圆问题的多解及其命题背景探究

南京师范大学附属扬子中学

(210048) 郝结红

江苏省南京市溧水区教育局教研室

(211200) 魏国兵

1 模考试题呈现

(南京市 2021 届高三年级第二次模拟考试第 21 题) 已知直线 $l: y = x + m$ 交抛物线 $C: y^2 = 4x$ 于 A, B 两点. (1) 略; (2) 如图 1, 若点 M, N 在抛物线 C 上, 且关于直线 l 对称, 求证: A, B, M, N 四点共圆.

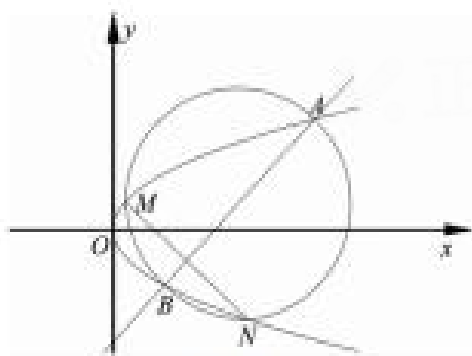


图 1

2 学生解法汇总

$\cdot \left(\frac{y_3^2}{4} - \frac{y_2^2}{4}, y_3 - y_2 \right) = \frac{(y_3 - y_1)(y_3 - y_2)}{16} [4m + 4y_3 + y_3^2 + 16]$. 又由 (1) (2) 得 $y_3^2 = -4m - 4y_3 - 16$, 从而 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0, \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BN} = 0$, 即 A, B, M, N 四点共圆.

解法 3: (坐标消元法) 显然 $k_{MN} = -1$, 设直线 MN 的方程为 $y = -x + n$, 设 $M(x_3, y_3), N(x_4, y_4)$, 由 $\begin{cases} y = -x + n \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 得 $y^2 + 4y - 4n = 0$, 所以 $y_3 + y_4 = -4$. 设 MN 中点 $Q(x_0, y_0)$, $x_3 + x_4 = 4 + 2n, \therefore Q(n$

3 命题背景探究

探究1 改变原题中抛物线方程，四点共圆仍然成立.

探究2 改变原题中直线 l 的斜率，四点共圆不成立.

探究3 将原题中抛物线方程改为椭圆方程，四点共圆仍然成立.

背景1(2011年高考全国大纲卷第21题)已知 O 为坐标原点， F 为椭圆 $C: x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 在

y 轴正半轴上的焦点，过 F 且斜率为 $-\sqrt{2}$ 的直线 l 与 C 交于 A 、 B 两点，点 P 满足 $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OP} = \vec{0}$.

(1)证明：点 P 在 C 上；

(2)设点 P 关于点 O 的对称点为 Q ，证明： A 、 P 、 B 、 Q 四点在同一圆上.

简解：(1)可算得点 $P(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1)$ ，故在 C 上.

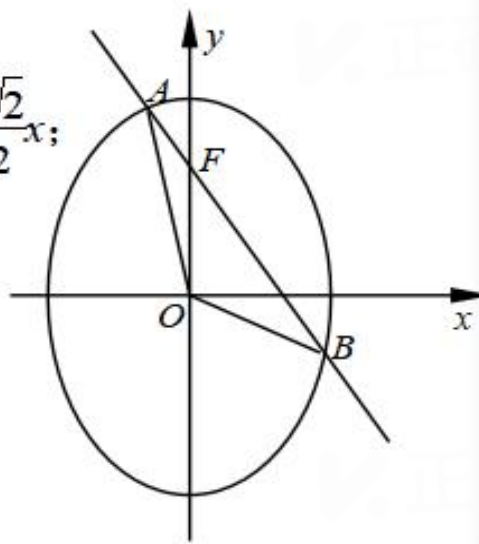
(2)线段 AB 的中垂线方程为： $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{4}$ ，线段 PQ 的中垂线方程为： $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$ ；

两直线的交点就是圆心 $O_1(-\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{1}{8})$ ，则 $|O_1P| = \frac{3\sqrt{11}}{8}$ ，

弦长 $|AB| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ， AB 中点为 $M(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2})$ ，由勾股定理得 $|O_1A| = \frac{3\sqrt{11}}{8}$ ，

$\therefore |O_1P| = |O_1Q| = |O_1A| = |O_1B|$ ， $\therefore A$ 、 P 、 B 、 Q 四点在同一圆上.

评析：此题揭示：两条斜率之和为0的直线与椭圆相交所得的四点共圆.



背景 2 (2014 年高考全国大纲卷第 21 题) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 直线 $y = 4$ 与 y 轴的交点为 P , 与 C 的交点为 Q , 且 $|QF| = \frac{5}{4}|PQ|$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过 F 的直线 l 与 C 相交于 A, B 两点, 若 AB 的垂直平分线 l' 与 C 相交于 M, N 两点, 且 A, M, B, N 四点在同一个圆上, 求 l 的方程.

简解: (1) C 的方程为 $y^2 = 4x$;

(2) 设 l 的方程为 $x = my + 1 (m \neq 0)$, 可求弦长 $|AB| = \sqrt{m^2 + 1} |y_1 - y_2| = 4(m^2 + 1)$.

l' 的方程为 $x = -\frac{1}{m}y + 2m^2 + 3$, 可求弦长 $|MN| = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} |y_3 - y_4| = \frac{4(m^2 + 1)\sqrt{2m^2 + 1}}{m^2}$.

MN 的中点为 $E(\frac{2}{m^2} + 2m^2 + 3, -\frac{2}{m})$, 由于 MN 垂直平分线 AB , 故 A, M, B, N 四点在同一圆上等价于 $|AE| = |BE| = \frac{1}{2}|MN|$, 从而 $\frac{1}{4}|AB|^2 + |DE|^2 = \frac{1}{4}|MN|^2$, 即 $4(m^2 + 1)^2 + (2m + \frac{2}{m})^2 + (\frac{2}{m^2} + 2)^2 = \frac{4(m^2 + 1)^2(2m^2 + 1)}{m^4}$, 化简得 $m^2 - 1 = 0$, 解得 $m = 1$ 或 $m = -1$.

所求直线 l 的方程为 $x - y - 1 = 0$ 或 $x + y - 1 = 0$.

评析: 此题揭示: 抛物线上四点共圆是有条件的.

圆锥曲线四点共圆定理 若两条直线 $y=k_1x+b_1$ ($i=1, 2$) 与圆锥曲线 $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$ ($a \neq b$) 有四个交点, 则四个交点共圆的充要条件是 $k_1+k_2=0$.

证明: 两直线组成的曲线方程为 $(k_1x-y+b_1)(k_2x-y+b_2)=0$, 则过四个交点的曲线方程可设为 $(k_1x-y+b_1)(k_2x-y+b_2)+\lambda(ax^2+by^2+cx+dy+e)=0$ ①.

必要性: 若四点共圆, 则方程①表示圆, 那么①式左边展开式中 xy 项的系数为零, 即有 $k_1+k_2=0$.

充分性: 当 $k_1+k_2=0$ 时, 令①式左边展开式中 x^2, y^2 项的系数相等, 得 $k_1k_2+\lambda a=1+\lambda b$, 联立解得 $k_2=-k_1, \lambda=\frac{1+k_1^2}{a-b}$, 将其代入①, 整理得 $x^2+y^2+c'x+d'y+e'=0$ ②.

方程②的几何意义是如下三种情形之一: 表示一个圆、表示一个点、无轨迹. 由题设知四个交点在方程②所表示的曲线上, 故方程②表示圆.

评析: 上述定理用文字表述, 即斜率均存在的两条直线与圆锥曲线(圆除外)有四个交点, 则四个交点共圆的充分条件是两直线的斜率互为相反数. 这是一个非常简洁的充要条件, 运用这个定理可解决圆锥曲线上四点共圆的高考难题和数学问题.

15. (本小题满分 15 分)

(1) 已知直线 $l: y=x+m$ 交抛物线 $C: y^2=4x$ 于 A, B 两点. 若点 M, N 在抛物线 C 上,

且关于直线 l 对称. 求证: A, B, M, N 四点共圆.

(2) 试题改编常用的方法有: “改变题目条件”、“改变表达方式或设问”、“类比”、

“逆命题”等. 请你将上述试题改编, 命制一道解答题, 不必解答.

因此 $MA \perp MB$,

同理 $NA \perp NB$,

于是点 M, N 在以 AB 为直径的圆上,

即 A, B, M, N 四点共圆.10 分

(2) 已知直线 l 交抛物线 $C: y^2=4x$ 于 A, B 两点. 若点 M, N 在抛物线 C 上, 且关于直线 l 对

称, 若 A, B, M, N 四点共圆. 求直线 l 的斜率.15 分

2. 试题的原创

原创试题是一项高难度的系统工程，要求较高，一般遵循以下几条思路进行，首先要根据考查的知识内容和基本条件构架，并与最后要达到的考查难度和数学思想方法相结合。对试题的基本条件进行设计后，再不断补充、提高、修改。

1. 八省联考的第22题：

已知函数 $f(x) = e^x - \sin x - \cos x$, $g(x) = e^x + \sin x + \cos x$.

(1) 证明：当 $x > -\frac{5\pi}{4}$ 时， $f(x) \geq 0$ ；

(2) 若 $g(x) \geq 2 + ax$ ，求 a 。

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

于是 $g(x) = e^x + \sin x + \cos x = 2 + 2x + \cdots$,

这就是为什么右边是 $2 + ax$ 的由来.

2. 2020 全国新高考山东卷第 22 题:

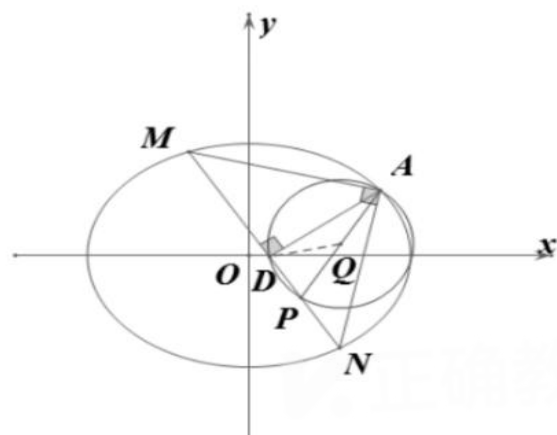
已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $A(2, 1)$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 点 M, N 在 C 上, 且 $AM \perp AN$, $AD \perp MN$, D 为垂足. 证明: 存在定点 Q ,

使得 $|DQ|$ 为定值.

这道题的命制基于一个基本的实事：点 A 是椭圆 C 上一点，过点 A 作两条相互垂直的直线 l_1, l_2 ，分别交椭圆 C 于另一点 M, N ，那么直线 MN 恒过定点 P 。



一般的原创试题的命制都有一个基本的素材，基本的实事作为铺垫。

11

回归本源

没思路时，回到课本寻找命题原型

现象与困惑

很多学生手中的教材是崭新的，有的学生从来没翻过教材。

01

老师上课使用讲义、使用课件、使用资料，也很少带学生阅读教材。

02

教材上除了概念定理例题习题外，还有很多《阅读与拓展》栏目，更是无人问津。

03

每年高考中有相当多的试题是对教材上的例题或习题进行适当的改编综合而得到。

04



2024 年新高考全国 I 卷各试题与教材的衔接

题号	考点	人教 A 版（2019）教材溯源
1	集合的运算	必修一 P14 习题 1.3 第 1, 2 题
2	复数的运算	必修二 P95 总习题第 7 题
3	平面向量数量积	必修二 P60 复习参考题第 8 题
4	三角恒等变换	必修一 P225 复习参考题 5 第 15 题
5	简单的几何体	必修二 P118 例 4
7	三角函数图象	必修一 P237 例 1
8	斐波那契数列	选择性必修二 P57 复习参考题 4 第 17 题
9	正态分布	选择性必修三 P87 练习第 2 题, 习题 7.5 第 2 题
10	三次函数	选择性必修二 P104 复习参考题 5 第 9 题, P99 复习参考题第 13 题
12	双曲线离心率	选择性必修一 P124 第 1 题
13	曲线的切线	选择性必修二 P14 复习参考题第 13 题
15	解三角形	必修二 P54 习题 6.4 第 22 题
16	椭圆	选择性必修一 P121 练习第 1 题
17	四棱锥线面平行、二面角	必修二 P159 练习第 3 题, P165 习题 8.6 第 20 题
18	函数导数的应用	必修一 P87 习题 3.2 第 13 题



依据课标 植根教材

——2025 年新高考 I 卷与新教材的关联研究*

端木彦 (江苏省南京市教学研究室 210001)

摘要 课程标准既是高考的命题依据,也是高中数学教材的编写指导文件,高考试题与教材内容之间必然存在高度匹配性,以 2025 年新高考 I 卷数学试题和苏教版高中数学新教材为研究对象,通过题源对照和溯源分析系统研究试题与教材的内在关联.研究表明,高考数学试题依据课程标准,从基础性、应用性、综合性、创新性四个维度表现出与教材的深度耦合;植根教材内容,从必备知识、关键能力、学科素养等方面实现科学考查.最后基于关联,从教学与命题的双重视角对日常教学、高考复习以及科学命题提出思考与建议.

关键词 课程标准;苏教版教材;新高考 I 卷;关联研究

文章编号 1004-1176(2025)07-0019-04

按照教育部要求,《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》(下称“课程标准”)是高考数学试卷的命题依据.新高考数学试卷立足课程标准,考查的内容依据学业质量标准和课程内容,严格依标命题^[1].对于高中阶段知识的考查以课程标准和教材为依据,内容要求为课程标准中的学业质量水平一和水平二,以水平二为主,在考查理念上也紧跟课程标准要求^[2].考查内容范围和比例、要求层次与课程标准保持一致,注重考查内容的全面性,同时突出主干、重点内容的考查,通过依标施考,引导中学教学依标施教^[3].课程标准也是高中数学教材的编写指导文件,高中数学教材的编写必须严格符合课程标准要求,获得教育部审查通过后才能由学校

“新教材”)为研究对象,通过对比分析揭示内在关联,并提出教学与命题优化建议,以期对高中数学教育教学改革提供有益参考.

1 题源对照

通过对 2025 年新高考 I 卷数学试题的系统分析,发现其与高中数学教材之间存在紧密关联.所有试题均以教材内容为基础,经过科学改编与适度深化,实现对学生的知识掌握程度和素养发展水平的综合考查.以下通过溯源分析表 1 梳理试题的教材原型和关联要点.

2 溯源分析

2025 年新高考 I 卷数学试题继续深化“聚焦数

表 1 2025 年新高考 I 卷(数学)试题
与苏教版教材题源对照

题号	教材册次	页码	栏目 & 题号	题源关联
1	必修二	120	例 1	知识体系
2	必修一	11	练习 2	知识体系
3	选择性必修一	106	练习 2(3)	知识体系
4	必修一	225	本章测试 14	知识体系
5	必修一	213	练习 5(2)	方法迁移
6	必修二	12	例 2	情境素材、知识体系
7	选择性必修一	67	习题 11	知识体系
8	必修一	237	例 2	方法迁移、思维创新
9	必修二	216	复习题 16	情境素材
10	选择性必修一	117	习题 4.7.8	情境素材、方法迁移
11	必修二	101	练习 5(1)	方法迁移、思维创新
12	选择性必修一	200	复习题 10	方法迁移
13	选择性必修一	163	例 2	知识体系
14	选择性必修二	123	习题 5.8	方法迁移
15	选择性必修二	173	引例	知识体系
16	选择性必修一	169	习题 12.13	知识体系
17	必修二	217	复习题 18	方法迁移
18	必修二	47	复习题 8(2), 18	方法迁移
	选择性必修一	87	习题 13	
	选择性必修一	77	本章测试 6	
19	必修二	81	练习 4(1)	方法迁移、思维创新
	必修二	86	习题 19	情境素材



对于教龄低于三年的年轻教师，对整个学段的学科体系还没建立起来的前提下，首先要侧重“教教材”，教教材的前提是吃透教材，细细研究教材内容，随之将教材内容结构化，形成知识网络，借助课程方案与学科课程标准，搞清知识、能力、价值观在教材中的呈现点、渗透处，设计出适合师生共用的学程案，随后实施课堂教学，一个单元、一个学期、一个学段结束时，通过各种教与学的活动，反思自己的教学，对所教的内容结合生活实践与教学实际进行增减，随之渐渐提高自己驾驭教材与课标的教学水平。

对于有经验的至少教过一轮的成熟教师，逐渐倾向实施“用教材教”，在熟悉一个版本教材的基础上，形成自己的学科知能框架与体系。并以此版本为样本，涉览多种版本的教材，找到异同点，在课程方案与学科课程标准的引领下，相互借鉴使用，结合学情、教情、日常生活、焦点热点等实践内容，在集体备课校本充分教研的前提下，发挥集体智慧，设计出比较完整可行的学程案集锦体系，随之灵活使用实施教学，促进学生的学习，这就是所谓的“用教材教”了。

让我们每位教师从“教教材”走向“用教材教”吧！

[背景] 本题数据来源于我班考试数据，第一问想法来源于教学时推导卡方公式中的“假设”

[原创] 1. (本小题满分 12 分)

下表是随机抽取某校 52 名同学的

表 1: 数学成绩			
93	114	104	
80	109	94	
99	90	93	
106	90	84	
67	78	89	
109	77	110	
91	97	85	
94	95	96	
65	96	116	
110	100	103	
105	95	91	
100	92	70	
108	113	84	

根据全校 1040 名同学的考试情况分为优秀。

(1) 已知表 1 和表 2 无关联，且数学优秀且物理优秀(结果四舍五入保留整数)

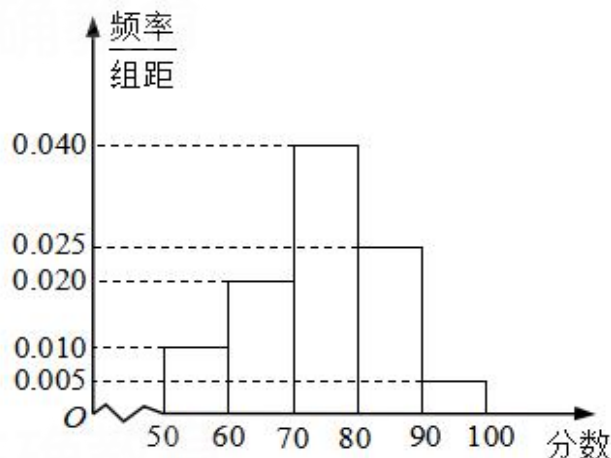
(2) 已知表 1 和表 2 有对应关系，

① 请问有没有 99% 把握认为数学

② 从全校数学成绩优秀的学生中随机变量 X ，求 X 的分布列与数学期望。

19. (12 分)

某地区对某次考试成绩进行分析，随机抽取 100 名学生的 A ， B 两门学科成绩作为样本，将他们的 A 学科成绩整理得到如下频率分布直方图，且规定成绩达到 70 分为良好，已知他们中 B 学科良好的有 50 人，两门学科均良好的有 40 人。



(第 19 题图)

(1) 根据所给数据，完成下面的 2×2 列联表，并根据列联表，判断是否有 95% 的把握认为这次考试学生的 A 学科良好与 B 学科良好有关；

	B 学科良好	B 学科不够良好	合计
A 学科良好			
A 学科不够良好			
合计			

+

(2) 用样本频率估计总体概率，从该地区参加考试的全体学生中随机抽取 3 人，记这 3 人中 A ， B 学科均良好的人数为随机变量 X ，求 X 的分布列与数学期望。

15.(13 分) 为研究某疾病与超声波检查结果的关系, 且做过超声波检查的人群中随机调查了 1000 人, 得到如下

组别 \ 超声波检查结果	患该疾病	未患该疾病	合计
患该疾病			
未患该疾病			
合计			

(1) 记超声波检查结果

(2) 根据小概率值 $\alpha =$

附: $\chi^2 = \frac{(a-b)^2}{(a+b)}$

(1)

解法一: 根据表格可知, 检查结果不正常的 200 人中有 180 人患病, 所以 P 的估计值为

$$\frac{180}{200} = \frac{9}{10}$$

解法二: 记事件 A

$$P(A) = \frac{200}{1000} =$$

说明: 直接写 p

(2) 零假设 H_0 为

$$\chi^2 = \frac{1000 \times (20 - 14)^2}{800 \times 200}$$

$$\chi^2 = 765.625 >$$

即认为超声波检查结果与患该病有关, 该推断犯错误的概率不超过 0.001 .
4 分

说明: (1) 必须代入具体数值, 直接把公式查抄一遍没有分, 写成这样

$$\chi^2 = \frac{1000 \times (400 - 140400)^2}{800 \times 200 \times 800 \times 200} \text{ 或是 } \chi^2 = \frac{1000 \times 140000 \times 140000}{800 \times 200 \times 800 \times 200} \text{ 写可以.}$$

(2) 第二个分数、小数都可以, 这几个数 766, 765.6, 765.6, 765.63 也算对, 写 765 扣分; 这里面特别要注意的是前面的若是没有写分数, 后面的小数是错的, 直接扣分, 若有分数 $\frac{6125}{8}$, 但是后面的小数错扣分;

(3) $\frac{6125}{8}$ 所有等价形式都算对, 如 $\frac{5 \times 1225}{8}; \frac{125 \times 49}{8}; \frac{12250}{16}; \frac{196000}{256}$

(4) 第三个必须看到 >10.828 与 “有关” 才给分, 所有等价形式也可以, 如写成

$$P(\chi^2 \geq 10.828) = 0.001 \text{ 与 } >10.828 \text{ 等价;}$$

回归教材



问题 1: 已知动点 P 到点 $F(1, 0)$ 的距离是到直线 $x=9$ 的距离的 $\frac{1}{3}$, 试判断点 P 的轨迹是什么图形, 得到该

结果是巧合吗? 改变哪些量可能会对点的轨迹产生影响?

活动 1: 利用 GGB 软件拖动定点和定直线的位置, 改变比值的大小 (比值大于 0 且小于 1), 观察点的轨迹。

【设计意图】 从具体条件入手, 得到方程 $\frac{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{|x-9|} = \frac{1}{3}$, 化简得 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$, 知点 P 的轨迹是椭圆。既

复习了求轨迹方程的方法, 又自然引出了问题 1 的答案。通过活动 1 中的 GGB 软件的演示, 改变上述定点、定直线和定比, 引领学生观察轨迹, 发现其依旧是椭圆, 让学生感知这不是巧合, 而是蕴含着一定的数学关系。

【教学效果】 由于此前做过一定量的轨迹方程的求解, 所以大部分学生能够顺利得到点 P 的轨迹方程, 并认为定点、定直线的位置和比值的大小可能会对点的轨迹产生影响。在改变比值时, 由于数值调得较小, 导致学生误认为其轨迹为圆, 直观演示造成了误解。本想通过问题 1 引导学生思考到定点的距离和到定直线的距离的比值改变时轨迹仍是椭圆这一现象中暗藏的数学原理, 以此激发学生的学习兴趣, 但实际上学生被题目牵着走, 只知做题而没有体会到其中的数学关系, 使得对即将要学习的内容更加迷茫, 同时也没有引起学习兴趣和对该主题的探究欲望。



问题 2: 从椭圆的定义出发解释上述“巧合”现象？

活动 2: 学生回想椭圆的定义，重现椭圆的标准方程 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ 的推导过程，设点 $P(x, y)$ 满足方程

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2 \times 3。$$

【设计意图】 通过两种方式得到同一个方程，想让学生产生认知冲突，激发学生思考上述三个方程有什么联系。

【教学效果】 部分学生能回忆起推导椭圆标准方程的“移项平方”的化简方法，于是将方程

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2 \times 3 \text{ 化简为 } \frac{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{x-9} = \frac{1}{3}, \text{ 进一步发现了这两个方程是等价的关系。}$$



问题 3: 你能给椭圆下一个新的定义吗？能在椭圆的标准方程的化简过程中找寻点 P（点 P 为椭圆的任意点）到定点和到定直线的距离之比的一般形式吗？

【设计意图】 问题 3 是问题 2 的一般化，旨意为：化简方程 $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ ，得到

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\frac{a^2}{c} - x} = \frac{c}{a}, \text{ 通过类比, 获得椭圆的“第二定义”。}$$

【教学效果】 学生知道化简方程 $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ 的方法是“移项平方”，但在实际计算中却出现了两个主要问题：一是计算花费了大量时间，二是得到结果的学生很少。其实这两个问题出现的原因不在于化简方法的选取，而在于化简过程中对定点、定直线以及比值的探索 and 发现。由于学生对先前所学知识的掌握不牢，计算能力不高，故无法触及探索、发现的高度。



问题4：类比上述椭圆的“第二定义”的推导过程，在双曲线中是否也有类似的结论呢？你能否给三种圆锥曲线下一个统一的定义？

【设计意图】先通过前三个问题以及两个活动将椭圆的“第二定义”研究清楚，再运用类比的数学思想方法让学生自己归纳双曲线的“第二定义”，最后结合抛物线的定义将这三种圆锥曲线的定义进行统一，形成完整的“圆锥曲线统一定义”的概念。

【教学效果】大部分学生的思绪还停留在问题3的方程化简中，没有来得及消化复杂的化简过程，仅有很少一部分化简出结果的学生在尝试思考问题4。另外，由于课堂时间所剩无几，也无法带领学生一起思考。因此，课堂最后停留在椭圆的“第二定义”的给出，没有用一个统一的形式去思考三种曲线定义间的联系，与形成“圆锥曲线统一定义”这一目标相去甚远。



一、课堂再现——设计追求大胆创新

二、课后反思——教学应该根植于学

1.忽视学生的已有知识

2.忽视学生的思维能力

3.忽视学生的发展需求

三、教材研读——教师务必吃透课标

关于“统一定义”这部分内容，苏教

(1)教材第80页第11题，即上文“

(2)教材第86页第14题：在推导椭圆

其变形为 $\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\frac{a^2}{c} - x} = \frac{c}{a}$ ，你能解释

(3)教材第100页第13题：动点 $M(x,y)$ 到定点 $F(c,0)$ 的距离和它到定直线 $l: x = \frac{a^2}{c}$ 的距离之比是常数 $\frac{c}{a}$ ($c > a > 0$)，

求动点 M 的轨迹。

(4)教材第109页的“链接”内容“圆锥曲线的统一定义”。

四、教学改进——效果在于准确定位

1.已有知识确定教学起点

2.思维能力影响教学策略

3.发展需求奠定教学基调

数学教学通讯

投稿邮箱: sxjk@vip.163.com

> 课程教材教法

以“情”定标 因“材”施教

——对“圆锥曲线统一定义”公开课的反思与改进

宋恒欣 郝结红 南京师范大学附属扬子中学 210048

[摘要] 文章以“圆锥曲线统一定义”的课堂设计与改进为例,探明学生的已有知识、思维能力、发展需求是确定教学目标、实施教学策略的重要依据。

[关键词] 已有知识;思维能力;发展需求;教学改进

话题的缘起:在“由递推关系求数列通项公式”教学中,师生通过“前测小题+经典例题”一起回顾了概念,总结了求通项的基本方法.为了引导学生通过思维去穿透表面,触及本质,我们备课组在课后作业中精选一小题,为第二课时的解题教学做好铺垫:从比较小的一点切入,小中见大,透过表面现象,从本质上去认识问题、分析问题、解决问题.

题目:已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} + a_n = 2n - 3$, 若 $a_1 = 2$, 则 $a_8 - a_4 =$ _____.

解析:依题意得 $(a_{n+2} + a_{n+1}) - (a_{n+1} + a_n) = [2(n+1) - 3] - (2n - 3)$, 即 $a_{n+2} - a_n = 2$.

所以, $a_8 - a_4 = (a_8 - a_6) + (a_6 - a_4) = 2 + 2 = 4$.

在教学实践中,不少老师认为复习到这里对“由递推关系求数列通项公式”教学已经算是相当完善了,对学生来说有一比较完美的学习结果.然而,我们高三数学备课组在研究二轮复习时认为,二轮复习不仅仅要会做题,更要与学生一起体会题目背后所体现的必备知识和关键能力,形成方法,提升思维.鉴于这种理念与认识,有了下面的基于思维品质的高阶思维进阶教学实践活动.

基于思维品质的



高阶思维进阶教学

——以高考数学二轮复习题为例

江苏省南京师范大学附属扬子中学 郝结红 钱 健 张登林

基于数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析的数学核心素养可以说都与“思维”有着千丝万缕的联系,正如俗话说:数学是思维的体操.新的数学高考注重数学本质,突出理性思维,重点考查学生运用所学知识分析和解决问题的能力.理性思维在数学素养中起着最本质、最核心的作用.《教育部关于做好2021年普通高校招生工作的通知》指出,坚持把创新思维和学习能力考查渗透到命题全过程,落实“重思维、重应用、重创新”的命题要求,使高考由“解答试题”转向“解决问题”,而解决问题的基本手段是数学思维.因此,数学教学中“思维”培育无论怎么强化都不过分.

现以高考二轮复习的微专题“由递推关系求数列

仅仅要会做题,更要与学生一起体会题目背后所体现的必备知识和关键能力,形成方法,提升思维.鉴于这种理念与认识,有了下面的基于思维品质的高阶思维进阶教学实践活动.

1. 提出问题中发散思维, 开创思维的创新性

《教育部关于做好2021年普通高校招生工作的通知》指出:高考试题一定要增大探究性,扩大开放性,体现创新性,从独特的角度对学科知识进行多方位、深层次的考查,体现考生的个性品质和创新意识,鼓励有独特见解、有思想水平、有创新精神的答案.

教学片断1

提出问题:根据数列相关知识,请问你能对该题(注:上文题目)做怎样的改编?

案例1: 借助二次函数, 求解一元二次不等式

案例2: 函数的概念

案例3: 引入弧度制的必要性

案例4: 用三角函数刻画事物周期变化的实例

案例5: 函数单调性概念的抽象过程

案例6: 利用单位圆的对称性探索三角函数的诱导公式

案例7: 停车距离问题

案例8: “指数爆炸”的感知和理解

案例9: 向量投影

案例10: 复数的引入

案例11: 正方体截面的探究

案例12: 投掷骰子问题

案例13: 分层抽样

案例14: 阶梯电价的设计

案例15: 测量学校内、外建筑物的高度

案例16: 用向量方法研究距离问题

案例17: 二项式定理

案例18: 杨辉三角

案例19: 测量学校内、外建筑物的高度项目的过程性评价

案例20: 函数图象

案例21: 传令兵问题

案例22: 跑道问题

案例23: 距离问题

案例24: 四棱锥中的平行问题

案例25: 覆盖问题

案例26: 鞋号问题

案例27: 包装彩绳

案例28: 体重与脉搏

案例29: 估算地球周长

案例30: 影子问题

案例31: 圆柱体截面问题

案例32: 过河问题

案例33: 隧道长度

案例34: 迭代计算问题

案例35: 估计考生总数

案例36: 函数单调性主题教学设计

案例37: “互联网+”促进高中生数学学科核心素养发展的路径

案例

牛顿迭代法又称牛顿—拉夫逊方法，它是牛顿在 17 世纪提出的一种在实数集上近似求解方程根的一种方法．具体步骤如下：设 r 是函数 $y=f(x)$ 的一个零点，任意选取 x_0 作为 r 的初始近似值，过点 $(x_0, f(x_0))$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线 l_1 ，设 l_1 与 x 轴交点的横坐标为 x_1 ，并称 x_1 为 r 的 1 次近似值；过点 $(x_1, f(x_1))$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线 l_2 ，设 l_2 与 x 轴交点的横坐标为 x_2 ，并称 x_2 为 r 的 2 次近似值．一般的，过点 $(x_n, f(x_n)) (n \in \mathbf{N})$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线 l_{n+1} ，记 l_{n+1} 与 x 轴交点的横坐标为 x_{n+1} ，并称 x_{n+1} 为 r 的 $n+1$ 次近似值．设 $f(x)=x^3+x-1 (x \geq 0)$ 的零点为 r ，取 $x_0=0$ ，则 r 的 2 次近似值为 ▲ ；设 $a_n = \frac{3x_n^3 + x_n}{2x_n^3 + 1}$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n ．若任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ， $T_n < \lambda$ 恒成立，则整数 λ 的最小值为 ▲ ．

牛顿迭代法

收藏 | 1449 | 168

语音 编辑 讨论 上传视频

牛顿迭代法 (Newton's method) 又称为牛顿-拉夫逊 (拉弗森) 方法 (Newton-Raphson method) , 它是**牛顿**在17世纪提出的一种在**实数域**和**复数域**上近似求解方程的方法。

中文名	牛顿迭代法	别 名	牛顿-拉夫逊 (拉弗森) 方法
外文名	Newton's method	提出时间	17世纪

目录

- 产生背景
- 牛顿迭代公式
- matlab代码
 - 定义函数
 - 主程序
- C语言代码
- C++代码
- Python代码
- Java代码
- JavaScript代码
- Fortran代码
- 其他迭代算法
 - 欧几里德算法
 - 斐波那契数列

产生背景

语音 编辑

多数方程不存在求根公式, 因此求精确根非常困难, 甚至不可解, 从而寻找方程的近似根就显得特别重要。方法使用函数 $f(x)$ 的**泰勒级数**的前面几项来寻找方程 $f(x) = 0$ 的根。牛顿迭代法是求方程根的重要方法之一, 其最大优点是在方程 $f(x) = 0$ 的单根附近具有平方收敛, 而且该法还可以用来求方程的重根、复根, 此时线性收敛, 但是可通过一些方法变成**超线性收敛**。另外该方法广泛用于计算机编程中。

牛顿迭代公式

语音 编辑

设 r 是 $f(x) = 0$ 的根, 选取 x_0 作为 r 的初始近似值, 过点 $(x_0, f(x_0))$ 做曲线 $y = f(x)$ 的切线 L ,
 $L: y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, 则 L 与 x 轴交点的横坐标 $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, 称 x_1 为 r 的一次近似值。过点 $(x_1, f(x_1))$ 做曲线 $y = f(x)$ 的切线, 并求该切线与 x 轴交点的横坐标 $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, 称 x_2 为 r 的二次近似值。重复以上过程, 得 r 的近似值序列, 其中, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 称为 r 的 $n + 1$ 次近似值, 上式称为**牛顿迭代公式**。

用牛顿迭代法解**非线性方程**, 是把非线性方程 $f(x) = 0$ 线性化的一种近似方法。把 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内展开成泰勒

思考·运用

探究·拓展

问题与探究

算两次

我们曾用组合模型发现了组合恒等式：

$$C_n^m = C_n^{n-m},$$

$$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}.$$

这里所使用的方法，实际上是将一个量用两种方法分别算一次，由结果相同得到等式，这是一种非常有用的思想方法，叫作“算两次”。对此，我们并不陌生，如列方程时就要从不同的侧面列出表示同一个量的代数式，几何中常用的等积法也是“算两次”的典范。再如，我们还可以用这种方法，结合二项式定理得到很多组合恒等式，如由等式

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$$

可知左边 x^n 的系数为 C_{2n}^n ，而右边

$$(1+x)^n(1+x)^n = (C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \cdots + C_n^nx^n)(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \cdots + C_n^nx^n),$$

其中 x^n 的系数为

$$C_n^0C_n^n + C_n^1C_n^{n-1} + C_n^2C_n^{n-2} + \cdots + C_n^nC_n^0 \\ = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \cdots + (C_n^n)^2.$$

由 $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$ 恒成立，可得

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

(1) 你能用“算两次”的方法证明等式 $A_n^m + mA_n^{m-1} = A_{n+1}^m$ 吗？

(2) 你能通过“算两次”独立发现新的组合恒等式吗？

$C_r^n (r=0,1,\cdots,n)$ 叫作第 $r+1$ 项的**二项式系数**。

思考

对于 $(a+b)^n$ ，在合并同类项之前，其展开式共有多少项？

例 1 利用二项式定理展开下列各式：

链接

运用空间向量求异面直线间的距离

如图 6-3-14，设 A, P 分别为异面直线 a, b 上的点， n 是与直线 a, b 都垂直的向量，从而异面直线 a, b 间的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|},$$

即为向量 $\overrightarrow{AP}$ 在向量 $\mathbf{n}$ 上的投影向量的模。

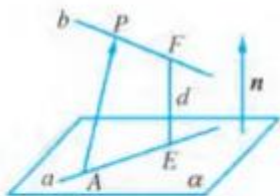
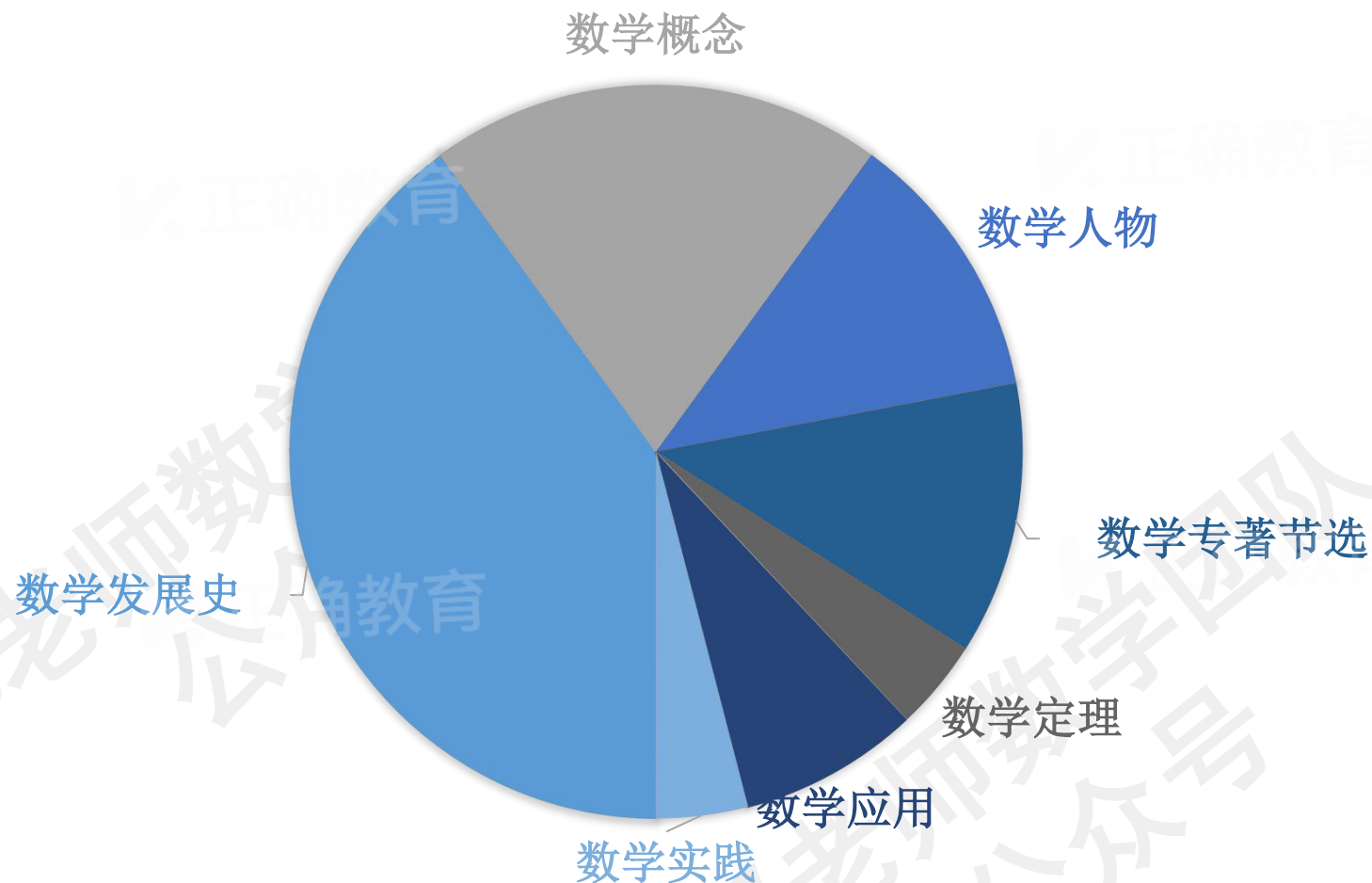


图 6-3-14

“阅读”栏目共设置了25篇短文，每篇均是多维度呈现的，包含一名或多名数学家的介绍、他(他们)在某一领域研究成果的展示、相关成果的运用等。



问题与探究

数列的转化

若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1, a_2=5$, 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$, 求 a_n 的表达式.

解 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 因为

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n,$$

所以, 存在 $\lambda, q \in \mathbf{R}$, 使得

$$a_{n+2} + \lambda a_{n+1} = q(a_{n+1} + \lambda a_n),$$

即

$$a_{n+2} = (q - \lambda)a_{n+1} + q\lambda a_n.$$

$$\text{取 } \begin{cases} q - \lambda = 4, \\ q\lambda = -4, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} q = 2, \\ \lambda = -2. \end{cases}$$

$$\text{所以 } a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n).$$

$$\text{又因为 } a_1=1, a_2=5, \text{ 所以 } a_2 - 2a_1 = 3 \neq 0,$$

$$\text{所以 } a_{n+1} - 2a_n \neq 0, \text{ 从而 } \frac{a_{n+2} - 2a_{n+1}}{a_{n+1} - 2a_n} = 2.$$

因此, 数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 是以 3 为首项, 2 为公比的等比数列.

$$\text{于是 } a_{n+1} - 2a_n = 3 \times 2^{n-1}. \quad (*)$$

方法 1 将 (*) 式两边同除以 2^{n+1} , 得

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{3}{4},$$

所以数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 成等差数列, 其首项为 $\frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}$, 公差为 $\frac{3}{4}$.

$$\text{于是 } \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2} + (n-1) \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}n - \frac{1}{4},$$

$$\text{即 } a_n = (3n-1) \cdot 2^{n-2}.$$

方法 2 (*) 式即 $a_{n+1} = 2a_n + \frac{3}{2} \times 2^n$.

设 $a_{n+1} + p(n+1) \cdot 2^{n+1} = 2(a_n + pn \cdot 2^n)$, 其中 p 是待定常数, 所以

$$a_{n+1} = 2a_n - 2p \cdot 2^n.$$

$$\text{取 } -2p = \frac{3}{2}, \text{ 解得 } p = -\frac{3}{4}, \text{ 所以}$$

$$a_{n+1} - \frac{3}{4}(n+1) \cdot 2^{n+1} = 2\left(a_n - \frac{3}{4}n \cdot 2^n\right).$$

选择性必修第一册 数学

$$\text{因为 } a_1=1, \text{ 所以 } a_1 - \frac{3}{4} \times 1 \times 2^1 = -\frac{1}{2} \neq 0, \text{ 从而 } a_n - \frac{3}{4}n \cdot 2^n \neq 0,$$

$$2^n \neq 0,$$

所以

$$\frac{a_{n+1} - \frac{3}{4}(n+1) \cdot 2^{n+1}}{a_n - \frac{3}{4}n \cdot 2^n} = 2,$$

即数列 $\left\{a_n - \frac{3}{4}n \cdot 2^n\right\}$ 成等比数列, 其首项为 $-\frac{1}{2}$, 公比为 2.

$$\text{于是 } a_n - \frac{3}{4}n \cdot 2^n = -\frac{1}{2} \times 2^{n-1},$$

即

$$a_n = (3n-1) \cdot 2^{n-2}, n \in \mathbf{N}^*.$$

请仿照上面的解法, 思考:

已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1, a_2=1$, 且对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, 求 a_n 的表达式.

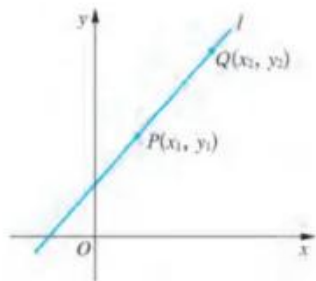
基于思维品质的高阶思维进阶教学 ——以高考数学二轮复习题为例 作者: 郝结红、钱健、张登林

问题与探究

向量方法在直线中的应用

借助平面直角坐标系,可以建立点与坐标、直线与方程之间的对应关系,而向量也是沟通几何与代数的一种重要工具,利用向量也可以有效地研究与直线、直线方程有关的问题.那么,如何利用向量来研究与直线有关的问题呢?

如图,设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 是直线 l 上不同的两点,直线 l 上的向量 $\overrightarrow{PQ}$ 以及与之平行的非零向量都称为直线 l 的 **方向向量**. 直线 l 的一个方向向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的坐标是 $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.



当直线 $l' \perp l$ 时,直线 l' 的方向向量称为直线 l 的 **法向量**.

对于直线 $l: Ax + By + C = 0$ (A, B 不同时为 0), 则

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + C = 0, \\ Ax_2 + By_2 + C = 0. \end{cases}$$

从而得 $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0$, 即向量 $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ 与向量 $(-B, A)$ 平行, 与向量 (A, B) 垂直, 因此, 向量 $(-B, A)$ 是直线 l 的一个方向向量, 向量 (A, B) 是直线 l 的一个法向量.

问题 1 已知直线 l 经过点 $P_0(x_0, y_0)$, 且它的一个法向量为 $m = (A, B)$ (A, B 不同时为 0), 求直线 l 的方程.

解 设 $P(x, y)$ 为直线 l 上的任意一点.

【上课+论文】基于四能的章末问题与探究教学实践与思考——以向量方法在直线中的应用为例（扬子中学钱健）

问题与探究

算两次

我们曾用组合模型发现了组合恒等式：

$$C_n^m = C_n^{n-m},$$

$$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}.$$

这里所使用的方法,实际上是将一个量用两种方法分别算一次,由结果相同得到等式,这是一种非常有用的思想方法,叫作“算两次”.对此,我们并不陌生,如列方程时就要从不同的侧面列出表示同一个量的代数式,几何中常用的等积法也是“算两次”的典范.再如,我们还可以用这种方法,结合二项式定理得到很多组合恒等式,如由等式

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$$

可知左边 x^n 的系数为 C_{2n}^n ,而右边

$$\begin{aligned} & (1+x)^n(1+x)^n \\ &= (C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \cdots + C_n^nx^n)(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \cdots + C_n^nx^n), \end{aligned}$$

其中 x^n 的系数为

$$\begin{aligned} & C_n^0C_n^n + C_n^1C_n^{n-1} + C_n^2C_n^{n-2} + \cdots + C_n^nC_n^0 \\ &= (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \cdots + (C_n^n)^2. \end{aligned}$$

由 $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$ 恒成立,可得

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

(1) 你能用“算两次”的方法证明等式 $A_n^m + mA_n^{m-1} = A_{n+1}^m$ 吗?

(2) 你能通过“算两次”独立发现新的组合恒等式吗?

数学思想方法:

“算两次”、“特殊化”、“一般化”

数学核心素养:

直观想象, 数学抽象, 逻辑推理

学生的潜能巨大:

$$C_n^m = C_k^k \cdot C_{n-k}^{m-k} + C_k^{k-1} \cdot C_{n-k}^{m-k+1} + C_k^{k-2} \cdot C_{n-k}^{m-k+2} + \cdots + C_k^1 \cdot C_{n-k}^{m-1} + C_k^0 \cdot C_{n-k}^m,$$

其中 $k, m, n \in \mathbb{N}^*$, 并且 $k \leq m \leq n$.

12

命题风险

命题人最害怕什么？如何规避？

一次失败的命题——例谈命题的严谨性

10. 已知函数 $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}$ ，则下列正确的是

- A. 若 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, m]$ 上最大值为 $\frac{3}{2}$ ，则 $m \geq \frac{\pi}{3}$.
- B. 若 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, m]$ 上有三个极值点，则 $\frac{5\pi}{6} \leq m < \frac{4\pi}{3}$.
- C. 若方程 $f(x) = \frac{2}{3}$ 在 $(0, \pi)$ 上的解为 x_1, x_2 ，则 $\cos(x_1 - x_2)$ 的值为 $\frac{1}{6}$.
- D. 若 $f(x)$ 在 $[0, m]$ 上的值域为 $[0, \frac{3}{2}]$ ，则 $m \geq \frac{\pi}{3}$.

答案：ABC

争议 1：加“恰有”

争议 2：开区间端点算不算极值点，有没有考查的价值

争议 3：D 选项充分条件，算不算正确答案？

17. (本题满分 10 分)

已知四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于点 E , $AB=2BC=2CD=4$.

(1) 若 $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$, $AC=3$, 求 $\cos \angle CAD$;

(2) 若 $AE=CE$, $BE=\sqrt{6}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

初稿

17. (本小题满分 10 分)

已知四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于点 E , $AB=2BC=2CD=4$.

(1) 若 $\angle ADC = \frac{2\pi}{3}$, $AC=3$, 求 $\cos \angle CAD$;

(2) 若 $AE=CE$, $BE=2\sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

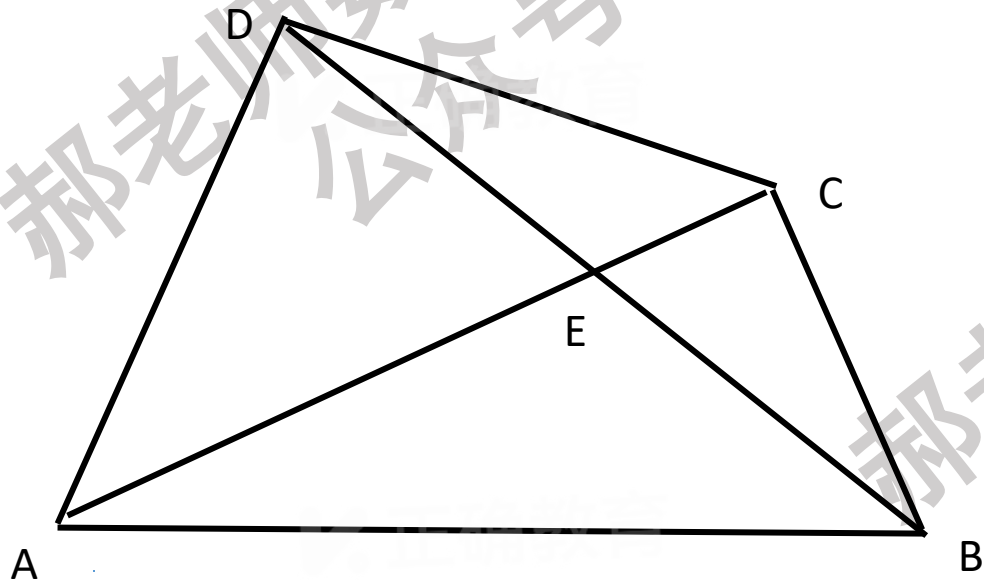
终稿

【初稿】17. (本题满分 10 分)

已知四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于点 E , $AB=2BC=2CD=4$.

(1) 若 $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$, $AC=3$, 求 $\cos \angle CAD$;

(2) 若 $AE=CE$, $BE=\sqrt{6}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

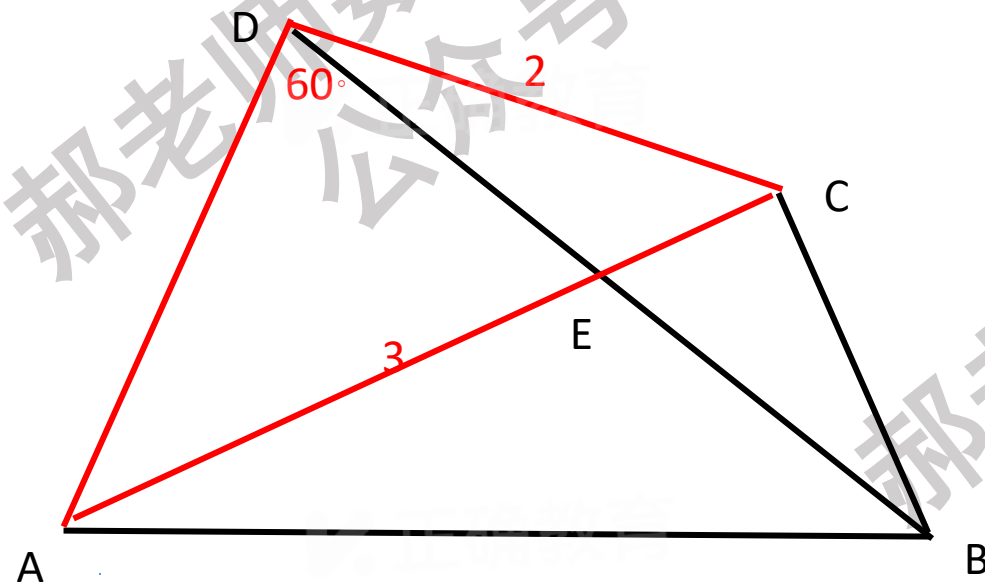


【初稿】17. (本题满分 10 分)

已知四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于点 E , $AB=2BC=2CD=4$.

(1) 若 $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$, $AC=3$, 求 $\cos \angle CAD$;

(2) 若 $AE=CE$, $BE=\sqrt{6}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

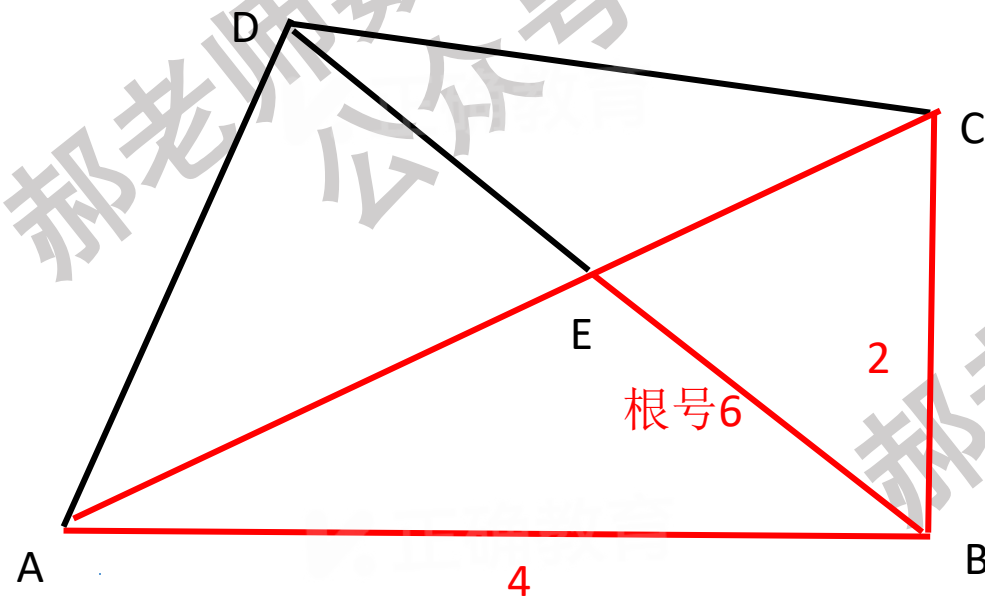


【初稿】17. (本题满分 10 分)

已知四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于点 E , $AB=2BC=2CD=4$.

(1) 若 $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$, $AC=3$, 求 $\cos \angle CAD$;

(2) 若 $AE=CE$, $BE=\sqrt{6}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

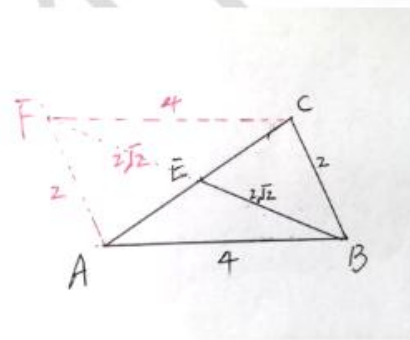


(2)法一：（在两个小三角形中分别运用余弦定理）设 $AE=CE=x$, $\angle AEB=\alpha$. 在 $\triangle ABE$ 中, 由余弦定理得 $8+x^2-4\sqrt{2}x\cos\alpha=16$. 在 $\triangle BCE$ 中, 由余弦定理得 $8+x^2+4\sqrt{2}x\cos\alpha=4$. 两式相加, 解得 $x=\sqrt{2}$, 即 $AE=CE=\sqrt{2}$. 所以 $\cos\alpha=-\frac{3}{4}$, $0<\alpha<\pi$, $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{7}}{4}$. 所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ABE}=2\times\frac{1}{2}AE\cdot BE\cdot\sin\alpha=\sqrt{7}$.

法二：（在一个小三角形和大三角形中分别运用余弦定理）设 $AE=CE=x$, $\cos\angle BAE=\frac{x^2+4^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times 4x}$, 又 $\cos\angle BAE=\frac{(2x)^2+4^2-2^2}{2\times 4\times 2x}$, 所以 $\frac{x^2+4^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times 4x}=\frac{(2x)^2+4^2-2^2}{2\times 4\times 2x}$, 解得 $x=\sqrt{2}$, 以下同上.

法三：（向量法——如同课本上余弦定理的证明方法）因为 $AE=CE$, 所以 $\vec{BE}=\frac{1}{2}(\vec{BA}+\vec{BC})$, 两边平方得 $4\vec{BE}^2=\vec{BA}^2+\vec{BC}^2+2|\vec{BA}|\cdot|\vec{BC}|\cos\angle ABC$, 即 $32=16+4+2\times 4\times 2\cos\angle ABC$, 得 $\cos\angle ABC=\frac{3}{4}$, $0<\angle ABC<\pi$, 所以 $\sin\angle ABC=\sqrt{1-\cos^2\angle ABC}=\frac{\sqrt{7}}{4}$. 所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=\frac{1}{2}\times 4\times 2\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\sqrt{7}$.

法四：（补形法）如图, 将三角形 ABC 补成平行四边形 $ABCF$, 用余弦定理即可求出角度, 进而求出面积.



法五：（由三角形中线长公式、阿婆罗尼斯定理），可知 $(2BE)^2+AC^2=2(AB^2+BC^2)$, 得 $AC=2\sqrt{2}$. 用余弦定理即可求出角度, 进而求出面积.

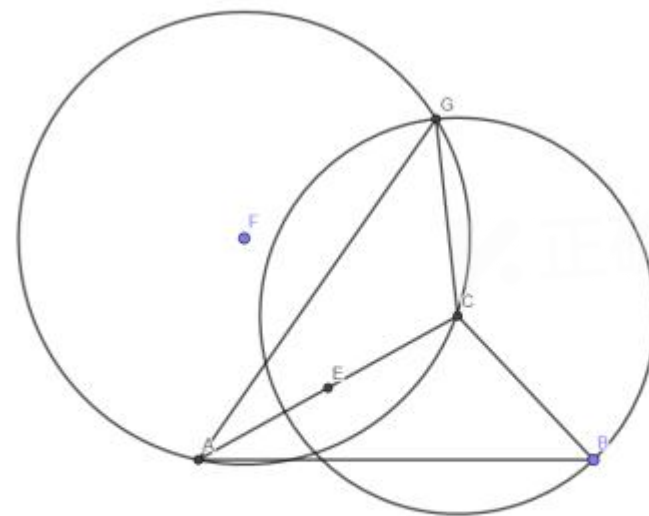
【评析】属于中档题, 要求自行画图, 在复杂图形中分解出需要的三角形, 再解三角形. 方法较多, 体现了高考“核心价值、学科素养、关键能力、必备知识”的考查内容, 是一道好题.

【初稿】17. (本题满分 10 分)

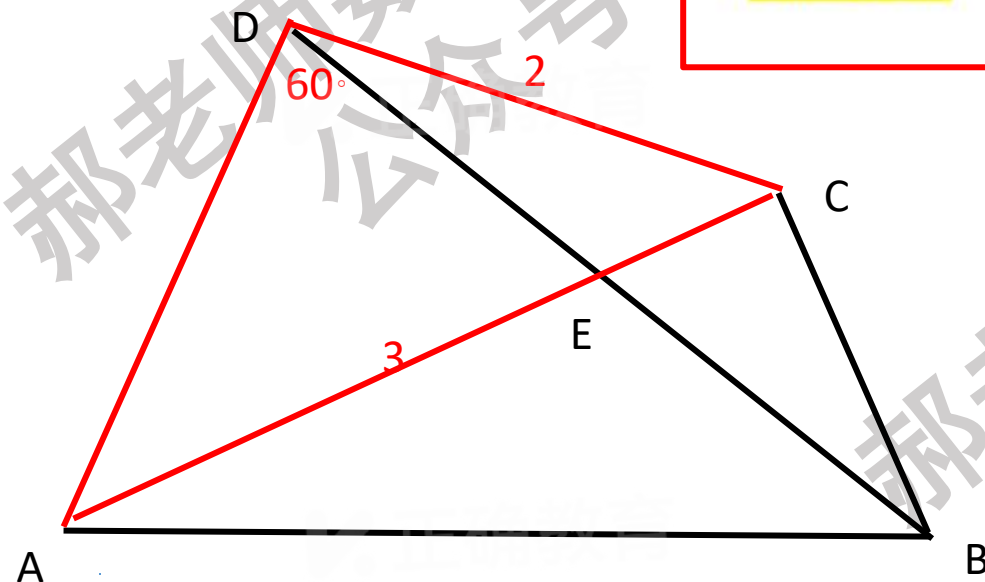
已知四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于点 E , AB

(1) 若 $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$, $AC = 3$, 求 $\cos \angle CAD$;

(2) 若 $AE = CE$, $BE = \sqrt{6}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.



凹四边形

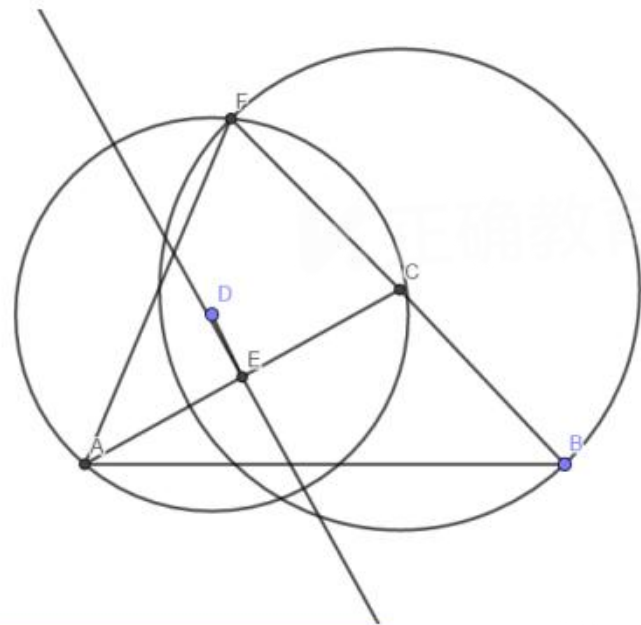


【初稿】17. (本题满分 10 分)

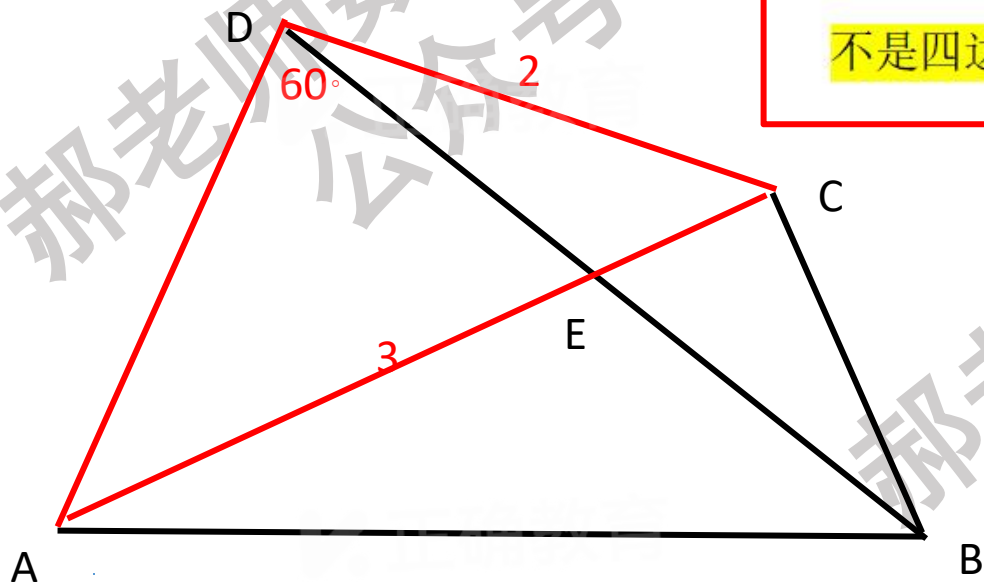
已知四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于点 E , $AB=2$

(1) 若 $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$, $AC=3$, 求 $\cos \angle CAD$;

(2) 若 $AE=CE$, $BE=\sqrt{6}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.



不是四边形, 而是三角形

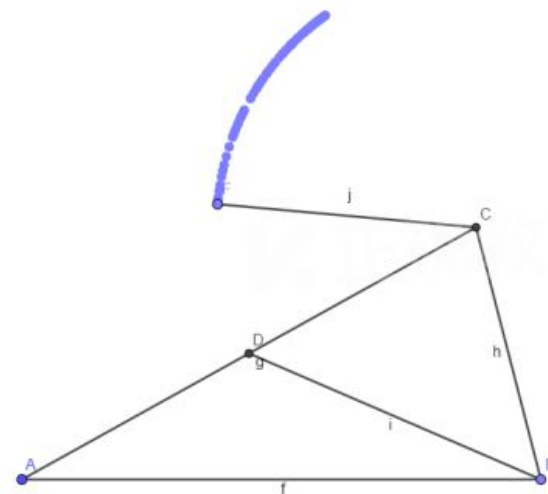


【初稿】17. (本题满分 10 分)

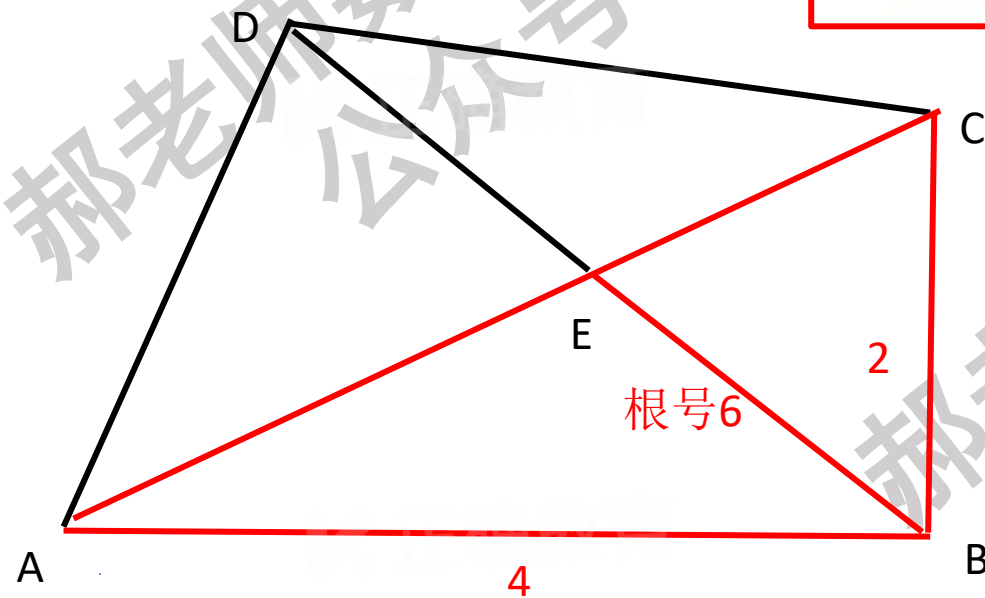
已知四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于点 E , $AB=2BC$

(1) 若 $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$, $AC=3$, 求 $\cos \angle CAD$;

(2) 若 $AE=CE$, $BE=\sqrt{6}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.



第二问四边形不存在。



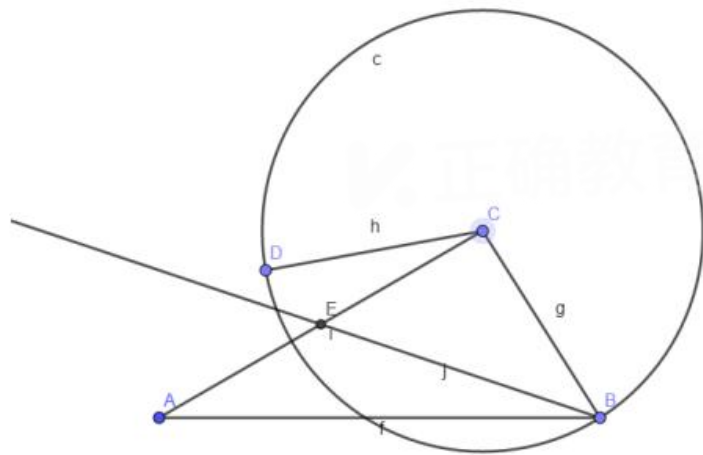
【初稿】 17. (本题满分 10 分)

已知四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于点 E , $AB=2BC$

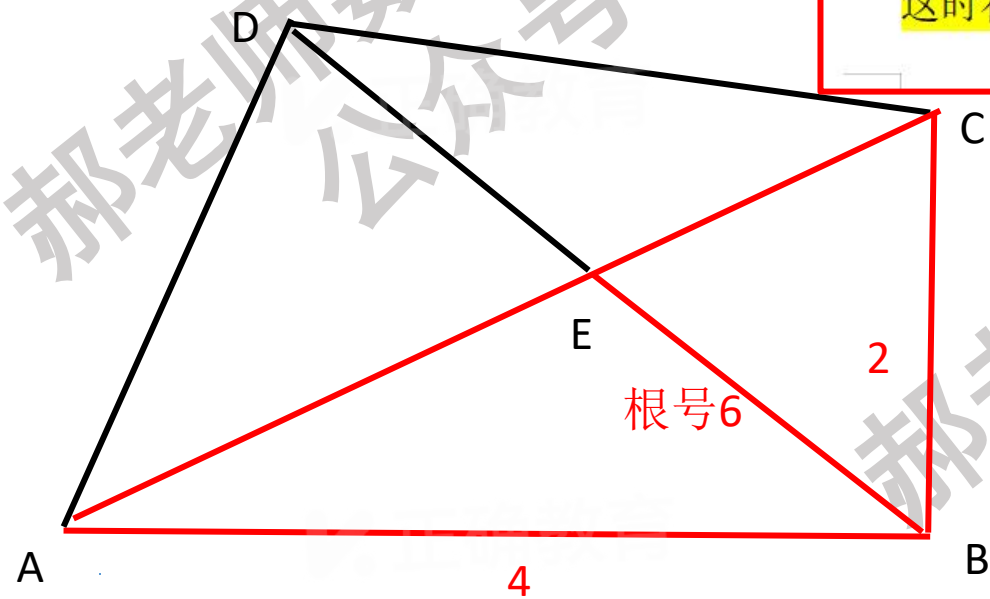
(1)若 $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$, $AC = 3$, 求 $\cos \angle CAD$;

(2)若 $AE=CE$, $BE=\sqrt{6}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

这时不存在



这时存在, CE 必须小于 CD



【初稿】17. (本题满分 10 分)

已知四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于点 E , $AB=2BC=2CD=4$.

(1) 若 $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$, $AC=3$, 求 $\cos \angle CAD$;

(2) 若 $AE=CE$, $BE=\sqrt{6}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【终稿】17. (本小题满分 10 分)

已知四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于点 E , $AB=2BC=2CD=4$.

(1) 若 $\angle ADC = \frac{2\pi}{3}$, $AC=3$, 求 $\cos \angle CAD$;

(2) 若 $AE=CE$, $BE=2\sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

案例

2019 届高三年级第二次模拟考试:

第 11 题:

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(-1, 0)$, $B(5, 0)$. 若圆 $M: (x-4)^2 + (y-m)^2 = 4$ 上存在唯一点 P , 使得直线 PA , PB 在 y 轴上的截距之积为 5, 则实数 m 的值为

▲ .

解: 设 $P(x, y)$, 则 $\frac{y}{x+1} \cdot \frac{-5y}{x-5} = 5$, $x \neq -1$ 且 $x \neq 5$ 即除去两点 $(-1, 0)$ 及 $(5, 0)$

整理得 $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$, 即 $(x-2)^2 + y^2 = 9$,

由题意得 $\sqrt{2^2 + m^2} = 1$ 或 $\sqrt{2^2 + m^2} = 5$, 或 $(-1-4)^2 + m^2 = 4$ 或 $(5-4)^2 + m^2 = 4$,

解得 $m = \pm\sqrt{21}$. 或 $m = \pm\sqrt{3}$

案例

2016 届高三年级第三次模拟考试第 15 题：

在 $\triangle ABC$ 中，已知 a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边．若向量 $\mathbf{m} = (a, \cos A)$ ，向量 $\mathbf{n} = (\cos C, c)$ ，且 $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 3b \cos B$ ．

(1) 求 $\cos B$ 的值；

$$\cos B = \frac{1}{3}$$

(2) 若 a, b, c 成等比数列，求 $\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan C}$ 的值．

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + c^2 - ac}{2ac} \geq \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 B = \sin A \cdot \sin C, \quad \sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan C} = \frac{\sin B}{\sin A \cdot \sin C} = \frac{1}{\sin B} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

案例

2022 年全国高考乙卷(理科) 第 11 题:

双曲线 C 的两个焦点 F_1, F_2 , 以 C 的实轴为直径的圆记为 D , 过 F_1 作 D 的切线与 C 交于 M, N 两点, 且 $\cos \angle F_1 N F_2 = \frac{3}{5}$, 则 C 的离心率为

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

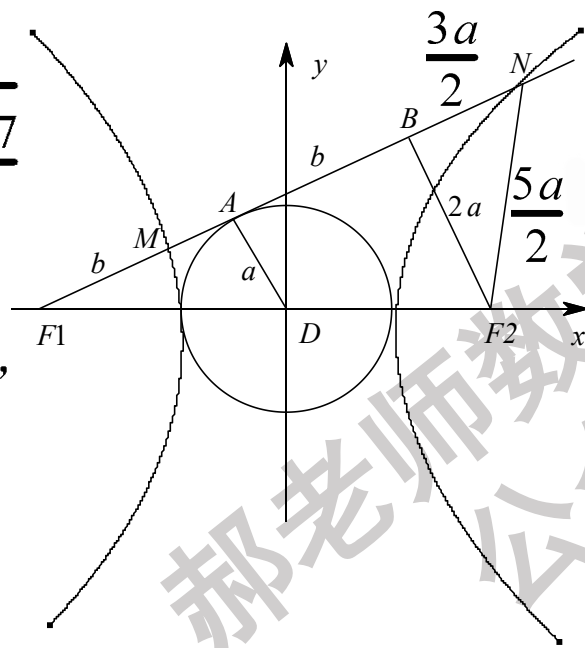
B. $\frac{3}{2}$

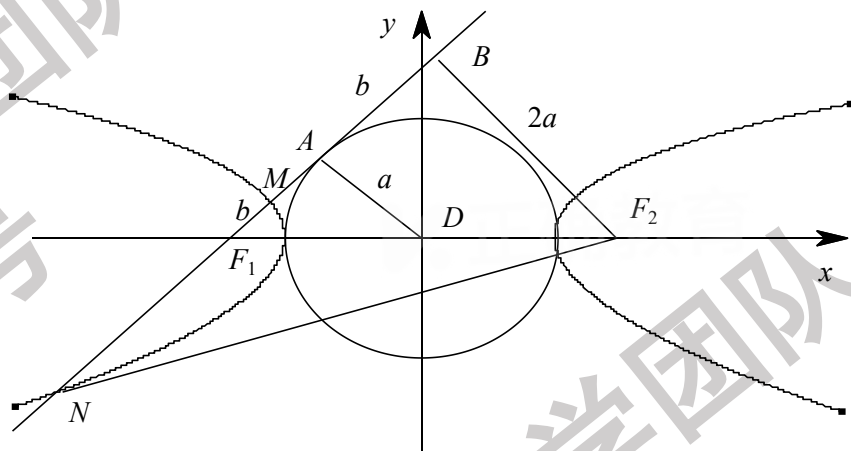
C. $\frac{\sqrt{13}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{17}}{2}$

由双曲线定义, $|F_1 N| - |F_2 N| = 2a$, 则 $2b + \frac{3a}{2} - \frac{5a}{2} = 2a$,

即 $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$, 所以 $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$. 故选 C.





由双曲线定义, $NF_2 - NF_1 = \frac{5a}{2} - (\frac{3a}{2} - 2b) = 2a$,

$$\text{所以 } a = 2b, e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

13

命题目标

知识能力素养，如何通过命题体现

二、学科内部分项表现

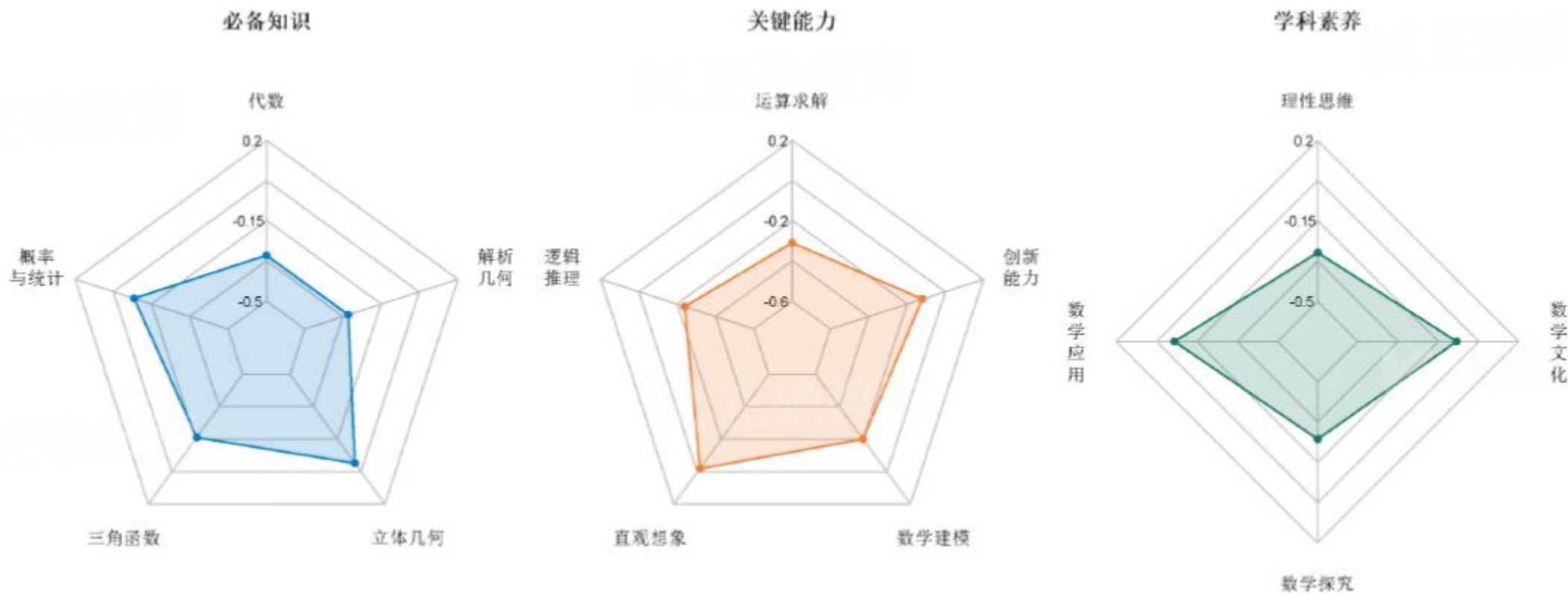
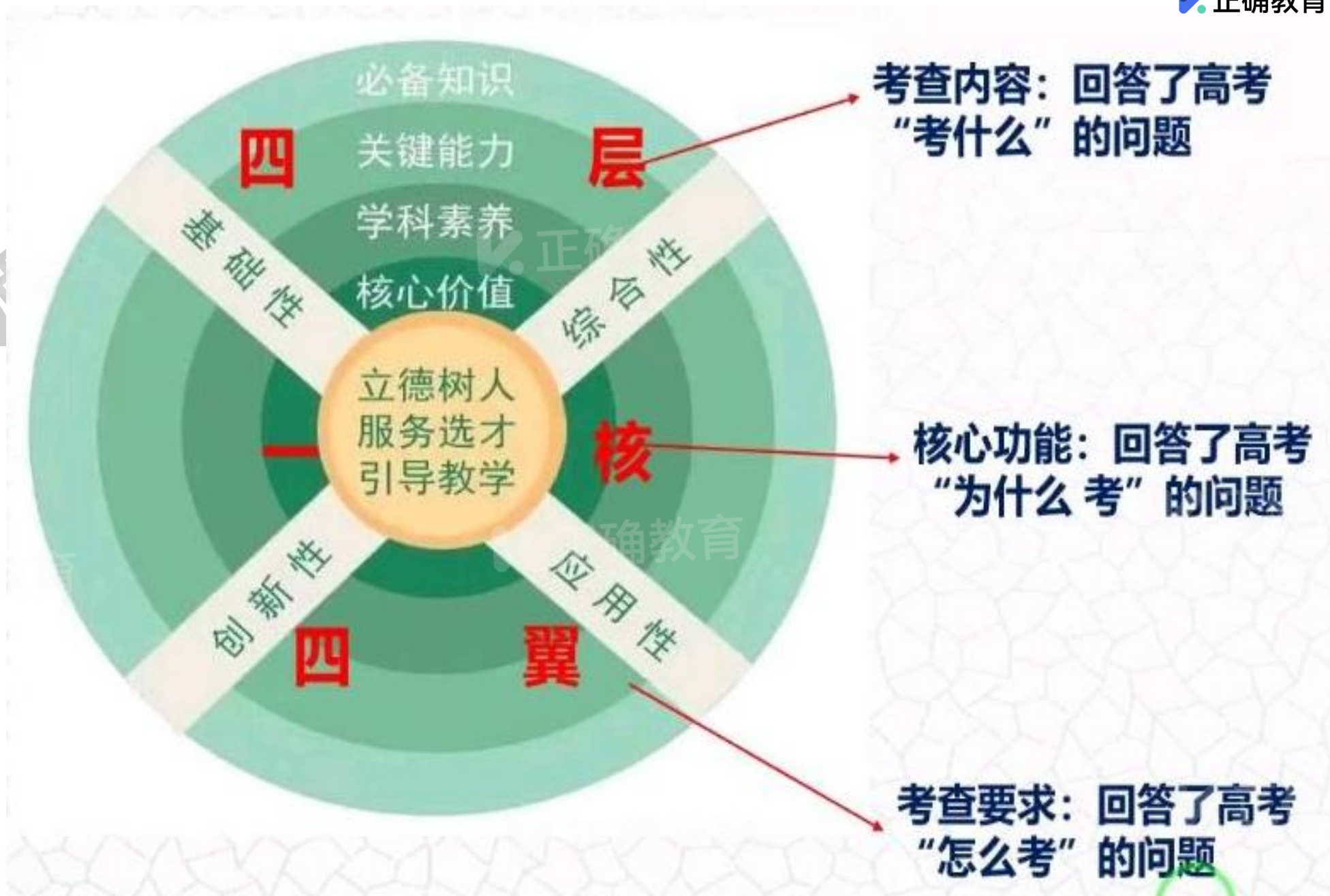


图 2.1 考生高考考查内容得分相对全省同类校的表现

注：图中以本校该科目各分项均分相对全省同类校的优势系数来呈现本校考生在高考考查内容上的综合表现。数值大于 0，表示该分项具有优势，数值小于 0，表示该分项具有劣势。数值越大，表明本校该分项相对全省同类校的表现越好。

中国高考评价体系



2024年第7期

中国考试
Journal of China Examinations

No. 7, 2024

新高考十年数学科考试内容改革： 成就、挑战与转向

任子朝
(教育部教育考试院, 北京 100084)

摘要: 新高考启动十年来,数学科贯彻高考内容改革要求,在考查目标、考查内容、考查要求、试题形式、试卷结构、难度调控等方面持续深化改革,加强数学思维和核心素养考查,进一步增强学科育人功能,提升人才选拔质量。面对拔尖创新人才选拔培养等新要求,针对学生能力水平差

2024年第7期

中国考试
Journal of China Examinations

No. 7, 2024

优化试卷结构设计 突出思维能力考查 ——2024年高考数学全国卷试题评析

教育部教育考试院

摘要: 2024年高考数学试题落实高考内容改革要求,贯彻考主干、考能力、考素养,重思维、重创新、重应用的指导思想,采用全新的试卷结构,减少试题数量,降低计算量,创新试题设计,加强思维考查力度,强化素养导向,服务拔尖创新人才选拔,助推素质教育发展。

关键词: 高考内容改革; 高考数学; 思维能力; 拔尖创新人才选拔

44

数学通报

2024年 第63卷 第6期

强调灵活考查思维 聚焦创新人才选拔^①

——2024年高考数学新课标卷评析

赵 轩 翟嘉祺 郭淑媛

(教育部教育考试院 100084)

2024年是第四批改革省份新高考落地之年,共有22个省份使用新课标I、II卷。2024年高考数学深入贯彻党的二十大精神和习近平总书记关于教育的重要论述,积极落实《深化新时代教育评

与掌握^②。基础性考查也不意味着题目难度一定很低,较高难度的题目同样可以很好考查对于基础知识、基本概念的理解和掌握。如果对于知识、概念、原理等达到了真懂会用的掌握程度,无论问



(一) 根据考试特点编制命题双向细目表

题号	知识点	关键能力	数学学科 核心素养	考查要求 (四翼)	学业质 量水平	预期难度
1	集合运算	符号理解能力	数学运算	基础性	水平一	0.7
8	随机事件的独立性	阅读理解能力 演绎推理能力	数学抽象 逻辑推理 数学运算 数学建模	创新性	水平三	0.4
19	解三角形	形象思维能力 演绎推理能力 语言表达能力	直观想象 逻辑推理 数学运算	综合性	水平二	0.6
22	函数与导数	符号理解能力 信息转化能力 形象思维能力 演绎推理能力	数学抽象 直观想象 逻辑推理 数学运算	创新性	水平三	0.2
合计						0.65

试题结构	知识点名称	识记	理解	应用	分析	综合	评价	满分	评估难度
单选题1	直线		✓					5	0.9
单选题2	排列组合			✓				5	0.8
单选题3	空间向量		✓					5	0.8
单选题4	数列				✓			5	0.6
单选题5	概率			✓				5	0.7
单选题6	导数		✓					5	0.6
单选题7	解析几何					✓		5	0.4
单选题8	函数零点				✓			5	0.4
多选题9	双曲线	✓						5	0.9
多选题10	数列		✓					5	0.7
多选题11	二项式定理				✓			5	0.6
多选题12	概率			✓				5	0.4
填空题13	二项式定理	✓						5	0.9
填空题14	排列组合			✓				5	0.8
填空题15	离心率				✓			5	0.6
填空题16	导数					✓		5	0.3
解答题17	直线与圆		✓					10	0.9
解答题18	数列				✓			12	0.7
解答题19	概率统计			✓				12	0.7
解答题20	立体几何		✓					12	0.7
解答题21	导数					✓		12	0.5
解答题22	圆锥曲线					✓		12	0.4

表 2 2025 年 I 卷核心素养评价表

数学核心素养												
题号	关键能力						数学思想					
	数学运算	数学推理	空间观念	数据分析	数学应用	数学创新	化归	数形结合	分类讨论	函数与方程	特殊与一般	随机与推断
1	✓											
2	✓											
3	✓	✓										
4	✓	✓						✓				
5	✓	✓					✓					
6	✓	✓		✓	✓	✓		✓				
7	✓	✓					✓	✓	✓			
8	✓	✓					✓		✓	✓	✓	
9	✓	✓	✓				✓	✓		✓		
10	✓	✓						✓		✓		
11	✓	✓								✓	✓	
12	✓	✓						✓				
13	✓	✓								✓		
14	✓	✓			✓				✓		✓	✓
15	✓			✓								✓
16	✓	✓								✓	✓	
17	✓	✓	✓			✓	✓	✓				
18	✓	✓	✓					✓		✓	✓	
19	✓	✓				✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓



请输入你想搜索的题目

搜索

去重化题库总量: 1309.61万题 24h更新: 11327题



标准卷



我的答题卡



我的题库



投稿(赚现金)

高中数学

首页

章节

知识点

名校试卷

智能选题

细目表选题

用户精选

专题

高考- 真题

每周好题

独家视频

正确云

位置: 首页 > 创建细目表

细目表出题视频帮助

创建细目表

我的细目表

请输入试卷标题

2025年10月期中复习卷

出题偏好: ☐ 优先最新试题 ☒ 优先最热试题

挑题方式: ☐ 知识点选题 ☒ 章节选题

苏教版 (2019)

出题范围: ☐ 必修第一册 ☒ 必修第二册 ☒ 选择性必修第一册 ☐ 选择性必修第二册

题型选择: ☒ 选择题 ☒ 多项选择题 ☐ 填空题 ☐ 双空题 ☐ 解答题

题号	章节	难度系数	操作
选择题		试题数量: - 8 +	
1	12.2 复数的运算 ×	+ 选择章节 容易(0.9) ▾	选题 删除
2	10.2 二倍角的三角函数 ×	+ 选择章节 容易(0.9) ▾	选题 删除
3	9.2.3 向量的数量积 ×	+ 选择章节 容易(0.9) ▾	选题 删除
4	13.2 基本图形位置关系 ×	+ 选择章节 容易(0.9) ▾	选题 删除
5	1.3两条直线的平行与垂直 ×	+ 选择章节 较易(0.7) ▾	选题 删除
6	1.5.2 点到直线的距离 ×	+ 选择章节 较易(0.7) ▾	选题 删除
7	2.1 圆的方程 ×	+ 选择章节 中等(0.5) ▾	选题 删除
8	2.3 圆与圆的位置关系 ×	+ 选择章节 较难(0.3) ▾	选题 删除
多项选择题		试题数量: - 3 +	
9	第14章 统计 × 第15章 概率 ×	+ 选择章节 全部 ▾	选题 删除
10	第1章 直线与方程 ×	+ 选择章节 全部 ▾	选题 删除
11	第1章 直线与方程 × 第2章 圆与方程 ×	+ 选择章节 全部 ▾	选题 删除
填空题		试题数量: - 1 +	
12	+ 选择章节	全部 ▾	选题 删除
解答题		试题数量: - 1 +	
13	+ 选择章节	全部 ▾	选题 删除

14

团队合作 很多好想法，来源于团队的碰撞

第三层次：双周教研——追求品位

【教研预告】2022年新高考1卷研讨

扬子中学数学组 郝老师数学团队 2022年09月06日 06:08 江苏

9月6日数学组双周教研安排

1、教研主题：2022年新高考1卷研讨

2、具体安排：（主持人郝结红）

（1）13:30—13:50钱华银老师讲座《夯实基础精准发力——有感于2022高考1卷数学试题》

（2）13:50—14:10王荣芳老师讲座《解析高考数学题的脉络》

（3）14:10—14:30卓杰老师讲座《对2022年全国新高考1卷解析几何问题的思考与教学建议》

（4）14:30—15:00全体研讨，自由发言

（5）15:00—15:10郑花青校长、许章永组长总结

3、几点说明：

（1）建议每位老师提前将新高考1卷做一遍，力争参加活动有收获。要求：90后的新老师将写好的试卷，纸质版带过来。80后的老师提前思考，准备一些问题，现场请教。70后的老师精心研究，现场答疑解惑。

（2）请讲座老师精心准备，自选切入点，不需要面面俱到，每人控制在20分钟以内，尽量干货。建议从两个方面思考：一是试题分析，二是教学对策。

（3）学校给讲座老师颁发《校级讲座证书》，讲座作品欢迎授权到公众号，供同行学习。

【教研预告】“多三角形问题”研讨

【说课】多三角形问题的几点思考（程伟老师）

【微专题课件】多三角形问题（史玉梅老师）

【视频讲解】如何解多个三角形（钱健老师PK郝结红老师PK张登林老师）

4. 如图，四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形， $SD \perp AD$ ， $AD=2$ ， $DC=4$ ， $SD=2\sqrt{3}$ ，点 M 在侧棱 SC 上， $BM=3$ ， $\angle ABM=60^\circ$ 。

- (1) 证明： M 是侧棱 SC 的中点；
- (2) 求二面角 $S-AM-B$ 的余弦值。

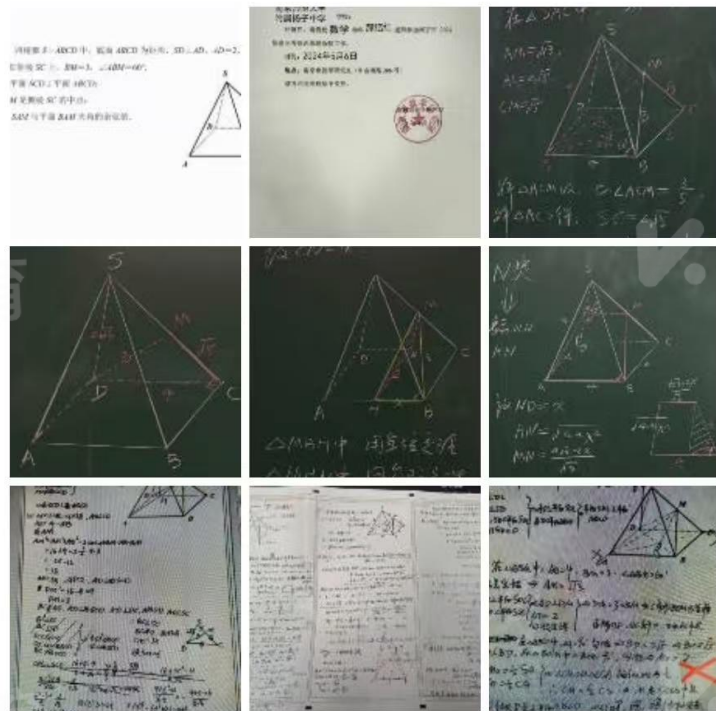
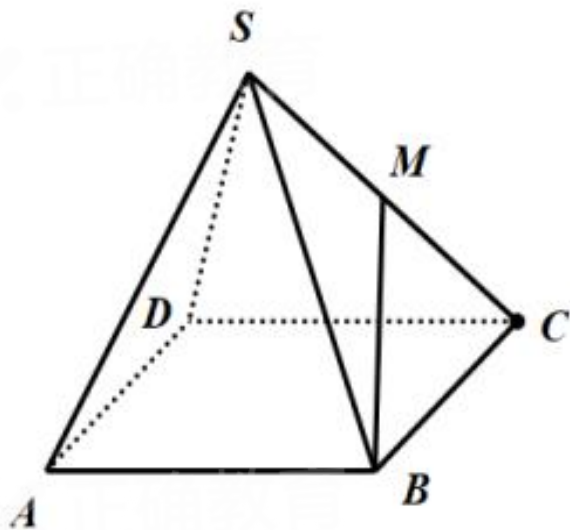


一蓑烟雨

精心命制的一道题

将解多三角形融入立体几何

学生们搞出十几种方法👍👍👍



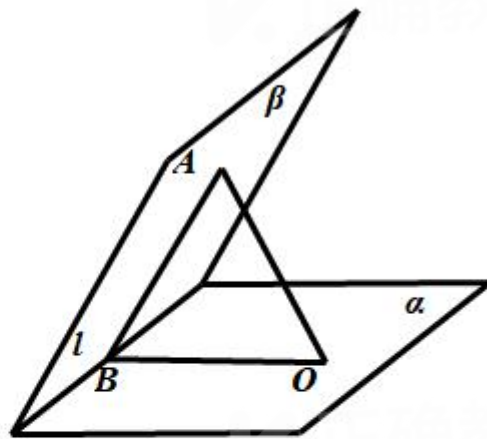
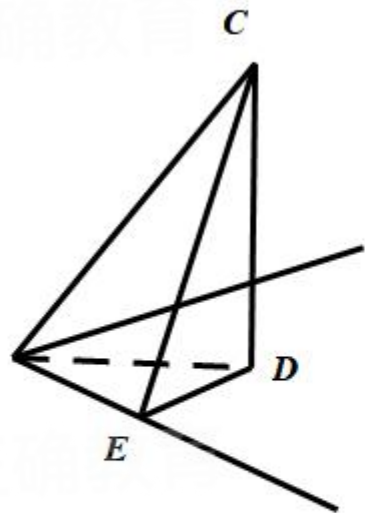
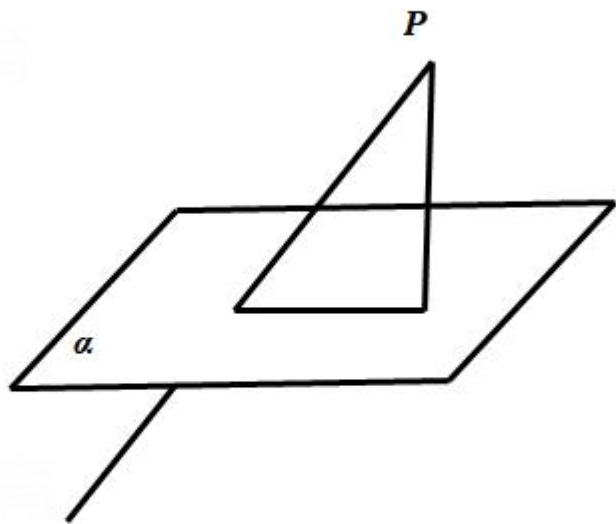
2024年5月29日 14:54 南京市

15

效率提升

电脑工具在命题中的应用

显示点



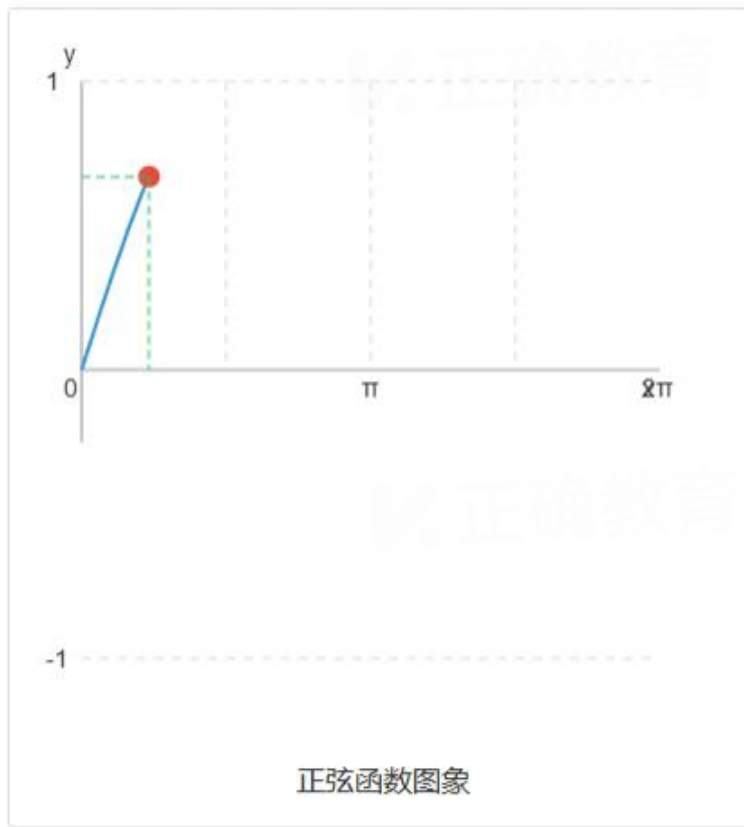
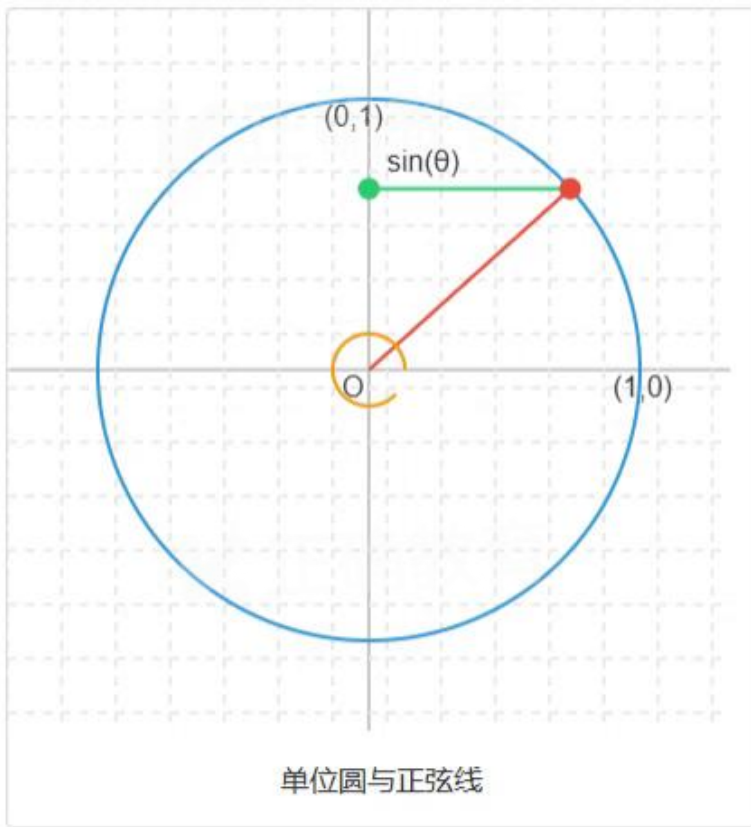
G H M N F Q

γ



学生已经学完三角函数线，本节课将学习三角函数图象，请制作一个能演示正弦函数图象的动画

正弦函数图象动画演示

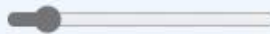


开始

暂停

重置

速度:

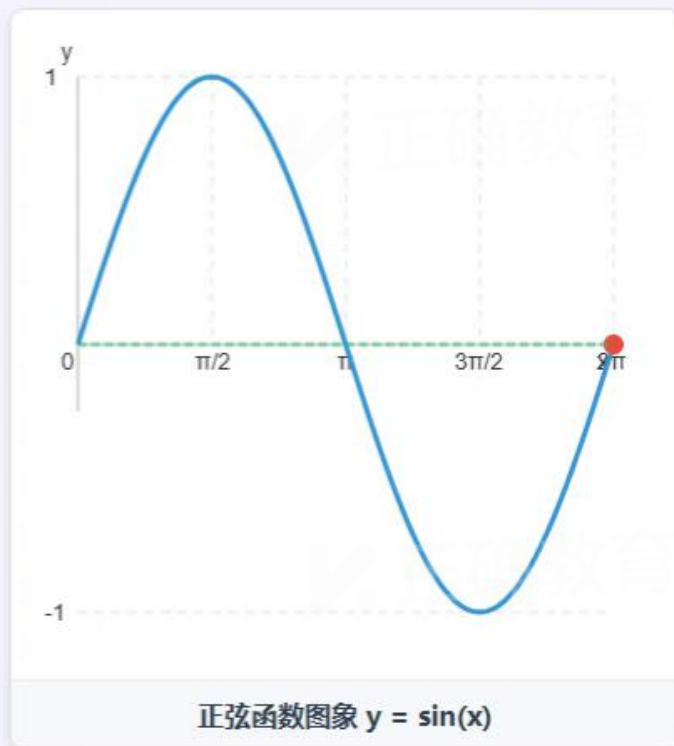


显示/隐藏网格



请修改一下，正弦线不对，
应该是单位圆上动点的纵
坐标长度

正弦函数图象动画演示



开始 暂停 重置 速度: 显示/隐藏网格

角度 θ : **360.0°**

弧度: **6.283**

$\sin(\theta)$: **-0.000**



[AI+教育 | 实战案例\(1\)——制作数学动画](#)

[AI+教育 | 实战案例\(2\)——让课本人物说话](#)

[AI+教育 | 实战案例\(3\)——帮孩子背单词](#)

[AI+教育 | 实战案例\(4\)——精准命题一键下载](#)

.....

- 1、学科网
- 2、希沃课件库
- 3、国家中小学智慧教育平台
- 4、哔哩哔哩
- 5、微信公众号
- 6、知网论文、教学案例
- 7、deepseek、豆包.....



我的松果

AI助手

当前：高中·数学

开启新对话



暂无历史问答

让教育更美好

请帮我生成一道符合上述要求的题目

深度思考 (R1)

AI命题 设置



年级：高一

题型：多选题

难度：中等

章节知识：+ 添加章节知识

第5章 函数概念与性质

类型方法：+ 添加类型方法



教学场景	具体功能	推荐平台	平台网址	优势	不足
课前	生成教案	豆包	https://www.doubao.com/chat/	对教案生成有专门优化，功能全面且免费。声音听感最佳	深度推理不如deepseek
		deepseek	https://www.deepseek.com/	开源免费，推理能力极强；适合编程、数据分析	官网常出现服务器繁忙；本地部署需高配置硬件
		ima知识库	https://ima.qq.com/	知识库自己建立，权威可靠！回答有结构、有根据	参考文件需要先自行上传，储存空间只有2G
	制作课件	kimi+	https://kimi.moonshot.cn/	免费易用，对于书籍、长文章、图片等，理解能力强	课件无法直接使用，需要调整
		问小白	https://www.wenxiaobai.com/	多模态交互，直接生成课件、图片等，不用多个软件跳转	后期有付费可能，课件需要微调
	资源搜索	秘塔AI搜索	https://metaso.cn/	专业搜索、无广告干扰；搜索来源可靠	功能单一，无法连续对话
		360纳米AI搜索	https://www.n.cn/	功能全面，融合市面大部分ai功能	部分场景需付费
	音乐生成	豆包/海绵音乐	https://www.haimian.com/	自定义歌词、根据相册图片，生成多种风格音乐或伴奏	不稳定，多次尝试才有理想结果
	图片/视频生成	即梦	https://jimeng.jianying.com/	全面易用，各种尺寸风格轻松生成	多次尝试才有理想结果，有次数限制
课中	数字人教师	有言	https://www.youyan3d.com/	提供1200+免费3D数字人；适合广告和教学视频	需高性能设备；渲染速度较慢
		腾讯智影	https://zenvideo.qq.com/	基础功能免费；支持数字人和视频剪辑	数字人等高级功能需付费
		剪映	https://www.capcut.cn/	集成AI视频工具；用户基数大，教程丰富	部分AI功能需订阅；免费版功能有限
	智能体互动	豆包	手机app	英语跟练、多角色对话、知识问答，应有尽有	深度推理不如deepseek
	微课制作	剪映	手机app	视频剪辑必备，一键成片，功能全面	高级功能要付费
		白日梦AI	https://aibrm.paluai.com	生成课文视频，制作微电影动画等	高级功能要付费，功能较少
课后	作业批改	豆包爱学	手机app	豆包系列，功能强大且免费。作业评改、情境助学、作文辅导等	无
		蜜蜂家校	微信小程序	适合微信内使用，跟读、听写、作业批改等功能	高级功能要付费
		光速写作/小猿口算...	手机app	专属学科，各有特色	需下载多个app
	数据分析/图表制作	小浣熊AI	https://xiaohuanxiong.com/	图表可视化效果好，能选取最适合的呈现方式	功能单一
	设计评价量表/分层作业/创意作业	deepseek	https://www.deepseek.com/	最强的中文文本AI工具，提供创意、逻辑清晰	无法直接生成流程图等

PDF转换word工具



粘贴或拖动文件至此处以上传并解析

支持上传JPEG/PNG/PDF文件，大小不超过300M

今日pdf解析页数有: 500

选择文件

输入URL

☒ PDF: 启用 OCR 文本公式识别

☐ 图片: 实施景观矫正模式

☐ 图片: 启用单一公式识别模式

<https://doc2x.noedgeai.com>

微信公众号文章转PDF方法

【高考数学重点专题】

——椭圆中与定点有关的六类问题

一、与斜率相关的椭圆中的定点问题

1. 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{12} = 1 (a > 2\sqrt{3})$ 的左顶点为 A , 点 E 为直线 $l_1: k_1x - y + ak_1 = 0$ 与 Γ 的一个交点(异于点 A), 当 $k_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, 点 E 在 y 轴上.

(1) 求 Γ 的标准方程;

(2) 若点 F 为过点 A 且斜率为 $1 - k_1$ 的直线 l_2 与 Γ 的一个交点(异于点 A), 求证: 直线 EF 过定点, 并求出该定点的坐标.

【分析】(1) 由题意求出点 E 的坐标, 将点 E 的坐标代入直线 l_1 的方程, 求出 a 的值, 代入即可得 Γ 的标准方程.

(2) 判断直线 EF 的斜率是否存在, 设出直线 EF 的方程并与椭圆方程联立, 利用斜率间的关系建立等式, 并借助根与系数的关系求参数间的关系, 从而可写出直线 EF 的点斜式方程得到其所过定点, 进而整合证明结论.

【解】(1) 由题意知 $A(-a, 0)$,

直线 $l_1: k_1x - y + ak_1 = 0$, 即 $y = k_1(x + a)$, 则直线 l_1 过点 A .

因为当 $k_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, $l_1: \frac{\sqrt{3}}{2}x - y + \frac{\sqrt{3}}{2}a = 0$, 点 E 在 y 轴上,

又 E 在椭圆 Γ 上, 所以当 E 在 y 轴上时, E 为椭圆 Γ 的上顶点或下顶点,

又 $k_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 E 为椭圆 Γ 的上顶点, 所以 $E(0, 2\sqrt{3})$.

又点 E 在直线 $l_1: \frac{\sqrt{3}}{2}x - y + \frac{\sqrt{3}}{2}a = 0$ 上, 所以 $-2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}a = 0$, 解得 $a = 4$, 所以 Γ 的标准方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

(2) 当直线 EF 的斜率不存在时, 点 E, F 关于 x 轴对称, 此时 l_2 的斜率为 $-k_1$,

这与 l_2 的斜率为 $1 - k_1$ 相矛盾, 所以直线 EF 的斜率存在.

设直线 EF 的方程为 $y = kx + t$, 由 $\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \\ y = kx + t \end{cases}$, 消去 y ,

得 $(4k^2 + 3)x^2 + 8ktx + 4t^2 - 48 = 0$, 需满足 $\Delta = 16(48k^2 + 36 - 3t^2) > 0$,

设 $E(x_1, y_1)$, $F(x_2, y_2)$, $x_1 \neq -4, x_2 \neq -4$, 则 $x_1 + x_2 = -\frac{8kt}{4k^2 + 3}$, $x_1x_2 = \frac{4t^2 - 48}{4k^2 + 3}$.

由题意得 $A(-4, 0)$, $k_{AE} = 1 - k_1 = 1 - k$, 则 $\frac{y_1}{x_1 + 4} = 1 - k$.

- 新建标签页 Ctrl+T
- 新建窗口 Ctrl+N
- 新建 InPrivate 窗口 Ctrl+Shift+N

缩放 100%

收藏夹 Ctrl+Shift+O

集锦 Ctrl+Shift+Y

历史记录 Ctrl+H

购物

下载 Ctrl+J

应用

扩展

浏览器健康助手

打印 Ctrl+P

分屏

截图 Ctrl+Shift+S

在页面上查找 Ctrl+F

更多工具

设置

帮助和反馈

关闭 Microsoft Edge

打印

总数: 36 纸张

打印机

Foxit Reader PDF Printer

份数

1

布局

纵向

横向

页面

全部

仅奇数页

仅偶数页

例如1-5、8、11-13

颜色

颜色

更多设置

使用系统对话框打印... (Ctrl+Shift+P)

打印

取消

16

资源积累

建立题库，比命题本身更重要



1.0 版资源库——备课笔记





3.0 版资源库——公众号

欢迎扫码
敬请指导



教学积累——论文高阶思维



4.0 版资源库——松果平台

南京师范大学附属扬子中学
Yangzi High School Affiliated To Nanjing Normal University

首页 我的资源 校本资源 平台资源 共建资源 检索中心

高中·数学 我的题库 我的试卷 我的讲义 我的教案 我的网盘

章节知识 类型方法

☒ 任意包含 ☐ 严格匹配

苏教版 / 必修第二册

输入关键词搜索

☐ 第9章 平面向量
☐ 第10章 三角恒等变换
☐ 第11章 解三角形
☐ 第12章 复数
☐ 第13章 立体几何初步
☐ 第14章 统计
☐ 第15章 概率

年级: 全部 高一 高二 高三

年份: 全部 2025-2026年度 2024-2025年度 2023-2024年度 2022-2023年度 2021-2022年度 更早

学期: 全部 上学期 下学期

讲义类型: 全部 新授课 一轮复习 二轮复习 考前复习 教材资源 错题资源 好题资源

全部 我的改编 我的上传

☐ 全选 请输入关键词搜索 共110份

Word 计数问题——平均分组
2024-2025年度 共11题 (平台2题)
2025/03/11 使用: 0次
更多 上课 分享

Word 三角形中常见结构模型——角平分线
2024-2025年度 共10题 (平台2题)
2025/03/11 使用: 0次
更多 上课 分享

Word 函数的对称性——(唯一)零点求参数
2024-2025年度 共8题
2025/03/11 使用: 0次
更多 上课 分享

Word 导数中多变量问题——主元法
2024-2025年度 共11题
2025/03/11 使用: 0次
更多 上课 分享

Word 向量与几何的转化问题——夹角
共4题
更多 上课 分享

我的松果

松果AI备课上课教研平台

好存、好找、好用

<https://i.songguoedu.com> 搜索

更多内容可登录平台查看



个人版网址 <https://i.songguoedu.com>



问题1：既要写教案，又要做课件，太累了？

问题2：一堂满意的课，一道喜欢的题，不知道存在哪里了？

问题3：今天发现一道好题，存到哪里方便以后使用呢？

问题4：备课组，教研组每年精心编写的讲义试卷，无法传承下来？

问题5：集体备课总是为了应付，流于形式，有没有好的抓手？

问题6：学生遇到问题如何能把做过的题调出来进行再分析和对比？

问题7：如何把同类的问题能进行积累更新？

问题8：如何把我们微专题切到最小的形式来形成微专题讲义？

问题9：如何能把学生的错题进行归类收集？

问题10：人教版苏教版，好多课本题，上课我想使用怎么办？

.....

14. 已知在平面直角坐标系中，圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ ，点 $A(-\frac{1}{2}, 0)$ 和点 $B(0, \frac{1}{2})$ ， M 为圆 O 上的动点，则 $2|MA| - |MB|$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{17}}{2}$ 。

$= MC$

$MC - MB$

$(-2, 0)$

四、解答题

10. 已知 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 9$ ，则 $T = \sqrt{10-2x} + \sqrt{25+8y}$ 的最小值为 $\sqrt{17}$ 。

四、解答题

阿氏圆逆用

一、原题再现

1. 已知在平面直角坐标系中，圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ ，点 $A(-\frac{1}{2}, 0)$ 和点 $B(0, \frac{1}{2})$ ， M 为圆 O 上的动点，则 $2|MA| - |MB|$ 的最大值为_____。

二、方法梳理

三、类题再练

1. 已知点 P 是圆 $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 8$ 上的动点， $A(6, -1)$ ， O 为坐标原点，则 $PO + 2PA$ 的最小值为_____。

数学问题与解答

已知: $a^2 + b^2 = 1$, 求证: $2\sqrt{5+4a} - \sqrt{5-4b} \leq \sqrt{17}$.

(210048 南京师范大学附属扬子中学 郝结红 供题)

证明: $\sqrt{5+4a} = \sqrt{a^2 + b^2 + 4a + 4} = \sqrt{(a+2)^2 + b^2}$.

$$\frac{1}{2}\sqrt{5-4b} = \sqrt{\frac{5}{4} - b} = \sqrt{a^2 + b^2 - b + \frac{1}{4}} = \sqrt{a^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2}.$$

设坐标 $A(-2, 0)$, $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $P(a, b)$. 则 $2\sqrt{5+4a} - \sqrt{5-4b}$

$$= 2 \left[\sqrt{(a+2)^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2} \right] = 2(|PA| - |PB|) \leq 2|AB| = \sqrt{17}.$$

当 P 为 AB 的延长线与单位圆的交点时 “=” 成立, 即
$$\begin{cases} a = \frac{1}{17}(4\sqrt{13}) \\ b = \frac{1}{17}(\sqrt{13}) \end{cases}$$

第 1 题——数学通讯 2022 第 5 期

2022 年第 2 期问题解答

536. 已知正实数 x, y, z 满足 $x + y + z = 1$, 求 $x + \sqrt{2xy} + 3\sqrt[3]{xyz}$ 的最大值.

(210048 南京师范大学附属扬子中学 郝结红 供题)

第 8 题——数学通报 2024 第 10 期

2802 设 $x_n = a^n + b^n + c^n$, $y_n = p^n + q^n + r^n$. 已知 $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3$, 求证: $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n = y_n.$$

(南京师范大学附属扬子中学 郝结红

210048)

眼前一亮的单元复习课
《直线与方程》
(南师附中孙凤建老师)

校本讲义



首页

我的资源

校本资源

平台资源

检索中心

反馈

帮助

下载



居加颖



高中·数学

校本题库

校本试卷

校本讲义

校本教案

资源云盘

校本管理

章节知识

类型方法

任意包含

严格匹配

苏教版 / 必修第一册

输入关键词搜索

- ☐ 第1章 集合
- ☐ 第2章 常用逻辑用语
- ☐ 第3章 不等式
- ☐ 第4章 指数与对数
- ☐ 第5章 函数概念与性质
- ☐ 第6章 幂函数、指数函数...
- ☐ 第7章 三角函数
- ☐ 第8章 函数应用

年级

年份

学期

讲义类型

居加颖 2024/06/11 使用: 0次 0

Word

42 概率中的比赛问题

2024-2025年度

居加颖 2024/06/11 使用: 0次 0

下载

Word

40 经验回归非线性方程及其应用

2024-2025年度

居加颖 2024/06/11 使用: 0次 0

下载

Word

31 离散型随机变量分布列的性质

2024-2025年度

居加颖 2024/06/11 使用: 0次 0

下载

Word

09相邻与相间问题

2024-2025年度

居加颖 2024/06/11 使用: 0次 0

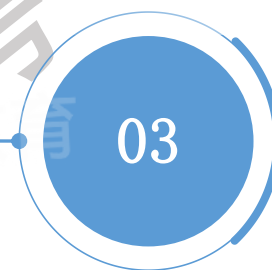
下载

校本资源

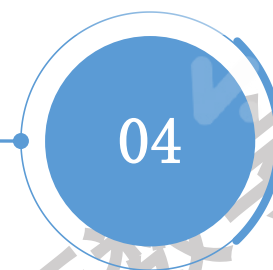
宁海中学高三数学校本讲义
——基本概念与基础知识梳理
完成



宁海中学高三数学校本讲义
——重难点提升微专题
完成



宁海中学高三数学校本讲义
——类型与方法微专题
完成



宁海中学高三数学校本讲义
——错题矫正微专题
过程整理
寒假印制

高考复习的整体构建和配套资源体系

一轮复习（构建）

概念知识回顾

（基础知识梳理专题）

类型方法构建

（基本类型微专题）

类型应用巩固

（基本类型巩固练习）

方法综合应用

（例题、教辅、试卷）

单元重点提升

（一轮复习微专题）

课后系统管理

（错题5+n次矫正、作业等）

二轮复习（提升）

重点突破

（二轮复习微专题）

难点提升

（二轮复习微专题）

错题归类矫正

（错题归类微专题）

综合卷分类讲评

（错题矫正微专题）

考前复习（回归）

概念知识梳理

（基础知识专题）

类型方法回归

（高三全部专题）

盲点排查扫清

（盲点微专题）

【免费使用】基于平台的个人资源库建设

基于校本资源库建设的集体备课（郝结红）

请给以下内容进行优化。讲座主题：从“解题者”到“命题人”：教师专业发展的新视角。讲座提纲：1、命题，比解题简单。2、选题备课，其实就在命题。3、新手教师，从改编题开始。4、一道题，让我进入了命题组。5、数学加情境？情境找数学？6、研究真题，怎么都不为过。7、有一年，我“猜中”高考题。8、高中老师命制初中题。9、高观点下的高考题。10、很多结论，需要不断学习。11、没思路，就回到课本找原型。12、命题最害怕什么？13、知识？能力？素养？14、很多想法，来源于团队。15、电脑工具的使用。16、建立题库，比命题更重要。

总结

01

一、命题认识：从陌生到熟悉

1. 破除迷思：命题高不可攀？比解题更简单。
2. 命题意识：选题备课，其实就在命题。
3. 新手入门：从改编题开始，迈出命题第一步。

02

二、命题实践：从模仿到创新

4. 实战经验：一道题，叩开命题组的大门。
5. 情境创设：数学加情境，还是情境找数学？
6. 真题研究：研究真题，怎么都不为过。
7. 有章可循：从“猜中”高考题，看命题思路。

03

三、命题进阶：从经验到专业

8. 跨学段命题：高中老师命制初中题。
9. 高观点命题：站在更高视角，审视高考命题。
10. 持续学习：命题路上，很多结论需要不断学习。

04

四、命题反思：从技巧到理念

11. 回归本源：没思路时，回到课本寻找命题原型。
12. 命题风险：命题人最害怕什么？如何规避？
13. 命题目标：知识能力素养，如何通过命题体现？
14. 团队合作：很多优秀的命题想法，来源于团队的碰撞。

05

五、命题工具：从传统到现代

15. 效率提升：电脑工具在命题中的应用。
16. 资源积累：建立题库，比命题本身更重要。



谢谢

正确教育版权声明



北京正确教育咨询有限公司（以下简称为正确教育）为尊重和保护知识产权，依法维护参编作者和旗下网站的合法权益，特发表维护著作权声明如下：

- 1.在正确教育原创资料正文标题的下方（或课件在尾页）签署有参编作者授权声明，“本人声明：本文属本人原创作品，本文著作权授予‘北京正确教育咨询有限公司’独家所有，本人拥有署名权。”
- 2.此类原创资料，正确教育拥有该原创资料的独家著作权，未经正确教育明确书面授权，编者不得许可第三方在网络上或者图书行业等商业活动中使用本人已上传至正确教育的原创资料。
- 3.任何商业公司或其他网站未经正确教育的授权许可，不得转载、摘编或以其他方式使用上述作品。
- 4.如发现某单位侵权使用正确教育的原创资料，欢迎用户向我们举报侵权单位，经正确教育总部确认属实后，给予举报用户奖励。同时，资料编者有义务协助公司共同维护知识产权。
- 5.对于侵犯相关编者及正确教育合法权益的公司、网站和个人，正确教育均保留追究法律责任的权利。
- 6.本声明未涉及的问题请参见国家有关法律法规，当本声明与国家有关法律法规冲突时，以国家法律法规为准。
- 7.本网站相关声明版权及其修改权、更新权和最终解释权均属本公司所有。

特此声明。

北京正确教育咨询有限公司

二〇二三年二月二十日

