

2027 届高三年级摸底考试

数学

本试卷共 4 页，19 小题，满分 150 分，考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号、试室号、座位号填写在答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型和考生号填涂在答题卡相应位置上。
2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应的题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再填涂其他答案。答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案，不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 z 是复数，若 $(1+i)z=2$ ，则 $z=$

- A. $1-i$ B. $1+i$ C. $2i$ D. $2-2i$

2. 命题“ $\exists x > 1, x^2 - 4x + 6 < 0$ ”的否定为

- A. $\exists x > 1, x^2 - 4x + 6 \geq 0$ B. $\exists x \leq 1, x^2 - 4x + 6 \geq 0$
C. $\forall x \leq 1, x^2 - 4x + 6 \geq 0$ D. $\forall x > 1, x^2 - 4x + 6 \geq 0$

3. 在空间中，下列命题正确的是

- A. 垂直于同一直线的两条直线平行
B. 平行于同一直线的两个平面平行
C. 若一个平面经过另一个平面的一条垂线，则这两个平面互相垂直
D. 若一个平面内有三个不共线的点到另一个平面的距离相等，则这两个平面平行

4. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线方程为 $x + y = 0$ ，则该双曲线的离心率为

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$

5. 已知全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \left\{ x \in \mathbf{Z} \mid \frac{x-3}{x+1} \leq 0 \right\}$, $B = \{ x \mid \log_2(x+2) > 2 \}$ ，则 $A \cap \complement_U B =$

- A. $\{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$ B. $\{x \mid -1 < x \leq 2\}$ C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2\}$

6. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期为 π ，当 $x = \frac{\pi}{12}$ 时， $f(x)$ 取得最大值 2，则下列结论正确的是

A. $f(-1) > f(0) > f(1)$ B. $f(-1) > f(1) > f(0)$

C. $f(1) > f(0) > f(-1)$ D. $f(0) > f(1) > f(-1)$

7. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y) + f(x-y) = \frac{2}{3}f(x)f(y)$ ， $f(1) = \frac{3}{2}$ ，则下列结论不正确的是

A. $f(0) = 3$ B. 函数 $f(2x-1)$ 关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称

C. $f(x) + f(0) \geq 0$ D. 3 是函数 $f(x)$ 的周期

8. 将 1,2,3,4,5,6 随机排成一行，前三个数字构成三位数 a ，后三个数字构成三位数 b ，则 $|a-b| > 100$ 的概率为

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。

全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 下列说法正确的有

A. 若 $X \sim B\left(4, \frac{2}{3}\right)$ ，则 $P(X \leq 2) = \frac{11}{27}$

B. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，且 $P(X \leq -3) + P(X \leq 5) = 1$ ，则 $\mu = 2$

C. 已知事件 A, B 互斥， $P(A) = \frac{1}{4}$ ， $P(B) = \frac{1}{3}$ ，则 $P(A \cup B) = \frac{7}{12}$

D. 已知事件 A, B 相互独立， $P(A) = \frac{1}{4}$ ， $P(B) = \frac{1}{3}$ ，则 $P(\overline{A}\overline{B}) = \frac{1}{6}$

10. 已知圆锥 SO (O 是底面圆的圆心， S 是圆锥的顶点) 底面半径为 1，母线长为 $\sqrt{3}$ 。若 P, Q 为底面圆周上任意不同两点，则下列结论正确的是

A. 三棱锥 $O-SPQ$ 体积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$

B. 三角形 SPQ 面积的最大值为 $\frac{3}{2}$

C. 当 $\angle POQ = 60^\circ$ 时，平面 SPQ 与平面 SOQ 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{22}}{11}$

D. 四面体 $SOPQ$ 外接球表面积恒大于 3π

11. 已知函数 $f(x) = 3^{x+1} + ax^3$ 有三个极值点 x_1, x_2, x_3 , 若 $x_1 < x_2 < \frac{x_3}{3}$, 则

- A. $x_1 x_2 < 0$ B. x_1 为极大值点 C. $x_3 - x_2 > 2$ D. $f(x_2) > 0$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知圆 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$, 直线 $l: m(x+y+1) + y - x = 0, m \in \mathbb{R}$, 则直线 l 被圆 C 截得的最短弦的长度为_____

13. 设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 前 n 项积为 M_n , 若 $a_1 = 1, 2a_n M_n = M_{n+1} - M_n$, 则 $S_9 =$ _____.

14. 已知 A, B, C 是边长为 1 的正六边形边上相异的三点, 则 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的最小值为_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本小题满分 13 分)

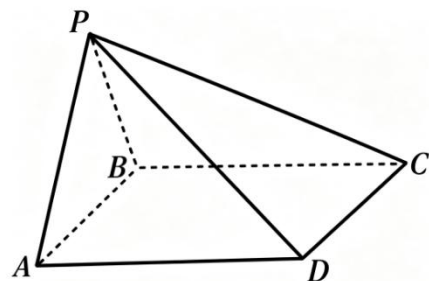
在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a = 3b, c = \sqrt{7}, C = \frac{\pi}{3}$.

- (1) 求 b 的值;
- (2) 求 $\sin B$ 的值;
- (3) 求 $\sin(A-B)$ 的值.

16. (本小题满分 15 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是正方形. 设平面 PAD 与平面 PBC 相交于直线 l .

- (1) 证明: $l \parallel AD$;
- (2) 若平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = PB = \sqrt{5}, AB = 2$,
求直线 PC 与平面 PAD 所成角的正弦值.



17. (本小题满分 15 分)

设函数 $f(x) = (x-1)e^x - kx^2$ (其中 $k \in \mathbb{R}$).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 已知 $k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, 函数 $f(x)$ 在 $[0, k]$ 上的最大值为 $M(k)$, 试判断当 k 为何值时, $M(k)$ 最小?

18. (本小题满分 17 分)

椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 曲线 $C_2: y^2 = 2x + 4$ 过椭圆 C_1 的左顶点 P .

(1) 求椭圆 C_1 的方程;

(2) 过坐标原点 O 的直线 l 与 C_2 相交于点 A, B (异于 P), 直线 PA, PB 分别与 C_1 相交于 D, E ,

①证明: $PD \perp PE$;

②记 $\Delta PAB, \Delta PDE$ 的面积分别是 S_1, S_2 , 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最小值及此时直线 l 的方程.

19. (本小题满分 17 分)

已知 $k \in \mathbb{N}^*$, 集合 $X_k = \{x \mid x = 2^{i_0} + 2^{i_1} + \cdots + 2^{i_k}, 0 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_k, \text{其中 } i_0, i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}\}$.

(1) 求 X_{2027} 中最小的元素;

(2) 若 $a \in X_1$, 且 $a+10 \in X_1$, 求 a 的所有可能值;

(3) 对于 $n \in \mathbb{N}^*$, 记 $Y_k = X_k \cap (2^{k+n-1}, 2^{k+n}]$, 若集合 Y_k 中的元素个数为 b_n ,

①求 b_n 的表达式 (用含有 n 和 k 的式子表达);

②令 $S_k = \sum_{m=1}^{k+1} \frac{b_m}{2^{m-1}}$, 求证: 数列 $\{S_k\}$ 是等比数列.