

2027 届高三年级摸底考试数学参考答案

选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
答案	A	D	C	A	C	D	D	D	AC	ACD	ACD

填空题

12. $\sqrt{2}$ 13. 1013 14. $-\frac{9}{16}$

8. 【答案】D

【解析】当 $|a-b|$ 小于 100 时，则 a, b 的百位数字差值只能是 1，这样有 10 种情况，但还需保证百位数

小的三位数的十位数更大，则 $|a-b|$ 小于 100 的概率为 $\frac{5A_4^4}{A_6^6} = \frac{1}{6}$ ，所以 $|a-b| > 100$ 的概率为 $\frac{5}{6}$ 。

11. 【答案】ACD

【解析】 $f'(x) = 3^{x+1} \ln 3 + 3ax^2 = 3(ax^2 + 3^x \ln 3)$,

由于 $f'(0) \neq 0$ ，则令 $f'(x) = 0$ ，即 $a = -\frac{3^x \ln 3}{x^2}$ ，

设 $g(x) = -\frac{3^x \ln 3}{x^2}$ ，则 $g'(x) = -\frac{x(x \ln 3 - 2)3^x \ln 3}{x^4}$ ，

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时， $g'(x) < 0$ ， $g(x)$ 单调递减， x 趋于 $-\infty$ 时， $g(x)$ 趋于 0， x 趋于 0 时， $g(x)$ 趋于 $-\infty$ ，

当 $x \in (0, \frac{2}{\ln 3})$ 时， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 单调递增， x 趋于 0 时， $g(x)$ 趋于 $-\infty$ ，

当 $x \in (\frac{2}{\ln 3}, +\infty)$ 时， $g'(x) < 0$ ， $g(x)$ 单调递减， x 趋于 $+\infty$ 时， $g(x)$ 趋于 $-\infty$ ，

则 $x_1 < 0 < x_2 < \frac{2}{\ln 3} < x_3$ ，所以 A 正确。

当 $x < x_1$ 时， $a < g(x) = -\frac{3^x \ln 3}{x^2}$ ， $f'(x) = 3(ax^2 + 3^x \ln 3) < 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 上单调递减， x_1 为

极小值点，故 B 错误；

由于 $g(1) = g(3) = -3 \ln 3$ ，由 $g(x)$ 单调性以及图像可得，

若 $a \geq -3 \ln 3$ ，则 $x_2 \geq 1, x_3 \leq 3$ ，不符合 $x_2 < \frac{x_3}{3}$ ，

若 $a < -3 \ln 3$ ，则 $0 < x_2 < 1, x_3 > 3$ ，符合 $x_2 < \frac{x_3}{3}$ 题意，此时 $x_3 - x_2 > 2$ ，C 正确；

$f(x_2) = 3^{x_2+1} + ax_2^3 = 3^{x_2+1} - \frac{3^{x_2} \ln 3}{x_2^2} \cdot x_2^3 = 3^{x_2}(3 - x_2 \ln 3) > 0$ ，D 正确，故选：ACD。

14. 【答案】 $-\frac{9}{16}$ 【解析】设 AC 中点为 M ，那么 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BM}|^2 - \frac{|\overrightarrow{AC}|^2}{4}$ ，设 A 所在的边的端点为 A_1, A_2 ，

则 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \geq \min(\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA_2} \cdot \overrightarrow{BC})$ ，(这是因为，记 $\overrightarrow{OA} = (1-t)\overrightarrow{OA_1} + t\overrightarrow{OA_2}$ ，其中 O 为原点，设 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = f(t)$ ，

那么 $f(t)$ 是一次函数, 从而 t 属于 $[0,1]$ 时, 有 $f(t) \geq \min(f(0), f(1))$ 所以我们可以不妨设 A 在六边形的端点上. 同理, 我们可以不妨设 C 在六边形的端点上. 此时分以下四种情况:

$$(1) A, C \text{ 重合, 此时 } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BM}|^2 - \frac{|\overrightarrow{AC}|^2}{4} \geq 0 - 0 = 0,$$

$$(2) A, C \text{ 为相邻顶点, 此时 } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BM}|^2 - \frac{|\overrightarrow{AC}|^2}{4} \geq 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4},$$

$$(3) A, C \text{ 相隔一个顶点, 此时 } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BM}|^2 - \frac{|\overrightarrow{AC}|^2}{4} \geq \frac{3}{16} - \frac{3}{4} = -\frac{9}{16},$$

$$(4) A, C \text{ 为对径点, 此时 } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BM}|^2 - \frac{|\overrightarrow{AC}|^2}{4} \geq \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4},$$

综上, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的最小值为 $-\frac{9}{16}$,

$$15. \text{【答案】} (1) b=1 \quad (2) \sin B = \frac{\sqrt{21}}{14} \quad (3) \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

【解析】(1) 由余弦定理得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ $7 = 9b^2 + b^2 - 2 \times 3b^2 \times \frac{1}{2}$, 所以 $b=1$4 分

$$(2) \text{由正弦定理得 } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 即 } \frac{1}{\sin B} = \frac{\sqrt{7}}{\sin \frac{\pi}{3}}, \text{ 解得 } \sin B = \frac{\sqrt{21}}{14} \quad \text{.....8 分}$$

$$(3) \text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } C = \frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } A - B = \frac{2\pi}{3} - 2B \text{ 因为 } a > b, \text{ 所以 } B \text{ 为锐角, } \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$$

$$\sin 2B = 2 \sin B \cos B = 2 \times \frac{\sqrt{21}}{14} \times \frac{5\sqrt{7}}{14} = \frac{5\sqrt{3}}{14}, \quad \cos 2B = 2 \cos^2 B - 1 = \frac{11}{14},$$

$$\text{所以, } \sin(A - B) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2B\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2B + \frac{1}{2} \sin 2B = \frac{4\sqrt{3}}{7} \quad \text{.....13 分}$$

$$16. \text{【答案】} (1) \text{见解析} (2) \frac{4\sqrt{5}}{15}$$

【解析】(1) 证明: 因为 $AD \parallel BC, AD \not\subset \text{平面 } PBC, BC \subset \text{平面 } PBC$, 所以 $AD \parallel \text{平面 } PBC$.

因为平面 PAD 与平面 PBC 相交于 l , 所以 $l \parallel AD$5 分

(2) 解: 如图, 取线段 AB 的中点 O , 连接 PO .

因为 $PA = PB$, 所以 $PO \perp AB$. 又平面 $PAB \perp \text{平面 } ABCD$,

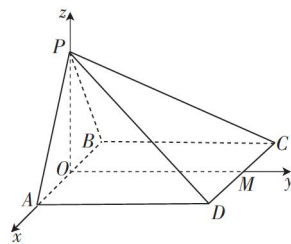
平面 $PAB \cap \text{平面 } ABCD = AB, PO \subset \text{平面 } PAB$, 所以 $PO \perp \text{平面 } ABCD$.

取线段 CD 的中点 M ，连接 OM 。以 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向，建立空间直角坐标系。

依题意， $A(1, 0, 0), D(1, 2, 0), P(0, 0, 2), C(-1, 2, 0)$ ，

则 $\overrightarrow{AD} = (0, 2, 0), \overrightarrow{AP} = (-1, 0, 2), \overrightarrow{PC} = (-1, 2, -2)$ 。

设平面 PAD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 2y = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = -x + 2z = 0, \end{cases}$ 可取 $\vec{n} = (2, 0, 1)$ 。



设直线 PC 与平面 PAD 所成的角为 θ ，则 $\sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{PC}, \vec{n} \rangle \right| = \left| \frac{-4}{\sqrt{5} \times 3} \right| = \frac{4\sqrt{5}}{15}$ ，

即直线 PC 与平面 PAD 所成角的正弦值为 $\frac{4\sqrt{5}}{15}$ 。

.....15 分

17. 【答案】 (1) 见解析； (2) 当 $k=1$ 时， $M(k)$ 取最小值 -1

【解析】 (1) $f'(x) = e^x + (x-1)e^x - 2kx = xe^x - 2kx = x(e^x - 2k)$

当 $k \leq 0$ 时， $e^x - 2k > 0$ ， $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，在 $(0, +\infty)$ 单调递增；

当 $0 < k < \frac{1}{2}$ 时， $\ln(2k) < 0$ ， $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln(2k))$ 上单调递增，在 $(\ln(2k), 0)$ 上单调递减，在 $(0, +\infty)$ 上单调递增；

当 $k = \frac{1}{2}$ 时， $f(x)$ 在 R 上单调递增；

当 $k > \frac{1}{2}$ 时， $\ln(2k) > 0$ ， $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增，在 $(0, \ln(2k))$ 上单调递减，在 $(\ln(2k), +\infty)$ 上单调递增。

.....6 分

(2) 由 (1) 知，当 $k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增，在 $(0, \ln(2k))$ 上单调递减，在 $(\ln(2k), +\infty)$ 上单调递增。

令 $g(k) = \ln(2k) - k$ ，则 $g'(k) = \frac{1}{k} - 1 = \frac{1-k}{k} > 0$ ，所以 $g(k)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 上递增，所以

$g(k) \leq \ln 2 - 1 = \ln 2 - \ln e < 0$ ，从而 $\ln(2k) < k$ ，所以 $\ln(2k) \in [0, k]$ ，所以当 $x \in (0, \ln(2k))$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$

单调递减；当 $x \in (\ln(2k), k)$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增；

所以 $M(k) = \max \{f(0), f(k)\} = \max \{-1, (k-1)e^k - k^3\}$

令 $h(k) = (k-1)e^k - k^3 + 1$ ，则 $h'(k) = k(e^k - 3k)$ ，

令 $\varphi(k) = e^k - 3k$ ，则 $\varphi'(k) = e^k - 3 < e - 3 < 0$

$\varphi(k)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 上递减，而 $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - \frac{3}{2} > 0$ ， $\varphi(1) = e - 3 < 0$

所以存在 $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 使得 $\varphi(x_0) = 0$, 且当 $k \in \left(\frac{1}{2}, x_0\right)$ 时, $\varphi(k) > 0$, 当 $k \in (x_0, 1)$ 时, $\varphi(k) < 0$

所以 $h(k)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, x_0\right)$ 上单调递增, 在 $(x_0, 1)$ 上单调递减.

因为 $h\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{e} + \frac{7}{8} > 0$, $h(1) = 0$, 所以 $h(k) \geq 0$ 即 $f(k) \geq f(0) = -1$ 在 $k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 上恒成立, 所以

$M(k) = f(k) \geq -1$, 当且仅当 $k = 1$ 时等号成立. 综上, 当 $k = 1$ 时, $M(k)$ 取最小值 -115 分

18. 【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (2) ①见解析; ② $\frac{S_1}{S_2}$ 的最小值为 $\frac{25}{4}$, 此时直线 l 的方程为 $x = 0$.

【解析】 (1) $P(-2, 0)$, 所以 $a = 2$. 又 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 从而 $c = \sqrt{3}, b = 1$, 故椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

.....4 分

(2) ①若直线 l 的斜率不存在, 则 $A(0, 1), B(0, -1), k_{PA} \cdot k_{PB} = -1$, 所以 $PA \perp PB$, 即 $PD \perp PE$;

若直线 l 的斜率存在, 设直线 l 的方程为 $y = kx, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$$\begin{cases} y = kx \\ y^2 = 2x + 4 \end{cases} \Rightarrow k^2 x^2 - 2x - 4 = 0, \quad x_1 + x_2 = \frac{2}{k^2}, x_1 x_2 = -\frac{4}{k^2}$$

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{y_1}{x_1 + 2} \cdot \frac{y_2}{x_2 + 2} = \frac{k^2 x_1 x_2}{x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4} = \frac{k^2 \cdot \left(-\frac{4}{k^2}\right)}{-\frac{4}{k^2} + 2 \cdot \frac{2}{k^2} + 4} = -1,$$

所以 $PA \perp PB$, 即 $PD \perp PE$.

.....10 分

②设直线 $PA: x = my - 2 (m \neq 0)$, 联立 $\begin{cases} x = my - 2 \\ y^2 = 2x + 4 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 2my$, 所以 $y_A = 2m$, 同理 $y_B = -\frac{2}{m}$;

联立 $\begin{cases} x = my - 2 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow (m^2 + 4)y^2 = 4my$, 所以 $y_D = \frac{4m}{m^2 + 4}$, 同理 $y_E = -\frac{4m}{1 + 4m^2}$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}|PA| \cdot |PB|}{\frac{1}{2}|PD| \cdot |PE|} = \frac{|PA|}{|PD|} \cdot \frac{|PB|}{|PE|} = \left| \frac{y_A}{y_D} \right| \cdot \left| \frac{y_B}{y_E} \right| = \frac{1}{4} \cdot \frac{(m^2 + 4)(1 + 4m^2)}{m^2} = \frac{1}{4} \left(4m^2 + \frac{4}{m^2} + 17 \right) \geq \frac{25}{4}$$

所以 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最小值为 $\frac{25}{4}$, 取等条件是 $m = \pm 1$, 此时 $A(0, \pm 2)$, 直线 l 的方程为 $x = 0$,17 分

19. 【答案】 (1) $2^{2028} - 1$ (2) 10, 24 (3) ① $b_n = C_{k+n-1}^k$ ②见解析

【解析】 (1) X_{2027} 中最小的元素为 $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{2027} = \frac{1 - 2^{2028}}{1 - 2} = 2^{2028} - 1$3 分

(2) 设 $a = 2^i + 2^j, i < j$. 当 $j \leq 4$ 时, 可以逐个计算 $2^0 + 2^1, 2^0 + 2^2, 2^1 + 2^2, \dots, 2^3 + 2^4$, 发现只

有 $2^1 + 2^3 = 10$ 和 $2^3 + 2^4 = 24$ 符合要求 ($10 + 10 = 2^2 + 2^4$, $24 + 10 = 2^1 + 2^5$).

当 $j \geq 5$ 时, 设 $2^i + 2^j + 10 = 2^m + 2^n$, $m < n$. 由于 $2^{j-1} + 10 < 2^j$, 故

$2^m + 2^n = 2^i + 2^j + 10 \leq 2^{j-1} + 2^j + 10 < 2 \times 2^j$, 从而 $2^n < 2 \times 2^j$, 故 $n < j+1$; 又

$2 \times 2^n > 2^m + 2^n = 2^i + 2^j + 10 > 2^j$, 从而 $2^n < 2^{j-1}$, 故 $n > j-1$, 所以, $n = j$. 这时, $2^i + 10 = 2^m$, 即

$10 = 2^m - 2^i = 2^i(2^{m-i} - 1)$, 故 $i = 1$, $2^{m-1} = 6$, 无解.

所以, a 的所有可能值为 10 和 24.

.....8 分

(3) ① 设 $x \in Y_k$, 则 $x = 2^{i_0} + 2^{i_1} + \cdots + 2^{i_k}$, 显然 $i_k = k + n - 1$,

且 $0 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_{k-1} \leq k + n - 2$, 所以 $b_n = C_{k+n-1}^k$,

.....12 分

② 设 $S_k = \sum_{m=1}^{k+1} \frac{b_m}{2^{m-1}}$, 则 $S_k = C_k^k + \frac{1}{2}C_{k+1}^k + \frac{1}{2^2}C_{k+2}^k + \cdots + \frac{1}{2^k}C_{2k}^k$.

因为 $C_n^{k+1} = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k+1}$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } S_{k+1} &= C_{k+1}^{k+1} + \frac{1}{2}C_{k+2}^{k+1} + \frac{1}{2^2}C_{k+3}^{k+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}C_{2k+1}^{k+1} + \frac{1}{2^{k+1}}C_{2k+2}^{k+1} \\ &= C_k^k + \frac{1}{2}(C_{k+1}^k + C_{k+1}^{k+1}) + \frac{1}{2^2}(C_{k+2}^k + C_{k+2}^{k+1}) + \cdots + \frac{1}{2^k}(C_{2k}^k + C_{2k}^{k+1}) + \frac{1}{2^{k+1}}C_{2k+2}^{k+1} \\ &= S_k + \frac{1}{2}(S_{k+1} - \frac{1}{2^k}C_{2k+1}^{k+1} - \frac{1}{2^{k+1}}C_{2k+2}^{k+1}) + \frac{1}{2^{k+1}}C_{2k+2}^{k+1} \\ &= S_k + \frac{1}{2}S_{k+1} - \frac{1}{2^{k+1}}C_{2k+1}^{k+1} + \frac{1}{2^{k+2}}C_{2k+2}^{k+1} \\ &= S_k + \frac{1}{2}S_{k+1} \end{aligned}$$

(实际上, $C_{2k+1}^{k+1} - \frac{1}{2}C_{2k+2}^{k+1} = \frac{(2k+1)!}{k!(k+1)!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(2k+2)!}{(k+1)!(k+1)!} = \frac{(2k+1)! - (2k+1)!}{k!(k+1)!} = 0$)

所以 $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{2}S_{k+1}$, 所以 $S_{k+1} = 2S_k$, 又因为 $S_1 = 1 + \frac{1}{2}C_2^1 = 2$, 所以 $S_k = 2^k$ 是等比数列.

.....17 分