

C. $f'(f(1)) < f'(f(2))$

D. $f'(f'(-1)) < f'(f'(-2))$

二、选择题（本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题所给的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对得 6 分，部分选对得部分分，有选错得 0 分．）

9. 在 $(ax - \sqrt{x})^6$ ($a > 0$) 的展开式中，含 x^4 的项的系数为 60，则展开式中

A. 二项式系数最大的项为第 4 项

B. 存在常数项

C. 所有项的系数和为 1

D. 无理项为第 1, 3, 5 项

10. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，直线 $y = k(x+1)$ 与 x 轴相交于点 D ，与抛物线 C 相交于

$A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 两点，且 $x_1 < x_2$ ，则下列结论正确的是

A. $k \in (-1, 0) \cup (0, 1)$

B. 当 $|BF| = 2|AF|$ 时， $|DA| = |AB|$

C. 存在 k ，使得 $|AF| = 2$

D. $\sin \angle AFD = |k|$

11. 已知函数 $f(x) = \sin 3x$ ，点 $B\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$ ， $C\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ，若 $E(x_1, y_1)$ ， $F(x_2, y_2)$ 为 $f(x)$ 图象上的两动点，则下列结论正确的是

A. 若 $|y_2 - y_1| = 2$ ，则 $|x_2 - x_1|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$

B. 当 $\overline{CE} = \overline{EF}$ 时， $y_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

C. 存在 $x_1, x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ ，使得 $\triangle BEF$ 为等腰直角三角形

D. 若方程 $f(x) = \frac{a}{\sin x}$ 在 $(0, \pi)$ 上有唯一实根，则 $a = -1$

三、填空题（本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．）

12. 已知复数 z 满足： $\frac{1+i}{z} = 2i$ ，则 $|z| =$ _____.

13. 已知 $a > b > 0$ ， $\ln a = 2 \ln b$ ，且 $a \lg b = b \lg a$ ，则 $a + b =$ _____.

14. A, B 两人进行掷骰子游戏，游戏规则为：每次投掷一枚正方体骰子（六个面上分别标有点数 1, 2, ..., 6）. 当点数是 3 的倍数时， A 得 1 分，当点数不是 3 的倍数时， A 不得分；当点数是 2 的倍数时， B 得 1 分，当点数不是 2 的倍数时， B 不得分. 若规定率先得到 3 分者获胜且游戏结束. 则在第 4 次投掷后， A 以 3:1 获胜的概率为_____.

四、解答题（本大题共 5 小题，共 77 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步

骤.)

15. (13 分) 浙江城市篮球联赛 (简称 “浙 BA”) 是全省性群众篮球赛事, 这场覆盖全省的草根赛事以最纯粹的体育魅力点燃了全民健身的热情, 参加健身活动的市民人数显著增加. 下表是自赛事开展 5 周以来某城镇参与健身活动的人数 y (万人) 与第 x 周的数据:

x (周)	1	2	3	4	5
y (万人)	2	2	4	6	6

- (1) 根据表格数据计算变量 y 与 x 的相关系数 r (精确到 0.01), 并推断它们的相关程度;
- (2) 组委会随机抽取了 1000 位市民, 对他们是否有意愿观看比赛的情况进行了统计, 得到了如下的列联表:

性别	观看比赛的意愿		合计
	有	无	
男	400	100	500
女	300	200	500
合计	700	300	1000

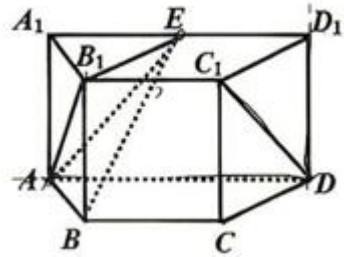
请依据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验, 能否认为观看比赛的意愿与性别有关联?

参考数据及公式: $\sqrt{10} \approx 3.16$, 样本相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$

$$\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)},$$

α	0.010	0.005	0.001
χ_α	6.635	7.879	10.828

16. (15 分) 如图, 在直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AD = 4$, $AA_1 = BC = CD = 2$, $AD // BC$, $AD \perp CD$, E 为棱 A_1D_1 的中点.



- (1) 证明: $BE \perp AB_1$;

(2) 求直线 C_1D 与平面 AB_1E 所成角的正弦值.

17. (15 分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且

$$\sqrt{3}a \cos C = \sqrt{3}b + c \sin A. \quad D \text{ 为 } BC \text{ 边上的点.}$$

(1) 求角 A ;

(2) 若 $a = \sqrt{3}$, $bc = 1$, 且 $\angle BAD = \angle CAD$, 求线段 AD 的长;

(3) 若 $\overline{BD} = 2\overline{DC}$, $AD = 2\sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

18. (17 分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1 和 F_2 , 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 上

顶点为 A , 且点 F_2 到直线 AF_1 的距离为 $\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 已知 M, N 为椭圆 E 上的两个动点.

(i) 当 $|MA| + |NA|$ 取得最大值时, 求 $\cos \angle MAN$ 的值;

(ii) 当直线 MN 在 x 轴上的截距为 4 时, 若椭圆 E 在点 M, N 处的两条切线的交点 P 在直线 $y = 1$ 上, 求直线 MN 的方程.

19. (17 分) 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的项数相等, 且满足条件:

① 记集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$;

② 设 $m = 1, 2, \dots, n$, 当 m 为奇数时, $a_m < b_m$; 当 m 为偶数时, $a_m > b_m$.

(1) 当 $n = 2$ 时, 若 $b_2 = 3$, 求 a_1 ;

(2) $n \geq 2$, 记数列 $\{a_n\}$ 的所有项的和为 S ,

(i) 证明: 当 S 取得最大值时, 存在正整数 k ($1 \leq k \leq n$), 使得 $a_k = 2n$;

(ii) 证明: 当 n 为偶数时, $S \leq \frac{11}{8}n^2 + \frac{n}{4}$.

高三数学练习参考答案

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题所给的四个选项中，只有一项符合题目要求．）

1. B 【解析】因为 $8 \times \frac{1}{2} = 4$ ，所以中位数为 $\frac{3+4}{2} = 3.5$ ，故选 B.

2. C 【解析】由题， $A = [0, 1]$ ， $B = (0, 2)$ ，所以 $A \cup B = [0, 2)$ ，故选 C.

3. A 【解析】设 $A = \{x | a < x < a+1\}$ ， $B = \{x | -1 < x < 2\}$ ，则 $A \subseteq B$ ，所以 $\begin{cases} a \geq -1 \\ a+1 \leq 2 \end{cases}$ ，解得

$a \in [-1, 1]$ ，故选 A.

4. D 【解析】由题 $a^2 = 2^{m+1}$ ， $b^2 = 2^{m+2}$ ，故 $c^2 = 2^{m+1} + 2^{m+2} = 6 \times 2^m$ ，所以 $e^2 = \frac{6 \times 2^m}{2^{m+1}} = 3$ ，则

$e = \sqrt{3}$ ．故选 D.

5. C 【解析】 $y' = 3x^2 - 2x$ ，当 $x = 1$ 时， $y' = 1$ ，所以切线方程为 $y + 2 = x - 1$ ，即 $x - y - 3 = 0$ ，故选 C.

6. B 【解析】由题， $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos 2\alpha - \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 0$ ，即 $2\cos^2 \alpha - 1 - \frac{1 + \cos \alpha}{2} = 0$ ，解得 $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$ 或 $\cos \alpha = 1$ （舍），故选 B.

7. D 【解析】因为 $PA = PB$ ， $AC = BC$ ，所以 $\triangle PAC \cong \triangle PBC$ ，故 $CE = CF$ ，又因为 $\angle ECF = \frac{\pi}{3}$ ，

所以 $CE = CF = EF = \frac{1}{2} AB$ ，易得 $S_{\triangle PEF} = \frac{1}{4} S_{\triangle PAB}$ ，故 $V_{P-ABC} = V_{C-PAB} = 4V_{C-PEF}$ ，设三棱锥

$P-CEF$ 的高为 h_1 ，因为 $S_{\triangle CEF} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$ ，故 $\frac{1}{3} S_{\triangle ABC} h = 4 \times \frac{1}{3} S_{\triangle CEF} h_1$ ，得 $h_1 = h$ ，故选 D.

8. C 【解析】因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x) = f(x)$ ，故 $-f'(-x) = f'(x)$ ，所以 $f'(x)$ 为奇函数，

且 $f'(0) = 0$ ，因为对 $\forall x_1 < x_2 < 0$ ， $f'(x_1) > f'(x_2) > 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增， $f'(x)$

在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减．又 $f(x)$ 为偶函数， $f'(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减， $f'(x)$ 在

$(0, +\infty)$ 上单调递减，可得 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减，可得 $f'(2) < f'(1) < 0$ ，所以

$f(f'(1)) > f(f'(2))$), A 错误; 因为 $f(-1) > f(-2)$, 但不能确定 $f(-1)$ 和 $f(-2)$ 的正负, 所以不能确定 $f(f(-1))$ 和 $f(f(-2))$ 的大小关系, B 错误; 因为 $f(1) > f(2)$, $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f'(f(1)) < f'(f(2))$, C 正确; 因为 $f'(-2) > f'(-1)$, $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f'(f'(-1)) > f'(f'(-2))$, D 错误, 故选 C.

二、选择题 (本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题所给的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对得 6 分, 部分选对得部分分, 有选错得 0 分.)

9. AC 【解析】因为展开式共有 7 项, 所以展开中二项式系数最大的项为第 4 项, A 正确;

$T_{r+1} = C_6^r (ax)^{6-r} (-\sqrt{x})^r = (-1)^r C_6^r a^{6-r} x^{6-\frac{r}{2}}$ ($r=0,1,2,3,4,5,6$), 因为 $6-\frac{r}{2} \neq 0$, 所以展开式中无常数

项, B 错误; 当 $r=4$ 时, $T_5 = a^2 C_6^4 x^4$, 所以 $15a^2 = 60$, 又 $a > 0$, 所以 $a=2$, 令 $x=1$ 得

$(2x-\sqrt{x})^6 = 1$, 所以所有项的系数和为 1, C 正确; 当 $r=1,3,5$ 时, 为无理项, 所以无理项为第 2, 4, 6 项, D 错误. 故选 AC.

10. ABD 【解析】联立直线 l 与 C 的方程得: $k^2 x^2 + (2k^2 - 4)x + k^2 = 0$, 当 $k=0$ 时, 不合题意; 当

$k \neq 0$ 时, $\Delta = (2k^2 - 4)^2 - 4k^4 = 16 - 16k^2 > 0$, 得 $-1 < k < 1$ 且 $k \neq 0$, 所以 $k \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, A 正

确; 过点 A, B 分别作 C 的准线的垂线, 垂足分别为 M, N , 则 $|AM| = |AF|$, $|BN| = |BF|$, 所以

$|BN| = 2|AM|$, 又因为 $AM \parallel BN$, 点 D 在准线上, 所以 $|DA| = |AB|$, B 正确; 因为 $-1 < k < 1$, 且

$k \neq 0$, 又 $0 < x_1 < x_2$, $x_1 x_2 = 1$, 所以 $0 < x_1 < 1$, 因为 $|AF| = x_1 + 1$, 所以 $1 < |AF| < 2$, C 错误; 过点

A 作 x 轴的垂线, 垂足为 E , 则 $\sin \angle AFD = \sin \angle AFE = \frac{|AE|}{|AF|}$, $\tan \angle ADE = \frac{|AE|}{|DE|} = \frac{|AE|}{|AM|} = \frac{|AE|}{|AF|}$,

又因为 $|k| = \tan \angle ADE$, 所以 $\sin \angle AFD = |k|$, D 正确, 故选 ABD.

11. BCD 【解析】若 $|y_2 - y_1| = 2$, 则 M, N 两点中一个为极大值点, 一个为极小值点, 当两点为相邻的

极值点时, $|x_2 - x_1|$ 取得最小值, 最小值为 $\frac{T}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$, A 错误; 由 $\overline{CE} = \overline{EF}$ 得 $y_2 = 2y_1$,

$x_2 = 2x_1 - \frac{\pi}{2}$, $y_2 = \sin 3x_2 = \sin \left(6x_1 - \frac{3\pi}{2} \right) = \cos 6x_1 = 1 - 2\sin^2 3x_1$, 又 $y_1 = \sin 3x_1$, 所以

$2\sin 3x_1 = 1 - 2\sin^2 3x_1$, 解得 $\sin 3x_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 或 $\sin 3x_1 = \frac{-\sqrt{3}-1}{2} < -1$ (舍), 所以 $y_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, B 正

确；过点 B 斜率为 1 的直线 $l: y = x + 1 - \frac{\pi}{6}$ ，记 $g(x) = x + 1 - \frac{\pi}{6}$ ，因为 $g(0) = 1 - \frac{\pi}{6} > 0$ ， $f(0) = 0$ ，

所以 $f(0) < g(0)$ ，又 $g\left(\frac{\pi}{9}\right) = 1 - \frac{\pi}{18}$ ， $f\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，故 $f\left(\frac{\pi}{9}\right) > g\left(\frac{\pi}{9}\right)$ ，所以直线 l 与 $f(x)$ 的图象

在 $\left(0, \frac{\pi}{9}\right)$ 上必有交点，由对称性可知直线 $l: y = -x + 1 + \frac{\pi}{6}$ 与 $f(x)$ 的图象在 $\left(\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上必有交点，当

E ， F 分别为两个交点时， $\triangle BEF$ 为等腰直角三角形，C 正确；令

$g(x) = f(x)\sin x = \sin 3x \sin x = \sin(2x+x)\sin x = 3\sin^2 x - 4\sin^4 x$ ，令 $\sin^2 x = t (t \in (0, 1])$ ，

$h(t) = -4t^2 + 3t$ ，则 $h(t) \in \left[-1, \frac{9}{16}\right]$ ，当 $a < -1$ 或 $a > \frac{9}{16}$ 时，方程无实数根；因为 $x \in (0, \pi)$ ，当

$a \in \left(0, \frac{9}{16}\right)$ 时，方程有 4 个实数根；当 $a \in (-1, 0)$ 时，方程有 2 个实数根；当 $a = 0$ 时， $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，方

程有 2 个实数根；当 $a = \frac{9}{16}$ 时， $\sin x = \frac{\sqrt{6}}{4}$ ，方程有 2 个实数根；当 $a = -1$ 时， $\sin x = 1$ ，方程有唯一实

数根，所以 $a = -1$ ，D 正确。故选 BCD。

三、填空题（本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。）

12. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】 $|z| = \left| \frac{1+i}{2i} \right| = \frac{|1+i|}{|2i|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

13. 6 【解析】因为 $a > b > 0$ ， $\ln a = 2\ln b$ ，所以 $a = b^2$ ，由 $a \lg b = b \lg a$ 得 $b^2 \lg b = b \lg b^2$ ，即

$b \lg b = 2 \lg b$ ，得 $b = 2$ ， $a = 4$ ，所以 $a + b = 6$ 。

14. $\frac{1}{54}$ 【解析】投掷一次骰子， A 得分 B 不得分的概率为 $\frac{1}{6}$ ； A 不得分 B 得分的概率为 $\frac{1}{3}$ ； A 、 B 都得分的概率为 $\frac{1}{6}$ ； A 、 B 都不得分的概率为 $\frac{1}{3}$ 。则前 3 次投掷后 A 以 2:0 领先，第 4 次 A ， B 均得 1 分

的概率 $p_1 = C_3^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$ ；前 3 次投掷后 A 以 2:1 领先，第 4 次 A 得 1 分， B 不得分的概率

$$p_2 = \left[C_3^1 \times \frac{1}{6} \times C_2^1 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + C_3^2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{3} \right] \times \frac{1}{6} = \frac{3}{216}$$

，所以 A 以 3:1 获胜的概率 $p = p_1 + p_2 = \frac{1}{54}$ 。

四、解答题（本大题共 5 小题，共 77 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。）

15. 【解析】(1) 由题可得 $\bar{x} = \frac{1}{5}(1+2+3+4+5) = 3$ ， $\bar{y} = \frac{1}{5}(2+2+4+6+6) = 4$ ，

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 12, \quad \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 10, \quad \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 16,$$

$$\text{所以 } r = \frac{12}{\sqrt{10} \times \sqrt{16}} \approx 0.95,$$

因为 $r \approx 0.95$ ，可以推断 x 和 y 这两个变量正线性相关，且相关程度很强。

(2) 零假设为 H_0 ：有意愿观看比赛与性别无关联。

根据列联表中的数据，经计算得到

$$\chi^2 = \frac{1000 \times (400 \times 200 - 100 \times 300)^2}{500 \times 500 \times 300 \times 700} = \frac{1000}{21} \approx 47.619 > 10.828 = \chi_{0.001},$$

根据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为有意愿观看比赛与性别有关。

16. 【解析】(1) 证明：连接 CD_1 ，由题可知四边形 C_1CDD_1 为正方形，所以 $CD_1 \perp C_1D$ ，

因为 $D_1E = \frac{1}{2} A_1D_1 = BC$ ， $D_1E \parallel AD \parallel BC$ ，

所以四边形 BCD_1E 为平行四边形，所以 $BE \parallel CD_1$ ，

所以 $BE \perp C_1D$ 。

取 AD 中点 O ，连接 OE ， OB ，因为 $AD = 2BC$ ， $AD \parallel BC$ ， $AD \perp CD$ ，
所以 $AD \perp OB$ ，

因为四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 为直四棱柱，所以 $OE \perp$ 平面 $ABCD$ ，故 $OE \perp OB$ ，

又 $OB \cap OE = O$ ，

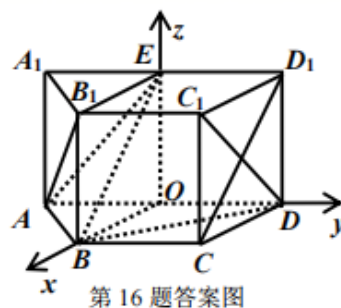
所以 $AD \perp$ 平面 B_1BOE ，

所以 $BE \perp AD$ ，

又 $C_1D \perp AD = D$ ，所以 $BE \perp$ 平面 AB_1C_1D ，

因为 $AB_1 \subset$ 平面 AB_1C_1D ，

所以 $BE \perp AB_1$ 。得证。



(2) 如图，由 (1) 知三条直线 OB ， OD ， OE 两两垂直，以 O 为坐标原点，分别以 OB ， OD ， OE 所在直线为 x ， y ， z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，则：

$$A(0, -2, 0), \quad B_1(2, 0, 2), \quad E(0, 0, 2), \quad C_1(2, 2, 2), \quad D(0, 2, 0),$$

设平面 AB_1E 的一个法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$ ，则

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AE} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{AB_1} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2y + 2z = 0, \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}, \text{ 令 } y = -1 \text{ 得 } x = 0, z = 1,$$

所以 $\vec{m} = (0, -1, 1)$,

$$\text{故 } \left| \cos \langle \vec{m}, \vec{C_1D} \rangle \right| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{C_1D}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{C_1D}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

所以直线 C_1D 与平面 AB_1E 所成角的正弦值为 $\frac{1}{2}$.

17. 【解析】(1) 由正弦定理得 $\sqrt{3}\sin A \cos C = \sqrt{3}\sin B + \sin C \sin A$,

因为 $A + B + C = \pi$, 所以 $\sqrt{3}\sin A \cos C = \sqrt{3}\sin(A + C) + \sin C \sin A$,

展开整理得 $-\sqrt{3}\cos A \sin C = \sin C \sin A$,

因为 $0 < C < \pi$, 所以 $\sin C > 0$,

故 $-\sqrt{3}\cos A = \sin A$, 即 $\tan A = -\sqrt{3}$, 又 $0 < A < \pi$,

所以 $A = \frac{2\pi}{3}$.

(2) 因为 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$,

$$\text{所以 } \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} \times c \times AD \times \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \times b \times AD \times \sin \frac{\pi}{3},$$

得 $bc = (b + c) \times AD$,

由余弦定理得 $3 = b^2 + c^2 + 1 = (b + c)^2 - 1$, 解得 $b + c = 2$,

所以 $AD = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}$.

(3) 由题 $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{2}{3}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$,

$$\text{所以 } |\vec{AD}|^2 = \left(\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC} \right)^2 = \frac{1}{9}|\vec{AB}|^2 + \frac{4}{9}\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \frac{4}{9}|\vec{AC}|^2,$$

$$\text{即 } 72 = c^2 + 4bc \cos \frac{2\pi}{3} + 4b^2 = c^2 - 2bc + 4b^2 \geq 2\sqrt{c^2 \times 4b^2} - 2bc = 2bc,$$

所以 $bc \leq 36$, 当且仅当 $c = 2b$ 时等号成立,

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}bc \leq 9\sqrt{3},$$

所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $9\sqrt{3}$.

18. 【解析】(1) 设椭圆的焦距为 $2c$ ，则 $a^2 = b^2 + c^2$ ①，

由题，椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ②，

又点 F_2 到直线 AF_1 的距离为 $\sqrt{3}$ ，所以 $\frac{1}{2} \times 2c \times b = \frac{1}{2} \times \sqrt{b^2 + c^2} \times \sqrt{3}$ ，得 $2bc = \sqrt{3}a$ ③，

由①②③解得 $a = 2$ ， $b = 1$ ， $c = \sqrt{3}$ ，

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 。

(2) (i) 由 (1) 知 $A(0, 1)$ ，设 $M(2\cos\theta, \sin\theta) (0 \leq \theta < 2\pi)$ ，

则 $|MA|^2 = 4\cos^2\theta + (\sin\theta - 1)^2 = 3\cos^2\theta - 2\sin\theta + 2 = -3\sin^2\theta - 2\sin\theta + 5$ ，

由二次函数的性质可得当 $\sin\theta = -\frac{1}{3}$ 时， $|MA|^2$ 取得最大值 $\frac{16}{3}$ ，所以 $|MA|$ 最大值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，

此时 $\cos\theta = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，不妨取 $M\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ ，

由椭圆的对称性可知当 $N\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ 时，

$|NA|$ 取得最大值 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，此时 $|MA| + |NA|$ 取得最大值，

所以 $\cos \frac{\angle MAN}{2} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

所以 $\cos \angle MAN = 2\cos^2 \frac{\angle MAN}{2} - 1 = -\frac{1}{3}$ 。

(ii) 由题可知，点 M ， N 在 x 轴的同侧，

根据椭圆的对称性，不妨设 M ， N 在 x 轴的上方，所以 $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ ，则 $y' = \frac{-x}{4\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} = \frac{-x}{4y}$ ，

设直线 MN 的方程为 $x = ny + 4 (n \neq 0)$ ， $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ，

则椭圆 E 在点 M 处的切线为 $y - y_1 = \frac{-x_1}{4y_1}(x - x_1)$ ，即 $\frac{x_1 x}{4} + y_1 y = 1$ ，

同理可得椭圆 E 在点 N 处的切线为 $\frac{x_2x}{4} + y_2y = 1$,

设 $P(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_1x_0}{4} + y_1y_0 = 1$, 且 $\frac{x_2x_0}{4} + y_2y_0 = 1$,

所以 M, N 两点均在直线 $\frac{x_0x}{4} + y_0y = 1$ 上,

又直线 MN 的方程为 $x = ny + 4$, 即 $\frac{x}{4} - \frac{ny}{4} = 1$,

所以 $x_0 = 1, y_0 = -\frac{n}{4}$, 又 $y_0 = 1$, 所以 $n = -4$,

所以直线 MN 的方程为 $x + 4y - 4 = 0$.

19. 【解析】(1) 由题, 当 $n = 2$ 时, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$,

若 $b_2 = 3$, 因为 $a_2 > b_2$, 所以 $a_2 = 4$,

又 $a_1 < b_1$, 故 $a_1 = 1, b_1 = 2$,

所以 $a_1 = 1$.

(2) (i) 证明: 当 S 取得最大值时, 假设不存在正整数 $k (1 \leq k \leq n)$, 使得 $a_k = 2n$.

由条件①可得一定存在正整数 k , 使得 $b_k = 2n$. 由条件②可得 k 为奇数.

(I) 若存在的 a_i (i 为偶数, 且 $i \leq n$), 使得 $a_i > a_k$, 互换 a_i 和 b_k , 构成新的数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 则新的数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 也满足条件①和②, 此时新数列 $\{a_n\}$ 的所有项的和 $T > S$,

与已知条件矛盾, 假设不成立;

(II) 若存在的 a_i (i 为偶数, 且 $i \leq n$), 使得 $a_i < a_k$, 互换 a_i 和 a_k , 再互换 a_i 和 b_k , 构成新的数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 则新的数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 也满足条件①和②, 此时新数列 $\{a_n\}$ 的所有项的和 $T > S$, 与已知条件矛盾, 假设不成立.

综上可得, 当 S 取得最大值时, 存在正整数 $k (1 \leq k \leq n)$, 使得 $a_k = 2n$.

(ii) 证明: 当 n 为偶数时,

$$(a_2 - b_2) + (a_4 - b_4) + \dots + (a_n - b_n) \leq (2n-1) + (2n-3) + \dots + [2n - (n-1)] = \frac{3n^2}{4},$$

$$\text{所以 } (a_2 + a_4 + \dots + a_n) \leq (b_2 + b_4 + \dots + b_n) + \frac{3n^2}{4} (*),$$

又当 t 为奇数时, $b_t - a_t \geq 1$,

所以 $(a_1 + a_3 + L + a_{n-1}) \leq (b_1 + b_3 + L + b_{n-1}) - \frac{n}{2} (**)$,

记 $M = b_1 + b_2 + L + b_n$, 则 $(*) + (**) \text{ 得 } S \leq M + \frac{3}{4}n^2 - \frac{n}{2}$,

又 $S + M = 1 + 2 + L + 2n = 2n^2 + n$,

所以 $S \leq \frac{11}{8}n^2 + \frac{n}{4}$. 得证.