

人民教育出版社高中数学教材（2019）

基础知识手册

V1.0

教师版

中国数学解题研究会（QQ 群 47224687）出品

参与编写人员

【必修一】

第一章 集合与常用逻辑用语·····	陈治海
第二章 一元二次函数，方程和不等式 ·····	李玉倩
第三章 函数的概念与性质·····	王如意
第四章 指数函数与对数函数·····	蒋寿义
第五章 三角函数·····	姚发展

【必修二】

第六章 平面向量·····	万 峰
第七章 复数·····	朱文洁
第八章 立体几何初步·····	陈 倩
第九章 统计·····	武 玺
第十章 概率·····	敖建洪

【选择性必修一】

第一章 空间向量与立体几何·····	郭 瑞
第二章 直线和圆的方程·····	田 浩
第三章 圆锥曲线的方程·····	高 峰

【选择性必修二】

第四章 数列·····	蒋寿义
第五章 一元函数的导数及其应用·····	杨茜靖

【选择性必修三】

第六章 计数原理·····	白敬伟
第七章 随机变量及其分布·····	吕鑫跃
第八章 成对数据的统计分布·····	张 顺

统稿排版·····	齐建民
-----------	-----

目录

【必修一】	3
第一章 集合与常用逻辑用语	3
第二章 一元二次函数，方程和不等式	7
第三章 函数的概念与性质	10
第四章 指数函数与对数函数	33
第五章 三角函数	38
【必修二】	45
第六章 平面向量	45
第七章 复数	49
第八章 立体几何初步	51
第九章 统计	58
第十章 概率	60
【选择性必修一】	64
第一章 空间向量与立体几何	64
第二章 直线和圆的方程	72
第三章 圆锥曲线的方程	74
【选择性必修二】	84
第四章 数列	84
第五章 一元函数的导数及其应用	90
【选择性必修三】	92
第六章 计数原理	92
第七章 随机变量及其分布	95
第八章 成对数据的统计分布	103

【必修一】

第一章 集合与常用逻辑用语

一、元素与集合的概念

1. 元素：一般地，把研究对象统称为元素(element)，常用小写拉丁字母 $a, b, c, \dots$ 表示.
2. 集合：把一些元素组成的总体叫做集合(set)(简称为集)，常用大写拉丁字母 $A, B, C, \dots$ 表示.
3. 集合相等：指构成两个集合的元素是一样的.
4. 集合中元素的特性：给定的集合，它的元素必须是确定的、互不相同的.

二、元素与集合的关系

知识点	关系	概念	记法	读法
元素与集合的关系	属于	如果 a 是集合 A 中的元素，就说 a 属于集合 A	$a \in A$	“ a 属于 A ”
	不属于	如果 a 不是集合 A 中的元素，就说 a 不属于集合 A	$a \notin A$	“ a 不属于 A ”

三、常用数集及表示符号

名称	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
记法	$\mathbf{N}$	$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$

四、集合的表示

1、列举法

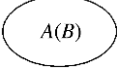
把集合的所有元素一一列举出来，并用花括号 “{}” 括起来表示集合的方法叫做列举法.

2、描述法

一般地，设 A 是一个集合，把集合 A 中所有具有共同特征 $P(x)$ 的元素 x 所组成的集合表示为 $\{x \in A | P(x)\}$ ，这种表示集合的方法称为描述法.

五、子集、真子集、集合相等

1. 子集、真子集、集合相等的相关概念

	定义	符号表示	图形表示
子集	如果集合 A 中的 <u>任意一个</u> 元素都是集合 B 中的元素，就称集合 A 是集合 B 的子集	$A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$)	
真子集	如果集合 $A \subseteq B$ ，但存在元素 $x \in B$ ， <u>且 $x \notin A$</u> ，就称集合 A 是集合 B 的真子集	$A \subsetneq B$ (或 $B \supsetneq A$)	
集合相等	如果集合 A 的 <u>任何一个</u> 元素都是集合 B 的元素，同时集合 B 的 <u>任何一个</u> 元素都是集合 A 的元素，那么集合 A 与集合 B 相等	$A \equiv B$	

2. Venn 图

用平面上封闭曲线的内部代表集合，这种图称为 Venn 图.

3. 子集的性质

- (1)任何一个集合是它本身的子集，即 $A \subseteq A$.
- (2)对于集合 A, B, C ，如果 $A \subseteq B$ ，且 $B \subseteq C$ ，那么 $A \subseteq C$.

六、空集

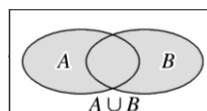
1. 定义：不含任何元素的集合叫做空集，记为 $\emptyset$.
2. 规定：空集是任何集合的子集.

七、集合的基本运算

1、并集

集合 A 与 B 的并集是所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，记作 $A \cup B$ (读作 “ A 并 B ”) 即 $A \cup B = \{x | x \in A, \text{或 } x \in B\}$

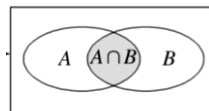
可用 Venn 图表示为



2、交集

集合 A 与 B 的交集是由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合，记作 $A \cap B$ (读作 “ A 交 B ”) 即 $A \cap B = \{x | x \in A, \text{且 } x \in B\}$

可用 Venn 图表示为



3、全集与补集

全集

(1)定义：如果一个集合含有所研究问题中涉及的所有元素，那么就称这个集合为全集。

(2)记法：全集通常记作 U 。

补集

自然语言	对于一个集合 A ，由全集 U 中 <u>不属于集合 A</u> 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集，记作 $\complement_U A$
符号语言	$\complement_U A = \{x x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$
图形语言	

八、充分条件与必要条件

	“若 p ，则 q ”为真命题	“若 p ，则 q ”为假命题
推出关系	$p \Rightarrow q$	$p \nRightarrow q$
条件关系	p 是 q 的 <u>充分</u> 条件 q 是 p 的 <u>必要</u> 条件	p 不是 q 的 <u>充分</u> 条件 q 不是 p 的 <u>必要</u> 条件
定理关系	判定定理给出了相应数学结论成立的充分条件 性质定理给出了相应数学结论成立的必要条件	

九、充要条件

- 如果“若 p ，则 q ”和它的逆命题“若 q ，则 p ”均为真命题，即既有 $p \Rightarrow q$ ，又有 $q \Rightarrow p$ ，就记作 $p \Leftrightarrow q$ ，此时， p 既是 q 的充分条件，也是 q 的必要条件，我们说 p 是 q 的充分必要条件，简称为充要条件。
- 如果 p 是 q 的充要条件，那么 q 也是 p 的充要条件。概括地说，如果 $p \Leftrightarrow q$ ，那么 p 与 q 互为充要条件。

十、全称量词和存在量词

	全称量词	存在量词
量词	所有的、任意一个	存在一个、至少有一个
符号	$\forall$	$\exists$
命题	含有 <u>全称量词</u> 的命题是全称量词命题	含有 <u>存在量词</u> 的命题是存在量词命题
命题形式	“对 M 中任意一个 x ， $p(x)$ 成立”， 可用符号简记为“ $\forall x \in M, p(x)$ ”	“存在 M 中的元素 x ， $p(x)$ 成立”， 可用符号简记为“ $\exists x \in M, p(x)$ ”

十一、含量词的命题的否定

p	$\neg p$	结论
全称量词命题 $\forall x \in M, p(x)$	$\exists x \in M, \neg p(x)$	全称量词命题的否定是 <u>存在量词命题</u>
存在量词命题 $\exists x \in M, p(x)$	<u>$\forall x \in M, \neg p(x)$</u>	存在量词命题的否定是 <u>全称量词命题</u>

第二章 一元二次函数，方程和不等式

2.1 等式性质与不等式性质

一. 不等式的概念

用数学符号“ $\neq$ ”、“ $>$ ”、“ $<$ ”、“ $\geq$ ”、“ $\leq$ ”连接两个数或代数式，以表示它们之间的不等关系，含有这些不等号的式子，叫做不等式.

二. 符号“ $\geq$ ”和“ $\leq$ ”的含义

如果 a, b 是两个实数，那么 $a \geq b$ ，即为 $a > b$ 或 $a = b$ ； $a \leq b$ ，即为 $a < b$ 或 $a = b$.

三. 比较实数 a, b 大小的依据

1. 文字叙述：如果 $a - b$ 是正数，那么 $a > b$ ；如果 $a - b$ 等于零，那么 $a = b$ ；

如果 $a - b$ 是负数，那么 $a < b$ ，反过来也对.

2. 符号表示： $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$ ； $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$ ； $a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$.

要比较两个实数的大小，可以转化为比较它们的差与零的大小.

四. 等式的基本性质

1. 性质1: 如果 $a = b$, 那么 $b = a$.

2. 性质2: 如果 $a = b, b = c$, 那么 $a = c$.

3. 性质3: 如果 $a = b$, 那么 $a \pm c = b \pm c$.

4. 性质4: 如果 $a = b$, 那么 $ac = bc$.

5. 性质5: 如果 $a = b, c \neq 0$, 那么 $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

五. 不等式的性质

性质 1 (对称性): 如果 $a > b$ ，那么 $b < a$ ；如果 $b < a$ ，那么 $a > b$. 即 $a > b \Leftrightarrow b < a$.

性质 2 (传递性): 如果 $a > b, b > c$, 那么 $a > c$. 即 $a > b, b > c \Rightarrow a > c$.

性质 3 (加法法则): 如果 $a > b$ ，那么 $a + c > b + c$.

推论 1: (移项法则) 不等式中任何一项都可以改变符号后移到不等号的另一边.

性质 4 (乘法法则): 如果 $a > b, c > 0$, 那么 $ac > bc$; 如果 $a > b, c < 0$, 那么 $ac < bc$.

性质 5: 如果 $a > b, c > d$., 那么 $a + c > b + d$.

一般结论: 几个同向不等式的两边分别相加，所得到的不等式与原不等式同向.

性质 6: 如果 $a > b > 0, c > d > 0$, 那么 $ac > bd$.

一般结论: 几个两边都是正数的同向不等式的两边分别相乘，所得到的不等式与原不等式同向.

性质 7: 如果 $a > b > 0$, 那么 $a^n > b^n$. ($n \in \mathbf{N}_+, n > 1$).

倒数法则：已知 $ab > 0$ ，如果 $a > b$ ，那么 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ；如果 $a < b$ ，那么 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 。

2.2 基本不等式

一. 算术平均数与几何平均数

若 $a > 0$ ， $b > 0$ ，则 a ， b 的算术平均数为 $\frac{a+b}{2}$ ，几何平均数为 $\sqrt{ab}$ 。

二. 基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ，(1) 基本不等式成立的条件： $a > 0$ ， $b > 0$ ；

(2) 等号成立的条件：当且仅当 $a = b$ 时取等号。

三. 基本不等式可叙述为：两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数。

四. 几个重要的不等式

$$\left. \begin{aligned} a^2 + b^2 &\geq 2ab, a, b \in R \\ \frac{b}{a} + \frac{a}{b} &\geq 2, ab > 0 \\ ab &\leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, a, b \in R \\ \frac{a^2 + b^2}{2} &\geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, a, b \in R \end{aligned} \right\} \text{当且仅当 } a = b \text{ 时取等号.}$$

五. 利用基本不等式求最值问题

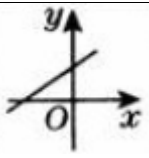
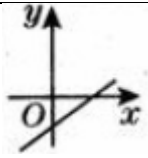
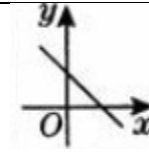
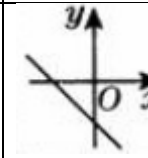
已知 $x > 0$ ， $y > 0$ ，

(1) 如果积 xy 等于定值 P ，那么当且仅当 $x = y$ 时，和 $x + y$ 有最小值 $2\sqrt{P}$ 。(简记：积定和最小)

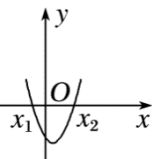
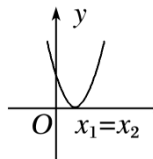
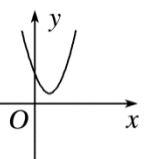
(2) 如果和 $x + y$ 等于定值 S ，那么当且仅当 $x = y$ 时，积 xy 有最大值 $\frac{S^2}{4}$ 。(简记：和定积最大)

2.3 二次函数与一元二次方程、不等式

一. 一元一次不等式（组）

$y = kx + b$	$k > 0$		$k < 0$	
	$b > 0$	$b < 0$	$b > 0$	$b < 0$
图象				
$kx + b > 0$	$\{x \mid x > -\frac{b}{k}\}$	$\{x \mid x > -\frac{b}{k}\}$	$\{x \mid x < -\frac{b}{k}\}$	$\{x \mid x < -\frac{b}{k}\}$
$kx + b < 0$	$\{x \mid x < -\frac{b}{k}\}$	$\{x \mid x < -\frac{b}{k}\}$	$\{x \mid x > -\frac{b}{k}\}$	$\{x \mid x > -\frac{b}{k}\}$

二. 一元二次不等式（组）

$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的图象			
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根	有两个不相等的实根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$	有两个相等的实数根 $x_1 = x_2$	没有实数根
一元二次不等式的解集	$ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$)	$\{x \mid x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$	$\{x \mid x \neq x_{1,2}\}$
	$ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$)	$\{x \mid x_1 < x < x_2\}$	$\emptyset$

三. 三个二次的关系

1. 函数的零点：二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, 若 $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$, 则称 x_0 为函数的零点

2. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的零点.

$\Leftrightarrow$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象与 x 轴交点的横坐标.

$\Leftrightarrow$ 方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的实数解.

$\Leftrightarrow$ 不等式 $ax^2 + bx + c > (<) 0 (a \neq 0)$ 的解集的端点值.

四. 分式不等式的解法

解题口诀：移项通分除化乘，注意分母不为零.

$$(1) \frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) > 0; \quad (2) \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}.$$

解题步骤：（1）首项系数化为正；（2）移项通分，不等号右侧化为 0；

（3）因式分解，化为几个一次因式乘积的形式；（4）数轴标根。

五. 绝对值不等式的解法

1. 绝对值的代数意义：

正数的绝对值是它的本身，负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值仍是零。即 $|a| = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$

2. 绝对值的几何意义：一个数的绝对值，就是数轴上表示它的点到原点的距离。

$$(1) |f(x)| > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) \text{ 或 } f(x) < -g(x);$$

$$(2) |f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x);$$

$$(3) |f(x)| < g(x) \Leftrightarrow f(x)^2 < g(x)^2.$$

六. 一元高次不等式的解法：穿针引线法

解题步骤：（1）最高次项系数化为正；（2）数轴顺序标根；（3）右上角起线；（4）奇穿偶回（奇穿偶不穿）。

第三章 函数的概念与性质

一、函数的概念

设 A 、 B 是非空的数集，如果按照某种确定的对应关系 f ，使对于集合 A 中的任意一个数 x ，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应，那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数。记作： $y = f(x), x \in A$ 。其中： x 叫做自变量， x 的取值范围 A 叫做函数的定义域；与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合叫做函数的值域。

构成函数的三要素：定义域、对应关系和值域

注意：（1）构成函数三个要素是定义域、对应关系和值域。由于值域是由定义域和对应关系决定的，所以，如果两个函数的定义域和对应关系完全一致，即称这两个函数相等（或为同一函数）。

（2）两个函数相等当且仅当它们的定义域和对应关系完全一致，而与表示自变量和函数值的字母无关。

相同函数的判断方法：①定义域一致；②表达式相同（两点必须同时具备）

考点一：定义域的求法

一. 已知函数解析式型

即给出函数的解析式的定义域求法，其解法是由解析式有意义列出关于自变量的不等式或不等式组，解此不等式（或组）即得原函数的定义域

求函数的定义域需要从这几个方面入手：

- （1）分母不为零
- （2）偶次根式的被开方数非负。
- （3）对数中的真数部分大于 0。
- （4）指数、对数的底数大于 0，且不等于 1
- （5） $y = \tan x$ 中 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ 等。

（6） x^0 中 $x \neq 0$

例 1：求下列函数的定义域

$$(1) y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-1}; (2) y = \frac{2x}{\sqrt{2x-4}-\sqrt{5-x}}; (3) y = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{|x|-x} (a > 0).$$

解析：（1） $\because y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-1} \therefore \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$ 解得： $-3 \leq x < 1$ 或 $x > 1$

所以函数 $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-1}$ 的定义域为 $[-3, 1) \cup (1, +\infty)$ ；故答案为： $[-3, 1) \cup (1, +\infty)$ 。

$$(2) \because y = \frac{2x}{\sqrt{2x-4}-\sqrt{5-x}} \therefore \begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ \sqrt{2x-4} \neq \sqrt{5-x} \end{cases} \text{ 解得： } 2 \leq x < 3 \text{ 或 } 3 < x \leq 5$$

所以函数 $y = \frac{2x}{\sqrt{2x-4}-\sqrt{5-x}}$ 的定义域为 $[2,3) \cup (3,5]$ ；故答案为： $[2,3) \cup (3,5]$ 。

$$(3) \because y = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{|x|-x} (a>0) \therefore \begin{cases} a^2-x^2 \geq 0 \\ |x|-x \neq 0 \end{cases} \text{解得: } -a \leq x < 0$$

所以函数 $y = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{|x|-x} (a>0)$ 的定义域为 $[-a,0)$ ；故答案为： $[-a,0)$ 。

二、抽象函数型

抽象函数是指没有给出解析式的函数，不能用常规方法求解，一般表示为已知一个抽象函数的定义域求另一个抽象函数的定义域，一般有两种情况。

(一) 已知 $f(x)$ 的定义域，求 $f[g(x)]$ 的定义域。

其解法是：已知 $f(x)$ 的定义域是 $[a,b]$ 求 $f[g(x)]$ 的定义域是解 $a \leq g(x) \leq b$ ，即为所求的定义域。

例 2：已知 $f(x)$ 的定义域为 $[-2,2]$ ，求 $f(x^2-1)$ 的定义域。

解： $\because -2 \leq x \leq 2, \therefore -2 \leq x^2-1 \leq 2$ ，解得 $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$

即函数 $f(x^2-1)$ 的定义域为 $\{x | -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}\}$

举一反三

已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-1,4]$ ，求函数 $f(2x+1)$ 的定义域。

【答案】 $\left[-1, \frac{3}{2}\right]$ 。

【详解】

已知 $f(x)$ 的定义域是 $[-1, 4]$ ，即 $-1 \leq x \leq 4$ 。故对于 $f(2x+1)$ 应有 $-1 \leq 2x+1 \leq 4$ ，

$$\therefore -2 \leq 2x \leq 3, \therefore -1 \leq x \leq \frac{3}{2} \therefore \text{函数 } f(2x+1) \text{ 的定义域是 } \left[-1, \frac{3}{2}\right]。$$

(二) 已知 $f[g(x)]$ 的定义域，求 $f(x)$ 的定义域。

其解法是：已知 $f[g(x)]$ 的定义域是 $[a,b]$ 求 $f(x)$ 的定义域的方法是： $a \leq x \leq b$ ，求 $g(x)$ 的值域，即所求 $f(x)$ 的定义域。

例 3：已知 $f(2x+1)$ 的定义域为 $[1,2]$ ，求 $f(x)$ 的定义域。

解： $\because 1 \leq x \leq 2, \therefore 2 \leq 2x \leq 4, \therefore 3 \leq 2x+1 \leq 5$ 。

即函数 $f(x)$ 的定义域是 $\{x | 3 \leq x \leq 5\}$ 。

举一反三

已知函数 $f(3x+1)$ 的定义域为 $[1,7]$ ，求函数 $f(x)$ 的定义域。

【答案】 $[4,22]$

【详解】因为 $f(3x+1)$ 的定义域为 $[1, 7]$,

所以 $1 \leq x \leq 7$, 所以 $4 \leq 3x+1 \leq 22$. 令 $3x+1=t$, 则 $4 \leq t \leq 22$.

即 $f(t)$ 中, $t \in [4, 22]$. 故 $f(x)$ 的定义域为 $[4, 22]$.

(三) 复合函数定义域综合求解

例 4: 已知函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $[1, 2]$, 则 $f(-2x+3)$ 的定义域为 ()

- A. $[1, 2]$ B. $[0, \frac{1}{2}]$ C. $[-1, 1]$ D. $[\frac{1}{2}, 1]$

【答案】B

【详解】因为函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $[1, 2]$, 所以 $1 \leq x \leq 2$, 则 $2 \leq x+1 \leq 3$,

所以 $2 \leq -2x+3 \leq 3$, 解得 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, 所以 $f(-2x+3)$ 的定义域为 $[0, \frac{1}{2}]$, 故选: B

举一反三

1. 已知函数 $y = f(2x+1)$ 的定义域为 $[-1, 2]$, 则函数 $y = f(x-1)$ 的定义域为_____.

【答案】 $[0, 6]$

【详解】函数 $y = f(2x+1)$ 的定义域为 $[-1, 2]$, 即 $-1 \leq x \leq 2$, 所以 $-1 \leq 2x+1 \leq 5$,

所以 $-1 \leq x-1 \leq 5$, 即 $0 \leq x \leq 6$, 所以函数的定义域为 $[0, 6]$. 故答案为: $[0, 6]$.

三、逆向思维型

即已知所给函数的定义域求解析式中参数的取值范围. 特别是对于已知定义域为 R , 求参数的范围问题通常是转化为恒成立问题来解决.

例 5: 已知函数 $y = \sqrt{mx^2 - 6mx + m + 8}$ 的定义域为 R 求实数 m 的取值范围.

解: 讨论:

①当 $m = 0$ 时, 函数的定义域为 R ;

②当 $m \neq 0$ 时, $mx^2 - 6mx + m + 8 \geq 0$ 是二次不等式, 其对一切实数 x 都成立的充要条件是

$$\begin{cases} m > 0 \\ \Delta = (-6m)^2 - 4m(m+8) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < m \leq 1$$

综上所述: $0 \leq m \leq 1$.

举一反三

已知函数 $f(x) = \frac{kx+7}{kx^2+4kx+3}$ 的定义域是 R , 求实数 k 的取值范围.

解: 要使函数有意义, 则必须 $kx^2 + 4kx + 3 \neq 0$ 恒成立,

因为 $f(x)$ 的定义域为 R , 即 $kx^2 + 4kx + 3 = 0$ 无实数解

讨论: ①当 $k \neq 0$ 时, $\Delta = 16k^2 - 4 \times 3k < 0$ 恒成立, 解得 $0 < k < \frac{3}{4}$;

②当 $k=0$ 时, 方程左边 $= 3 \neq 0$ 恒成立.

综上得: k 的取值范围是 $0 \leq k < \frac{3}{4}$.

考点二: 求函数值域

例1 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}-1, & x > 1 \\ -2x+a, & x \leq 1 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上满足: 对任意 $x_1 \neq x_2$, 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则实数 a 的

取值范围是 ()

A. $(-\infty, 2]$ B. $(-\infty, -2]$ C. $[2, +\infty)$ D. $[-2, +\infty)$

【答案】C

【详解】由题意, 得到 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}-1, & x > 1 \\ -2x+a, & x \leq 1 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,

因此只需 $1-1 \leq -2+a$, 解得 $a \geq 2$. 故选: C.

二、值域是函数 $y = f(x)$ 中 y 的取值范围.

常用的求值域的方法: (1) 直接法 (2) 图象法 (数形结合)
(3) 函数单调性法 (4) 配方法
(5) 换元法 (包括三角换元) (6) 反函数法 (逆求法)
(7) 分离常数法 (8) 判别式法
(9) 复合函数法 (10) 不等式法
(11) 平方法等等

这些解题思想与方法贯穿了高中数学的始终.

1. 利用常见函数的值域来求 (直接法)

一次函数 $y = ax + b (a \neq 0)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 值域为 $\mathbf{R}$;

反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 值域为 $\{y | y \neq 0\}$;

二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

当 $a > 0$ 时, 值域为 $\{y | y \geq \frac{(4ac-b^2)}{4a}\}$; 当 $a < 0$ 时, 值域为 $\{y | y \leq \frac{(4ac-b^2)}{4a}\}$.

例2 求下列函数的值域

① $y = 3x + 2 (-1 \leq x \leq 1)$ ② $f(x) = -\frac{2}{3x} (1 \leq x \leq 3)$

③ $y = x + \frac{1}{x}$ (记住图像)

解: ① $\because -1 \leq x \leq 1, \therefore -3 \leq 3x \leq 3,$

$\therefore -1 \leq 3x+2 \leq 5$, 即 $-1 \leq y \leq 5$, $\therefore$ 值域是 $[-1, 5]$

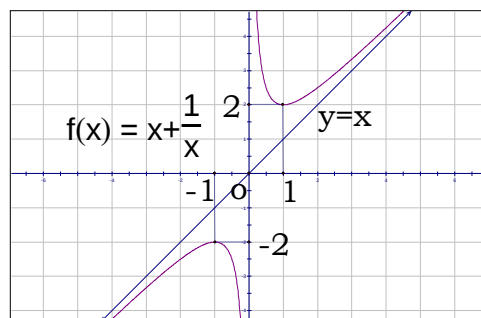
②略

③ 当 $x > 0$, $\therefore y = x + \frac{1}{x} = (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 + 2 \geq 2$,

当 $x < 0$ 时, $y = -(-x + \frac{1}{-x}) = -(\sqrt{-x} - \frac{1}{\sqrt{-x}})^2 - 2 \leq -2$.

$\therefore$ 值域是 $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. (此法也称为配方法)

函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的图像为:



2.二次函数在区间上的值域(最值):

例 3.求下列函数的最大值、最小值与值域:

① $y = x^2 - 4x + 1$; ②; $y = x^2 - 4x + 1, x \in [3, 4]$

③ $y = x^2 - 4x + 1, x \in [0, 1]$; ④ $y = x^2 - 4x + 1, x \in [0, 5]$;

解: $\because y = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3$, $\therefore$ 顶点为 $(2, -3)$, 顶点横坐标为 2.

① $\because$ 抛物线的开口向上, 函数的定义域 $\mathbf{R}$,

$\therefore x=2$ 时, $y_{\min} = -3$, 无最大值; 函数的值域是 $\{y|y \geq -3\}$.

② $\because$ 顶点横坐标 $2 \notin [3, 4]$, 当 $x=3$ 时, $y = -2$; $x=4$ 时, $y = 1$;

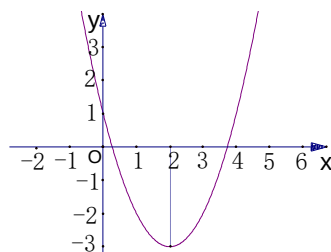
$\therefore$ 在 $[3, 4]$ 上, $y_{\min} = -2$, $y_{\max} = 1$; 值域为 $[-2, 1]$.

③ $\because$ 顶点横坐标 $2 \notin [0, 1]$, 当 $x=0$ 时, $y = 1$; $x=1$ 时, $y = -2$,

$\therefore$ 在 $[0, 1]$ 上, $y_{\min} = -2$, $y_{\max} = 1$; 值域为 $[-2, 1]$.

④ $\because$ 顶点横坐标 $2 \in [0, 5]$, 当 $x=0$ 时, $y = 1$; $x=2$ 时, $y = -3$; $x=5$ 时, $y = 6$,

$\therefore$ 在 $[0, 5]$ 上, $y_{\min} = -3$, $y_{\max} = 6$; 值域为 $[-3, 6]$.



3. 单调性法

例 4.求函数 $y = 4x - \sqrt{1-3x} \left(x \leq \frac{1}{3} \right)$ 的值域.

设 $f(x) = 4x, g(x) = -\sqrt{1-3x} (x \leq 1/3)$, 易知它们在定义域内为增函数, 从而 $y = f(x) + g(x) = 4x - \sqrt{1-3x}$ 在定义域为 $x \leq 1/3$ 上也为增函数, 而且 $y \leq f(1/3) + g(1/3) = 4/3$, 因此, 所求的函数值域为 $\{y|y \leq 4/3\}$.

4. 换元法

例 5. 1.求函数 $y = x + 2\sqrt{1-x}$ 的值域

解: 设 $\sqrt{1-x} = t$, 则 $y = -t^2 + 2t + 1 (t \geq 0)$

$\because$ 对称轴 $t = 1 \in [0, +\infty)$, 且开口向下 $\therefore$ 当 $t = 1$ 时, $y_{\max} = 2$

$\therefore$ 值域为 $(-\infty, 2]$

2.求函数 $y = 2x - \sqrt{x-1}$ 的值域.

答案 $[\frac{15}{8}, +\infty)$.

【分析】

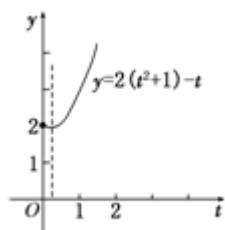
利用换元法设 $t = \sqrt{x-1}$, 将函数化为 $y = 2(t^2+1) - t$, 再利用二次函数的图像与性质即可求解.

【详解】

设 $t = \sqrt{x-1}$, 则 $t \geq 0$ 且 $x = t^2 + 1$,

$$\text{所以 } y = 2(t^2+1) - t = 2(t - \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{8},$$

由 $t \geq 0$, 再结合函数的图象(如图), 可得函数的值域为 $[\frac{15}{8}, +\infty)$.



5. 平方法

例7 (选) 求函数 $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}$ 的值域

解: 函数定义域为: $x \in [3, 5]$

$$y^2 = (x-3) + (5-x) + 2\sqrt{-x^2+8x-15} \text{ 由 } x \in [3, 5], \text{ 得 } -x^2+8x-15 \in [0, 1]$$

$$\therefore y^2 \in [2, 4] \therefore \text{原函数值域为 } [\sqrt{2}, 2]$$

6. 分离常数法

例8 求函数 $y = \frac{x-1}{x+2}$ 的值域

$$\text{由 } y = \frac{x+2-3}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2} \neq 1, \text{ 可得值域 } \{y | y \neq 1\}$$

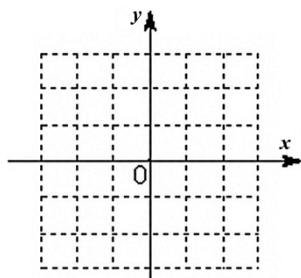
小结: 已知分式函数 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$), 如果在其自然定义域(代数式自身对变量的要求)内, 值域为

$\{y | y \neq \frac{a}{c}\}$; 如果是条件定义域(对自变量有附加条件), 采用部分分式法将原函数化为

$$y = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx + d} \quad (ad \neq bc), \text{ 用复合函数法来求值域.}$$

7. 数型结合法

例9 已知函数 $f(x) = |2x-1|$.



(1) 用分段函数的形式表示该函数;

(2) 在所给的坐标系中画出该函数的图像, 并根据图像直接写出该函数的定义域、值域(不要求写作图及解答过程)

答案 1) $f(x) = \begin{cases} 2x-1 (x \geq \frac{1}{2}) \\ 1-2x (x < \frac{1}{2}) \end{cases}$ (2) 图见解析, 定义域 R , 值域 $[0, +\infty)$

【分析】

(1) 因为 $f(x) = |2x-1|$, 分别讨论 $x \geq \frac{1}{2}$ 和 $x < \frac{1}{2}$, 即可求得答案;

(2) 由 (1) 得: $f(x) = \begin{cases} 2x-1 (x \geq \frac{1}{2}) \\ 1-2x (x < \frac{1}{2}) \end{cases}$, 画出函数图像, 即可求得答案.

【详解】

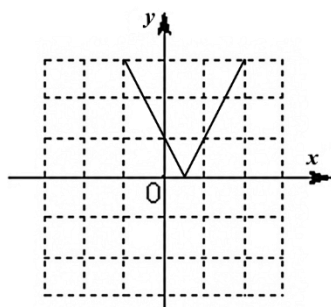
(1) $\because f(x) = |2x-1|$

当 $x \geq \frac{1}{2}$, $f(x) = 2x-1$;

当 $x < \frac{1}{2}$, $f(x) = 1-2x$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 2x-1 (x \geq \frac{1}{2}) \\ 1-2x (x < \frac{1}{2}) \end{cases}$$

(2) 由 (1) 得: $f(x) = \begin{cases} 2x-1 (x \geq \frac{1}{2}) \\ 1-2x (x < \frac{1}{2}) \end{cases}$ 画出函数的图像, 如图:



根据函数图像可知: $f(x)$ 定义域 R , 值域 $[0, +\infty)$.

10. 反解法

例 10 函数 $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ 的值域

解法一: (逆求法) $\because x^2 = \frac{1+y}{1-y} \geq 0 \quad \therefore -1 \leq y < 1$

$\therefore$ 原函数的值域为 $[-1, 1)$

解法二: (换元法) 设 $x^2+1=t$, 则

$\because t \geq 1 \quad \therefore 0 < \frac{2}{t} \leq 2 \quad \therefore -1 \leq y < 1 \quad \therefore$ 原函数值域即得

解法三: (判别式法) 原函数可化为 $(y-1)x^2 + 0 \cdot x + y+1 = 0$

- 1) $y=1$ 时 不成立
 2) $y \neq 1$ 时, $\Delta \geq 0 \Rightarrow 0 - 4(y-1)(y+1) \geq 0 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$
 $\therefore -1 \leq y < 1$

综合 1)、2) 值域 $\{y | -1 \leq y < 1\}$

11、判别式法

例 11 求函数 $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$ ($x > -1$) 的值域

解法一：(判别式法) 原式可化为 $x^2 + (2-y)x + 2-y = 0$

$$\therefore \Delta \geq 0 \therefore (2-y)^2 - 4(2-y) \geq 0 \Rightarrow y \geq 2 \text{ 或 } y \leq -2$$

$$\therefore x > -1 \therefore y \leq -2 \text{ 舍去}$$

$$\therefore \text{原函数值域为 } [2, +\infty)$$

解法二：(不等式法) 原函数可化为 $y = \frac{(x+1)^2 + 1}{x+1} = x+1 + \frac{1}{x+1} \geq 2$ ($\because x > -1$)

当且仅当 $x=0$ 时取等号, 故值域为 $[2, +\infty)$

12.复合函数法

7 求函数 $y = \frac{5}{2x^2 - 4x + 3}$ 的值域

解法一：(复合函数法) 令 $2x^2 - 4x + 3 = t$, 则 $y = \frac{5}{t}$

$$\therefore t = 2(x-1)^2 + 1 \geq 1$$

$$\therefore 0 < y \leq 5 \quad \text{所以, 值域 } \{y | 0 < y \leq 5\}$$

解法二：(判别式法) 化为 $2yx^2 - 4yx + (3y-5) = 0$

1) $y=0$ 时, 不成立

2) $y \neq 0$ 时, $\Delta \geq 0$ 得

$$(4y) - 8y(3y-5) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq y \leq 5$$

$$\therefore 0 < y \leq 5$$

综合 1)、2) 值域 $\{y | 0 < y \leq 5\}$

二、函数的三种表示法是：解析法；图象法；列表法。

函数图象既可以是连续的曲线，也可以是直线、折线、离散的点等等，注意判断一个图形是否是函数图象的依据：

解析法：必须注明函数的定义域；

图象法：描点法作图要注意：确定函数的定义域；化简函数的解析式；观察函数的特征；

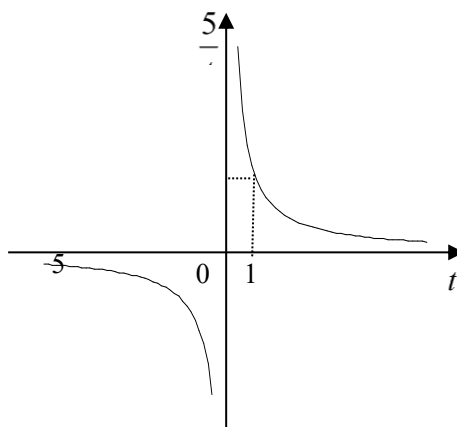
列表法：选取的自变量要有代表性，应能反映定义域的特征。

注意啊：**解析法**：便于算出函数值.**列表法**：便于查出函数值.**图象法**：便于量出函数值

一：分段函数

在定义域的不同部分上有不同的解析表达式的函数.在不同的范围里求函数值时必须把自变量代入相应的表达式.分段函数的解析式不能写成几个不同的方程，而就写函数值几种不同的表达式并用一个左大括号括起来，并分别注明各部分的自变量的取值情况。

(1) 分段函数是一个函数，不要把它误认为是几个函数；



(2) 分段函数的定义域是各段定义域的并集, 值域是各段值域的并集

例 1: 已知 $f(x) = \begin{cases} ax+4, & x \leq 1 \\ \log_2 x, & x \geq 2 \end{cases}$ 若函数 $f(x)$ 的值域为 $[1, +\infty)$, 则 a 的最小值为_____.

【答案】 -3

【详解】由题意, 函数 $f(x) = \begin{cases} ax+4, & x \leq 1 \\ \log_2 x, & x \geq 2 \end{cases}$, 可得 $f(2) = 1$,

要使得函数 $f(x)$ 的值域为 $[1, +\infty)$, 则满足 $\begin{cases} a \leq 0 \\ a+4 \geq 1 \end{cases}$, 解得 $-3 \leq a \leq 0$,

所以实数 a 的最小值为 -3.

故答案为: -3.

举一反三

1. 已知狄利克雷函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数} \\ 0, & x \text{ 是无理数} \end{cases}$, 则下列结论正确的是 ()

A. $f(x)$ 的值域为 $[0, 1]$

B. $f(x)$ 定义域为 R

C. $f(x+1) = f(x)$

D. $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{1}{2}, 0)$

【答案】 BC

【详解】对于 A, $f(x)$ 的值域为 $\{0, 1\}$, 故 A 错误; 对于 B, $f(x)$ 定义域为 R , 故 B 正确; 对于 C, 当 x 是有理数时, $x+1$ 也为有理数, 当 x 是无理数时, $x+1$ 也为无理数, 故 $f(x+1) = f(x)$ 成立, 故 C 正确;

对于 D, 因为 $f(\frac{1}{2}) = 1$, 所以 $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{1}{2}, 1)$, 故 D 错误.

故选: BC.

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 1, & x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & x > 0, \end{cases}$ 则不等式 $f(x) \geq -1$ 的解集是_____.

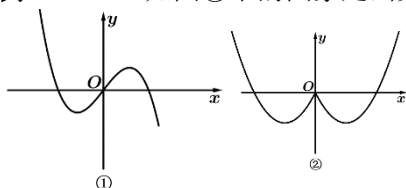
【答案】 $[-4, 2]$

【详解】由题意得 $\begin{cases} x \leq 0, \\ \frac{x}{2} + 1 \geq -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x > 0, \\ -(x-1)^2 \geq -1, \end{cases}$

解得 $-4 \leq x \leq 0$ 或 $0 < x \leq 2$, 即不等式的解集为 $[-4, 2]$. 故答案为: $[-4, 2]$.

题型二: 图像法

例 2: 1. 已知图①中的图象是函数 $y = f(x)$ 的图象, 则图②中的图象对应的函数可能是 ()



A. $y = f(|x|)$ B. $y = |f(x)|$ C. $y = f(-|x|)$ D. $y = -f(-|x|)$

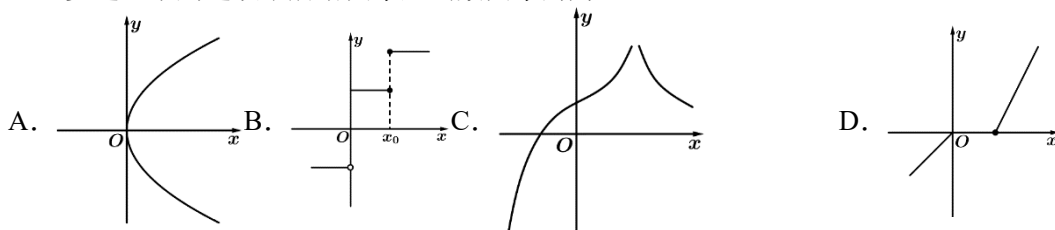
答案: C.

【详解】图②中的图象是在图①的基础上, 去掉函数 $y = f(x)$ 的图象在 y 轴右侧的部分, 然后将 y 轴左侧图象翻折到 y 轴右侧, y 轴左侧图象不变得来的,

∴图②中的图象对应的函数可能是 $y = f(-|x|)$. 故选: C.

举一反三

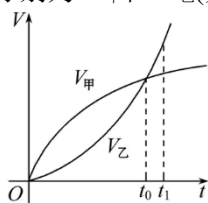
1. (多选) 下列选项中所给图象是函数图象的为 ()



答案: CD

解: 根据函数的定义, 在定义域内作一条直线 $x = a$, 将直线 $x = a$ 在定义域内左右移动, 如果直线与图象的交点始终只有一个, 则图象是函数图象, 据此可判断 C, D 选项所给图象是函数图象, 故选: CD.

2 (多选). 已知甲、乙两车由同一起点同时出发, 并沿同一路线(假定为直线)行驶. 甲车、乙车的速度曲线分别为 $V_{\text{甲}}$ 和 $V_{\text{乙}}$ (如图所示). 那么对于图中给定的 t_0 和 t_1 , 下列判断中一定正确的是 ()



- A. 在 t_1 时刻, 甲车的速度大于乙车的速度 B. t_0 时刻后, 甲车的速度小于乙车的速度
C. 在 t_0 时刻, 两车的位置相同 D. 在 t_0 时刻, 甲车在乙车前面

答案: BD

【详解】由图可知, 当时间为 t_1 时, 甲车的速度小于乙车的速度, 所以选项 B 正确, 选项 A 错误; t_0 时刻之前, 甲车的速度一直大于乙车, 时间相同的情况下, 甲车行驶路程大于乙车行驶路程, 故 t_0 时刻甲车在乙车前面. 所以选项 D 正确, 选项 C 错误. 故选: BD

题型三: 列表法

例 3: 1. 下表表示 y 是 x 的函数, 则函数的值域是 ()

x	$x < 2$	$2 \leq x \leq 3$	$x > 3$
y	1	0	1

- A. $\{y | 0 \leq y \leq 1\}$ B. $\mathbf{R}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{0, 1\}$

【答案】D

【详解】由题意, 该函数的值域是 $\{0, 1\}$. 故选: D.

举一反三

已知下列表格表示的是函数 $s = g(t)$, 写出 $g(-2)$, $g(0)$, $g(\sqrt{3})$.

t	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
s	-1	0	1

【答案】 $g(-2) = -1$, $g(0) = 0$, $g(\sqrt{3}) = 1$

【详解】∵ $-2 \in (-\infty, 0)$, $0 \in \{0\}$, $\sqrt{3} \in (0, +\infty)$ ∴ $g(-2) = -1$, $g(0) = 0$, $g(\sqrt{3}) = 1$

四: 求解析式

1. 凑配法

例 4: 已知 $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$;

【详解】(配凑法) $\because f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2, \therefore f(x)=x^2+2$.

2.换元法

例 5: 1. 已知数 $f(x+1)=(x-1)^2$, 则 $f(x)$ 的解析式为 ()

A. $f(x)=x^2$ B. $f(x)=(x-2)^2$ C. $f(x)=x^2-1$ D. $f(x)=(x+1)^2$

【答案】B

【详解】设 $x+1=t$, 则 $x=t-1$, 则 $f(t)=(t-1-1)^2=(t-2)^2$, 即 $f(x)=(x-2)^2$. 故选: B

3.待定系数法

例 6: 已知一次函数 $y=f(x)$ 满足 $3f(1+x)-2f(1-x)=4x+3$, 则 $f(x)=$ _____.

【答案】 $\frac{4}{5}x+\frac{11}{5}$

【详解】设 $f(x)=kx+b(k \neq 0)$, 则由 $3f(1+x)-2f(1-x)=4x+3$,

得 $3[k(x+1)+b]-2[k(1-x)+b]=4x+3$, 即 $(5k-4)x+k+b-3=0$, 故 $\begin{cases} 5k=4, \\ k+b=3, \end{cases}$ 解得

$k=\frac{4}{5}, b=\frac{11}{5}$, 所以 $f(x)=\frac{4}{5}x+\frac{11}{5}$. 故答案为: $\frac{4}{5}x+\frac{11}{5}$.

4. 方程组法

例 7: 已知 $2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=x(x \neq 0)$, 求 $f(x)$.

【详解】由 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x$, 将 x 换为 $\frac{1}{x}$, 得 $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{1}{x}$,

于是得关于 $f(x)$ 与 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的方程组 $\begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x, \\ f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$,

消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 得 $f(x)=\frac{2}{3x}-\frac{x}{3} (x \neq 0)$.

5.赋值法

例 8: 若函数 $f(x)$ 满足 $f(2x+1)=4x^2$, 则 $f(-3)=$ ()

A. 4

B. 12

C. 16

D. 36

【答案】C 解: 令 $x=-2$, 得 $f(-3)=f(2 \times (-2)+1)=4 \times (-2)^2=16$. 故选: C.

四. 函数的单调性

1. 定义:

(1) 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A , 区间 $M \subseteq A$, 如果取区间 M 中的任意两个值 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么就称函数 $y=f(x)$ 在区间 M 上是增函数, 如图(1)当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 那么就称函数 $y=f(x)$ 在区间 M 上是减函数, 如图(2)

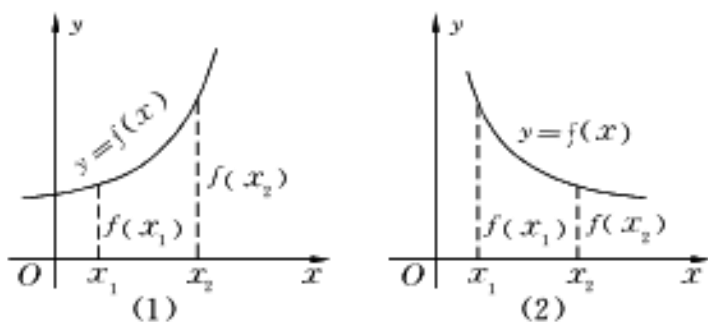


图 8 - 2

注意：函数单调性定义中的 x_1, x_2 有三个特征,一是任意性，二是有大小，三是同属于一个单调区间。

2、巩固概念：

1、定义的另一表示方法

如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量 x_1, x_2 ，若 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 即 $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ ，则函数

$y = f(x)$ 是增函数，若 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 即 $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ ，则函数 $y = f(x)$ 为减函数。

强调几点：

①单调性是对定义域内某个区间而言的，离开了定义域和相应区间就谈不上单调性。

②对于某个具体函数的单调区间，可以是整个定义域(如一次函数)，可以是定义域内某个区间(如二次函数)，也可以根本不单调(如常函数)。

③单调性是对定义域的某个区间上的整体性质，不能用特殊值说明问题。

④函数在定义域内的两个区间 A, B 上都是增（或减）函数，一般不能认为函数在 $A \cup B$ 上是增（或减）函数。

熟记以下结论，可迅速判断函数的单调性。

1. 函数 $y = -f(x)$ 与函数 $y = f(x)$ 的单调性相反。

2. 当 $f(x)$ 恒为正或恒为负时，函数 $y = \frac{1}{f(x)}$ 与 $y = f(x)$ 的单调性相反。

3. 在公共区间内，增函数+增函数=增函数，增函数-减函数=增函数等

3. 判断函数单调性的方法

(1) 定义法。

(2) 直接法。运用已知的结论，直接得到函数的单调性，如一次函数，二次函数的单调性均可直接说出。

(3) 图象法。

4.函数的单调性 (1) 设 $x_1, x_2 \in [a, b], x_1 \neq x_2$ 那么

$$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上是增函数；}$$

$$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上是减函数。}$$

5.单调性性质：

①增函数+增函数=增函数； ②减函数+减函数=减函数；

③增函数-减函数=增函数； ④减函数-增函数=减函数；

注：上述结果中的函数的定义域一般情况下是要变的，是等号左边两个函数定义域的交集。

6. 复合函数单调性的判断方法：

(1)如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是减函数（增函数），则在公共定义域内，

和函数 $f(x) + g(x)$ 也是减函数（增函数）；

(2)对于复合函数 $y = f[g(x)]$ 的单调性，必须考虑 $y = f(u)$ 与 $u = g(x)$ 的单调性，从而得到 $y = f[g(x)]$ 的单调性。

$y = f(u)$	$u = g(x)$	$y = f[g(x)]$
增函数	增函数	增函数
增函数	减函数	减函数
减函数	增函数	减函数
减函数	减函数	增函数

小结：同增异减

研究函数的单调性，定义域优先考虑，且复合函数的单调区间是它的定义域的某个子集。

题型一：定义法证明或判断函数的单调性

例 1：（2020·山东·高考真题）已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$ ，若对于任意两个不相等的实数 x_1, x_2 ，总有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ 成立，则函数 $f(x)$ 一定是（ ）

A. 奇函数 B. 偶函数 C. 增函数 D. 减函数

【答案】C

【详解】对于任意两个不相等的实数 x_1, x_2 ，总有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ 成立，

等价于对于任意两个不相等的实数 $x_1 < x_2$ ，总有 $f(x_1) < f(x_2)$ 。

所以函数 $f(x)$ 一定是增函数。故选：C

题型二：求函数的单调区间

例 2：设函数 $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$ ，则 $f(x)$ （ ）

A. 是奇函数，且在 $(0, +\infty)$ 单调递增 B. 是奇函数，且在 $(0, +\infty)$ 单调递减

C. 是偶函数，且在 $(0, +\infty)$ 单调递增 D. 是偶函数，且在 $(0, +\infty)$ 单调递减

【答案】A

【详解】因为函数 $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$ 定义域为 $\{x | x \neq 0\}$ ，其关于原点对称，而 $f(-x) = -f(x)$ ，

所以函数 $f(x)$ 为奇函数。

又因为函数 $y = x^3$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增，

而 $y = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，

所以函数 $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增。

故选：A。

题型三：根据函数的单调性求参数

例 3：（2021·江西·模拟预测）若函数 $f(x) = \frac{x+m-1}{x-m}$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减，则实数 m 的取值范围是（ ）

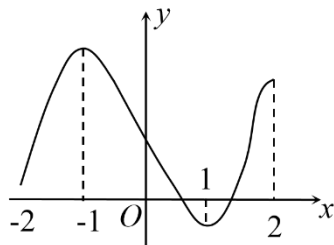
A. $\left[-2, \frac{1}{2}\right)$ B. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(\frac{1}{2}, 2\right]$ D. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

【详解】 $f(x) = \frac{x+m-1}{x-m} = \frac{x-m+2m-1}{x-m} = 1 + \frac{2m-1}{x-m}$,

$f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减, 则 $\begin{cases} m \leq 2 \\ 2m-1 > 0 \end{cases}$, 所以 $\frac{1}{2} < m \leq 2$. 故选: C.

题型四: 根据图像判断函数的单调性

例 2: (2021·贵州·高二学业考试) 定义在区间 $[-2, 2]$ 上的函数 $f(x)$ 的图象如图所示, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为 ()



- A. $[-2, -1]$ B. $[-1, 1]$ C. $[-2, 0]$ D. $[-1, 2]$

【答案】B

【详解】由题图知: 在 $[-1, 1]$ 上 $f(x)$ 的单调递减, 在 $(-2, -1), (1, 2)$ 上 $f(x)$ 的单调递增, 所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[-1, 1]$.

故选: B

题型五: 复合函数的单调性

例 5: (2021·上海浦东新·三模) 函数 $y = \sqrt{x^2 - 1}$ 的单调递减区间为_____.

【答案】 $(-\infty, -1]$ (或 $(-\infty, -1)$ 都对)

【解析】

利用复合函数的单调性, 同增异减, 即可得到答案;

【详解】

令 $t = x^2 - 1$, 则 $y = \sqrt{t}$,

$\because t = x^2 - 1$ 在 $(-\infty, -1)$ 单调递减, $y = \sqrt{t}$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

根据复合函数的单调性可得: $y = \sqrt{x^2 - 1}$ 在 $(-\infty, -1)$ 单调递减,

故答案为: $(-\infty, -1)$

题型六: 根据函数的单调性解不等式

例 6: (2022·河北邢台·高考模拟) 函数 $y = f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为增函数, 且 $f(2m) > f(m+9)$, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(9, +\infty)$ B. $[9, +\infty)$ C. $(-\infty, -9)$ D. $(-\infty, -9]$

【答案】A

解: $\because y = f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为增函数, 且 $f(2m) > f(m+9)$, $\therefore 2m > m+9$, 解得 $m > 9$,

故选: A.

题型七: 根据函数的单调性比较大小

例 7: (2021·全国·模拟预测 (文)) 已知偶函数 $y = f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是减函数, 则下列不等式一定成立的是 ()

- A. $f(2) > f(-3)$ B. $f(-2) < f(1)$
C. $f(-1) > f(2)$ D. $f(-1) < f(2)$

【答案】D

【详解】因为偶函数 $y = f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是减函数,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数,

对于 A, $f(-3) = f(3)$, $0 < 2 < 3$, 所以 $f(2) < f(3) = f(-3)$, 故 A 错误;

对于 B, $f(-2) = f(2)$, $2 > 1 > 0$, 所以 $f(-2) = f(2) > f(1)$, 故 B 错误;

对于 C、D, $f(-1) = f(1)$, $0 < 1 < 2$, 所以 $f(-1) = f(1) < f(2)$, 故 C 错误, D 正确.

故选: D.

题型 8: 根据解析式判断函数的单调性

例 8: (2021·福建省德化第一中学高一阶段练习) 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的单调递减区间是 ()

A. $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ D. $(-\infty, 0)$

【答案】A

解: 因为 $f(x) = \frac{1}{x}$ 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 函数在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

故函数的单调递减区间为 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$; 故选: A

题型九: 单调性综合应用

例 9: 1. (2021·全国·高考真题(文)) 下列函数中是增函数的为 ()

A. $f(x) = -x$ B. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ C. $f(x) = x^2$ D. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

【答案】D

【详解】对于 A, $f(x) = -x$ 为 $\mathbb{R}$ 上的减函数, 不合题意, 舍.

对于 B, $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ 为 $\mathbb{R}$ 上的减函数, 不合题意, 舍.

对于 C, $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 为减函数, 不合题意, 舍.

对于 D, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的增函数, 符合题意, 故选: D.

五. 奇函数、偶函数的定义

(1) 奇函数: 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 如果对 D 内的任意一个 x , 都有 $f(-x) = -f(x)$, 则这个函数叫奇函数.

(2) 偶函数: 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 如果对 D 内的任意一个 x , 都有 $f(-x) = f(x)$, 则这个函数叫做偶函数.

(3) 奇偶性: 如果函数 $f(x)$ 是奇函数或偶函数, 那么我们就说函数 $f(x)$ 具有奇偶性.

(4) 非奇非偶函数: 无奇偶性的函数是非奇非偶函数.

注意: (1) 奇函数若在 $x=0$ 时有定义, 则 $f(0)=0$.

(2) 若 $f(x)=0$ 且 $f(x)$ 的定义域关于原点对称, 则 $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数.

2. 奇(偶)函数的基本性质

(1) 对称性: 奇函数的图象关于原点对称, 偶函数的图象关于 y 轴对称.

(2) 单调性: 奇函数在其对称区间上的单调性相同, 偶函数在其对称区间上的单调性相反.

3. 判断函数奇偶性的方法

(1) 图像法

(2) 定义法

① 首先确定函数的定义域, 并判断其定义域是否关于原点对称;

② 确定 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系;

③ 作出相应结论:

若 $f(-x) = f(x)$ 或 $f(-x) - f(x) = 0$, 则 $f(x)$ 是偶函数;

若 $f(-x) = -f(x)$ 或 $f(-x) + f(x) = 0$, 则 $f(x)$ 是奇函数.

题型一 判断函数的奇偶性

例 1: 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = x^4 - 2x^2$;

(2) $f(x) = x^5 - x$;

(3) $f(x) = \frac{3x}{1-x^2}$;

(4) $f(x) = |x| + x$.

【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，它关于原点对称.

$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$ ，故 $f(x)$ 为偶函数.

(2) $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，它关于原点对称.

$f(-x) = (-x)^5 - (-x) = -x^5 + x = -f(x)$ ，故 $f(x)$ 为奇函数.

(3) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ ，它关于原点对称.

$f(-x) = \frac{-3x}{1-(-x)^2} = -f(x)$ ，故 $f(x)$ 为奇函数.

(4) $f(1) = |1| + 1 = 2$, $f(-1) = 0$,

故 $f(1) \neq f(-1)$, $f(-1) \neq -f(1)$ ，故 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

题型二 利用函数的奇偶性求函数值

例 2: 1. 已知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是偶函数，且满足 $f(x+4) = f(x)$ ，当 $x \in (0, 2)$ 时， $f(x) = 2x^2$ ，则 $f(7) =$ ()

- A. 2 B. -2 C. -98 D. 98

【答案】A

解: $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是偶函数，且满足 $f(x+4) = f(x)$ ，当 $x \in (0, 2)$ 时， $f(x) = 2x^2$ ，则 $f(7) = f(-1) = f(1) = 2$ 。故选: A.

举一反三

已知函数 $f(x)$ 是奇函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = 2^x - 1$ ，则 $f(-2) =$ ()

- A. 1 B. $-\frac{3}{4}$ C. 3 D. -3

【答案】D

【详解】当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = 2^x - 1$ ，则 $f(2) = 2^2 - 1 = 3$ ，

因为函数 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(-2) = -f(2) = -3$ 。故选: D.

题型三 利用函数的奇偶性求函数解析式

例 3: 若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(x+1)$ 是偶函数，当 $0 < x \leq 1$ 时， $f(x) = e^{x-1}$ ，则当 $2 < x \leq 3$ 时， $f(x)$ 的解析式为 ()

- A. $f(x) = -e^{1-x}$ B. $f(x) = -e^{x+1}$
C. $f(x) = -e^{x-3}$ D. $f(x) = -e^{3-x}$

【答案】C

【详解】因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(x+1)$ 是偶函数，

所以 $f(1+x) = f(1-x) = -f(x-1)$ ，即 $f(x) = -f(x-2)$ ，

当 $2 < x \leq 3$ 时， $0 < x-2 \leq 1$ ，所以 $f(x) = -f(x-2) = -e^{x-3}$ 。故选: C

举一反三

1. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 和奇函数 $g(x)$ 满足 $f(x) + g(x) = e^x$ ，求 $g(x)$ 。

解: 因为 $f(x)$ 为偶函数， $g(x)$ 为奇函数

所以 $f(-x) = f(x)$ ， $g(-x) = -g(x)$

因为 $f(x) + g(x) = e^x$ ①

所以 $f(-x) + g(-x) = e^{-x}$

所以 $f(x) - g(x) = e^{-x}$ ②

由①②式消去 $f(x)$ ，得 $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 。

类型四：根据奇偶性求参数

例 4：若函数 $f(x) = x^3(a \cdot 2^x - 2^{-x})$ 是偶函数，则 $a =$ ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. ± 1

【答案】C

【详解】由已知， $f(x) = x^3(a \cdot 2^x - 2^{-x})$ ，所以 $f(-x) = (-x)^3(a \cdot 2^{-x} - 2^x)$ ，
函数 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x) = f(-x)$ ，所以 $x^3(a \cdot 2^x - 2^{-x}) = (-x)^3(a \cdot 2^{-x} - 2^x)$ ，整理得：
 $(a-1)(2^x - 2^{-x})x^3 = 0$ ，所以 $a=1$. 故选：C.

举一反三

1. 已知 $f(x) = k \cdot 2^x + 2^{-x}$ 为奇函数，则 $k =$ _____.

【答案】-1

【详解】由题意 $f(x) = k \cdot 2^x + 2^{-x}$ 是奇函数，则 $f(-x) = -f(x)$ ，即 $k \cdot 2^{-x} + 2^x = -k \cdot 2^x - 2^{-x}$ ，
故 $(k+1) \cdot (2^{-x} + 2^x) = 0$ ，由于 $2^{-x} + 2^x \neq 0$ ，故 $k = -1$ ，故答案为：-1

类型五：利用奇偶性求范围问题

例 4：定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减，且 $f(-3) = 0$ ，若不等式 $f(x-m) > 0$ 的解集为 $(-1, 5)$ ，则 m 的值为 ()

- A. 3 B. 2 C. -2 D. -3

【答案】B

【详解】因为 $f(x)$ 为偶函数， $f(3) = f(-3) = 0$ ， $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递减，若 $f(x) > 0$ ，则
 $f(|x|) > f(3)$ ，不等式 $f(x-m) > 0$ 可转化为 $f(|x-m|) > f(3)$ ，所以 $|x-m| < 3$ ，解得： $m-3 < x < m+3$ ，
所以 $m-3 = -1$ 且 $m+3 = 5$ ，即 $m = 2$. 故选：B.

六、函数的周期性

1. 周期函数的定义：对于 $f(x)$ 定义域内的每一个 x ，都存在非零常数 T ，使得 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 具有周期性， T 叫做 $f(x)$ 的一个周期，则 kT ($k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$) 也是 $f(x)$ 的周期，所有周期中的最小正数叫 $f(x)$ 的最小正周期.

2. 几种特殊的抽象函数：具有周期性的抽象函数：

函数 $y = f(x)$ 满足对定义域内任一实数 x (其中 a 为常数)，

- (1) $f(x) = f(x+a)$ ，则 $f(x)$ 是以 $T = a$ 为周期的周期函数；
- (2) $f(x+a) = -f(x)$ ，则 $f(x)$ 是以 $T = 2a$ 为周期的周期函数；
- (3) $f(x+a) = \pm \frac{1}{f(x)}$ ，则 $f(x)$ 是以 $T = 2a$ 为周期的周期函数；
- (4) $f(x+a) = f(x-a)$ ，则 $f(x)$ 是以 $T = 2a$ 为周期的周期函数；
- (5) $f(x+a) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}$ ，则 $f(x)$ 是以 $T = 2a$ 为周期的周期函数.
- (6) $f(x+a) = -\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$ ，则 $f(x)$ 是以 $T = 4a$ 为周期的周期函数.
- (7) $f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ ，则 $f(x)$ 是以 $T = 4a$ 为周期的周期函数.

类型一：判断周期函数

例 7：定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = f(x) - 1$ ，则下列函数中是周期函数的是 ()

- A. $y = 4f(x) - x$ B. $y = 2f(x) + x$ C. $y = f(x) - x$ D. $y = f(x) + 2x$

【答案】B

【详解】依题意，定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = f(x) - 1$ ，
所以 $2f(x+2) + (x+2) = 2f(x) - 2 + (x+2) = 2f(x) + x$ ，

所以 $y = 2f(x) + x$ 是周期为 2 的周期函数. 故选: B.

类型二: 周期性求值求值

例 8: 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期为 2 的奇函数, 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) = 16x$, 则 $f(-\frac{5}{2}) + f(1) =$ ()

A. -8 B. -4 C. 12 D. 20

【答案】B

【详解】根据题意可得: $f(-\frac{5}{2}) = -f(\frac{5}{2}) = -f(\frac{1}{2}) = -16^{\frac{1}{2}} = -4$

$f(1) = -f(-1) = -f(1)$, 可得 $f(1) = 0$ $f(-\frac{5}{2}) + f(1) = -4$ 故选: B.

类型三: 周期性求函数解析式

例 9: 设定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 $y = f(x)$, 满足对任意的 $t \in \mathbb{R}$ 都有 $f(t) = f(1-t)$, 且当 $x \in [0, \frac{1}{2}]$ 时, $f(x) = -x^2$,

则 $f(3) + f(-\frac{3}{2})$ 的值等于 ()

A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{4}$ D. $-\frac{1}{5}$

【答案】C

【详解】由于函数 $y = f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 满足对任意的 $t \in \mathbb{R}$ 都有 $f(t) = f(1-t)$, 则 $f(3) = f(1-3) = f(-2) = -f(2) = -f(1-2) = -f(-1) = f(1) = f(0) = 0$,

$f(-\frac{3}{2}) = -f(\frac{3}{2}) = -f(1-\frac{3}{2}) = -f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = -(\frac{1}{2})^2 = -\frac{1}{4}$,

因此, $f(3) + f(-\frac{3}{2}) = -\frac{1}{4}$. 故选: C.

类型三: 周期+奇偶性

例 6: 已知函数 $y = f(x-2)$ 为奇函数, $y = f(x+1)$ 为偶函数, 且 $f(0) - f(6) = 4$, 则 $f(2022) =$

【答案】-2

【详解】因为函数 $y = f(x-2)$ 为奇函数, $y = f(x+1)$ 为偶函数,

所以 $f(-x-2) = -f(x-2)$, $f(1-x) = f(1+x)$,

即 $f(-x-4) = -f(x)$, $f(2-x) = f(x)$,

故 $f(-x-4) = -f(2-x)$, 即 $f(x-6) = -f(x)$,

故 $f(x+6) = -f(x)$, 即 $f(x+12) = f(x)$,

令 $x=0$, 则由 $f(x+6) = -f(x)$ 可得 $f(6) = -f(0)$,

结合 $f(0) - f(6) = 4$ 得, $f(6) = -2$,

所以 $f(2022) = f(168 \times 12 + 6) = f(6) = -2$,

故答案为: -2

七. 函数对称性 (异号对称)

(1) 轴对称: 若函数 $f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称, 则

① $f(a+x) = f(a-x)$;

② $f(x) = f(2a-x)$;

③ $f(-x) = f(2a+x)$

(2) 点对称: 若函数 $f(x)$ 关于点 $(a, 0)$ 对称, 则

① $f(a+x) = -f(a-x)$

② $f(x) = -f(2a-x)$

$$\textcircled{3} f(-x) = -f(2a+x)$$

(3) 点对称: 若函数 $f(x)$ 关于点 (a, b) 对称, 则

$$\textcircled{1} f(a+x) = -f(a-x) + 2b$$

$$\textcircled{2} f(x) = -f(2a-x) + 2b$$

$$\textcircled{3} f(-x) = -f(2a+x) + 2b$$

题型一: 对称性的判定

例 11: 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(4-x) + f(x) = 2$. 若 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=4$ 对称, 则下列选项中一定成立的是 ()

- A. $f(-2)=1$ B. $f(0)=0$ C. $f(4)=2$ D. $f(6)=-1$

【答案】A

解: 因为函数 $f(x)$ 满足 $f(4-x) + f(x) = 2$,

所以 $f(4-2) + f(2) = 2f(2) = 2$, 所以 $f(2)=1$,

又 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=4$ 对称,

所以 $f(6) = f(2) = 1$, 且 $f(4-x) = f(4+x)$,

则 $f(4+x) + f(x) = 2$,

所以 $f(4-2) + f(-2) = 2$,

所以 $f(-2) = -1$,

无法求出 $f(0), f(4)$.

故选: A.

题型二: 由函数对称性求函数值

例 12: 函数 $y = f(x)$ 为偶函数, 且图象关于直线 $x = \frac{3}{2}$ 对称, $f(5) = 4$, 则 $f(-1) = ()$

- A. 3 B. 4 C. -3 D. -4

【答案】B

【详解】因为函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{3}{2}$ 对称, 所以 $f(-2) = f(5) = 4$,

又因为函数 $y = f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(2) = f(-2) = 4$, $f(-1) = f(1)$,

而函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{3}{2}$ 对称, 所以 $f(-1) = f(1) = f(2) = 4$.

故选: B

题型三: 由周期性与对称性求函数解析式

例 13: 函数 $f(x)$ 的图象与曲线 $y = \log_2 x$ 关于 x 轴对称, 则 $f(x) = ()$

- A. 2^x B. -2^x
C. $\log_2(-x)$ D. $\log_2 \frac{1}{x}$

【答案】D

【详解】任取函数 $f(x)$ 上的一点 (x, y) ,

由函数 $f(x)$ 的图象与曲线 $y = \log_2 x$ 关于 x 轴对称,

则点 (x, y) 关于 x 轴对称的点坐标为 $(x, -y)$, 又点 $(x, -y)$ 在曲线 $y = \log_2 x$ 上,

可得 $-y = \log_2 x \Rightarrow y = -\log_2 x = \log_2 \frac{1}{x}$, 则 $f(x) = \log_2 \frac{1}{x}$.

故选: D.

题型四: 由周期性与对称性比较大小

例 14: 已知函数 $f(x)$ 是奇函数, 且 $f(x+2) = -f(x)$, 若 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上是增函数, $f(1), f(\frac{3}{2}), f(\frac{13}{3})$ 的大小关系是 ()

A. $f(1) < f(\frac{3}{2}) < f(\frac{13}{3})$

B. $f(\frac{3}{2}) < f(1) < f(\frac{13}{3})$

C. $f(\frac{13}{3}) < f(1) < f(\frac{3}{2})$

D. $f(\frac{13}{3}) < f(\frac{3}{2}) < f(1)$

【答案】D

【详解】 $\because f(x+2) = -f(x)$ ，函数 $f(x)$ 是奇函数， $\therefore f(x+2) = -f(x) = f(-x)$ ，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，且 $f(x+4) = f(x)$ ， $\therefore$ 函数是周期为 4 的周期数列.

$\because f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上是增函数， $\therefore f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是增函数， $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是减函数，

$$f\left(\frac{13}{3}\right) = f\left(4 + \frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{5}{3}\right), \because f(x) \text{ 在 } [1, 2] \text{ 上是减函数, 且 } 1 < \frac{3}{2} < \frac{5}{3}, \therefore f(1) > f\left(\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{3}\right),$$

即 $f(1) > f\left(\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{13}{3}\right)$ ，故选 D.

题型五 函数性质的综合应用

例 15: (2022·重庆·西南大学附中模拟预测) 函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + f(-x) = 2$ ， $f(1+x) - f(1-x) = 0$ ，当 $x \in [0, 1]$ 时， $f(x) = x+1$ ，则关于 x 的方程 $f(x) = \frac{1}{2022^x}$ 在 $x \in [0, 2022]$ 上的解的个数是 ()

A. 1010

B. 1011

C. 1012

D. 1013

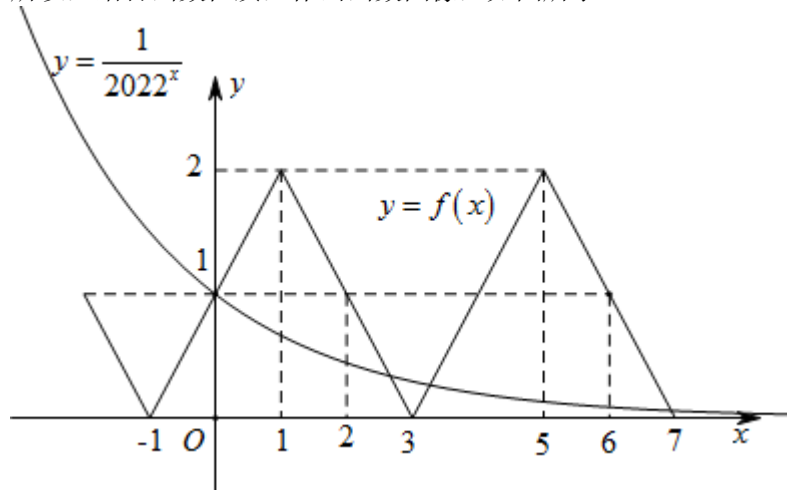
【答案】B

【解析】因为函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + f(-x) = 2$ ，所以函数 $f(x)$ 关于点 $(0, 1)$ 对称，

因为 $f(1+x) - f(1-x) = 0$ ，即 $f(1+x) = f(1-x)$ ，所以函数 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，

因为当 $x \in [0, 1]$ 时， $f(x) = x+1$ ，

所以，结合函数性质，作出函数图像，如图所示：



由图可知，函数 $f(x)$ 为周期函数，周期为 $T=4$ ，

由于函数 $x \in [2, 6]$ 一个周期内， $y = f(x)$ 与 $y = \frac{1}{2022^x}$ 有 2 个交点，

在 $x \in [0, 2]$ 上， $y = f(x)$ 与 $y = \frac{1}{2022^x}$ 有 1 个交点，

所以根据函数周期性可知，当 $x \in [0, 2022]$ 时， $y = f(x)$ 与 $y = \frac{1}{2022^x}$ 有 $2 \times \frac{2020}{4} + 1 = 1011$ 个交点.

所以关于 x 的方程 $f(x) = \frac{1}{2022^x}$ 在 $x \in [0, 2022]$ 上的解的个数是 1011 个.

故选：B

奇偶性周期性及对称性综合应用

1. (2022·全国·高考真题) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且 $f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$ ， $f(1)=1$ ，则

$$\sum_{k=1}^{22} f(k) = (\quad)$$

A. -3

B. -2

C. 0

D. 1

【答案】A

【详解】因为 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$ ，令 $x=1, y=0$ 可得， $2f(1)=f(1)f(0)$ ，所以 $f(0)=2$ ，令 $x=0$ 可得， $f(y)+f(-y)=2f(y)$ ，即 $f(y)=f(-y)$ ，所以函数 $f(x)$ 为偶函数，令 $y=1$ 得，

$f(x+1)+f(x-1)=f(x)f(1)=f(x)$ ，即有 $f(x+2)+f(x)=f(x+1)$ ，从而可知 $f(x+2)=-f(x-1)$ ， $f(x-1)=-f(x-4)$ ，故 $f(x+2)=f(x-4)$ ，即 $f(x)=f(x+6)$ ，所以函数 $f(x)$ 的一个周期为 6.

因为 $f(2)=f(1)-f(0)=1-2=-1$ ， $f(3)=f(2)-f(1)=-1-1=-2$ ， $f(4)=f(-2)=f(2)=-1$ ， $f(5)=f(-1)=f(1)=1$ ， $f(6)=f(0)=2$ ，所以

一个周期内的 $f(1)+f(2)+\cdots+f(6)=0$. 由于 22 除以 6 余 4，

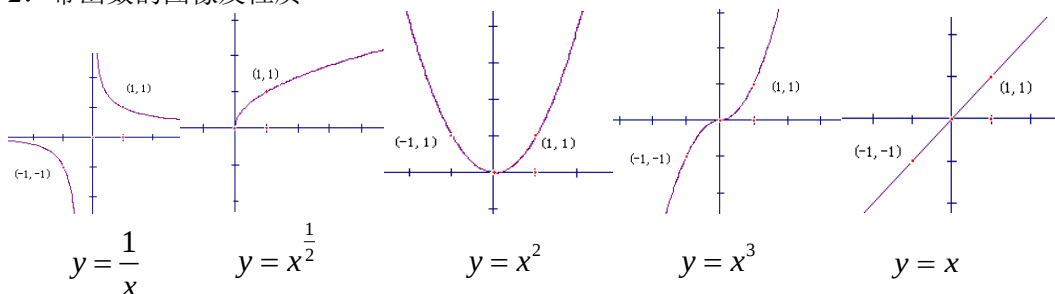
所以 $\sum_{k=1}^{22} f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=1-1-2-1=-3$.

故选：A.

八. 幂函数

1. 概念：形如 $y=x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$ 的函数称为幂函数，其中 x 是自变量， α 是常数.

2. 幂函数的图像及性质



	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x$	$y=x^{-1}$
定义域	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$[0, +\infty)$	$\{x x \in \mathbb{R} \text{ 且 } x \neq 0\}$
值域	$\mathbb{R}$	$[0, +\infty)$	$\mathbb{R}$	$[0, +\infty)$	$\{y y \in \mathbb{R} \text{ 且 } y \neq 0\}$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	非奇非偶函数	奇函数
单调性	增	$x \in [0, +\infty)$ 时, 增; $x \in (-\infty, 0]$ 时, 减	增	增	$x \in (0, +\infty)$ 时, 减; $x \in (-\infty, 0)$ 时, 减

3. 幂值的大小比较

(1) 直接法:当幂指数相同时,可直接利用幂函数的单调性来比较.

(2) 转化法:当幂指数不同时,可以先转化为相同幂指数,再运用单调性比较大小.

(3) 中间值法:当底数不同且幂指数也不同而不能运用单调性比较大小,可选取适当的中间值与两数分别比较,从而达到比较大小的目的.

4. 幂函数性质的应用

利用幂函数的性质解不等式,实际上就是利用幂函数的单调性,将不等式的大小关系转化为自变量的大小关

系,解不等式(组)求参数范围时,注意分类讨论思想的应用.

题型一: 幂函数的定义

例 1: (2021·江西·模拟预测) 已知幂函数 $f(x)=mx^\alpha$ 的图象过点 $(2,8)$, 则 $m+\alpha=$ ()

- A. 0 B. 2 C. 4 D. 5

【答案】C

解: 因为 $f(x)=mx^\alpha$ 为幂函数所以 $m=1$

又 $f(x)=mx^\alpha$ 的图象过点 $(2,8)$ 即 $8=2^\alpha$ 解得 $\alpha=3$ 所以 $m+\alpha=4$ 故选: C.

题型二: 幂函数的定义域

例 2: (2022·上海·高考真题) 下列幂函数中, 定义域为 $\mathbf{R}$ 的是 ()

- A. $y=x^{-1}$ B. $y=x^{-\frac{1}{2}}$ C. $y=x^{\frac{1}{3}}$ D. $y=x^{\frac{1}{2}}$

【答案】C

【详解】对选项 A, 则有: $x \neq 0$ 对选项 B, 则有: $x > 0$

对选项 C, 定义域为: $\mathbf{R}$ 对选项 D, 则有: $x \geq 0$ 故答案选: C

题型三: 幂函数的值域

例 3: (2020·江苏·高考真题) 已知 $y=f(x)$ 是奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$, 则 $f(-8)$ 的值是_____.

【答案】-4

【详解】 $f(8)=8^{\frac{2}{3}}=4$, 因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(-8)=-f(8)=-4$

故答案为: -4

题型四: 幂函数的单调性

例 4: (2011·上海·高考真题(文)) 下列函数中, 既是偶函数, 又是在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减的函数为 ()

- A. $y=x^{-2}$ B. $y=x^{-1}$ C. $y=x^2$ D. $y=x^{\frac{1}{3}}$

【答案】A

【详解】由偶函数定义知, 仅 A,C 为偶函数, C. $y=x^2$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增函数, 故选 A.

题型五: 幂函数的奇偶性

例 5: (2022·吉林·吉林·模拟预测(文)) 设 $\alpha \in \left\{\frac{1}{2}, 1, 2\right\}$, 使函数 $y=x^\alpha$ 的定义域是 $\mathbf{R}$, 且为偶函数的所有 α 的值是 ()

- A. 2 B. 1, 2
C. $\frac{1}{2}, 2$ D. $\frac{1}{2}, 1, 2$

【答案】A

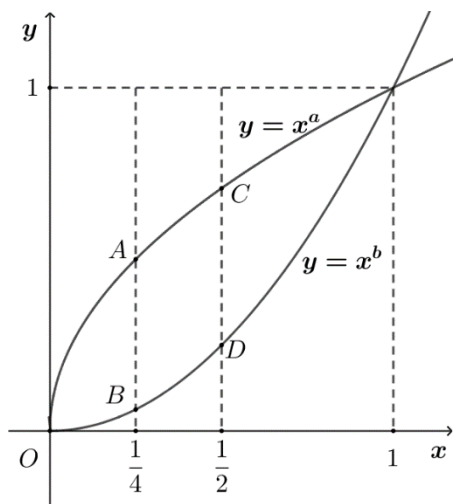
【详解】当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时, $y=x^\alpha=\sqrt{x}$, 定义域为 $[0, +\infty)$, 故 $\alpha \neq \frac{1}{2}$;

当 $\alpha=1$ 时, $y=x^\alpha=x$, 定义域为 $\mathbf{R}$, 但是为奇函数, 故 $\alpha \neq 1$;

当 $\alpha=2$ 时, $y=x^\alpha=x^2$, 定义域为 $\mathbf{R}$, 为偶函数, 故 $\alpha=2$. 故选: A

题型六: 幂函数的图像判断与应用

例 6: (2021·河北·石家庄·模拟预测) 已知幂函数 $y=x^a$ 与 $y=x^b$ 的部分图象如图所示, 直线 $x=\frac{1}{4}$, $x=\frac{1}{2}$ 与 $y=x^a$, $y=x^b$ 的图象分别交于 A、B、C、D 四点, 且 $|AB|=|CD|$, 则 $\frac{1}{2^a}+\frac{1}{2^b}=$ ()



- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2

【答案】B

【详解】由 $|AB| = |CD|$ 得 $\left(\frac{1}{4}\right)^a - \left(\frac{1}{4}\right)^b = \left(\frac{1}{2}\right)^a - \left(\frac{1}{2}\right)^b$, 即 $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^a - \left(\frac{1}{2}\right)^b\right] \left[\left(\frac{1}{2}\right)^a + \left(\frac{1}{2}\right)^b\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^a - \left(\frac{1}{2}\right)^b \neq 0$, 所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^a + \left(\frac{1}{2}\right)^b = 1$, 故选: B.

题型七: 幂函数过定点问题

例 7: (2021·浙江·浙江·高一期末) 以下结论正确的是 ()

- A. 当 $\alpha = 0$ 时, 函数 $y = x^\alpha$ 的图象是一条直线
B. 幂函数的图象都经过 $(0, 0)$ 、 $(1, 1)$ 两点
C. 若幂函数 $y = x^\alpha$ 的图象关于原点对称, 则 $y = x^\alpha$ 在定义域内 y 随 x 的增大而增大
D. 幂函数的图象不可能在第四象限, 但可能在第二象限

【答案】D

【解析】对于 A 选项, 当 $\alpha = 0$ 时, 函数 $y = x^0 = 1$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 所以, 函数 $y = x^0$ 的图象是两条射线, A 选项错误; 对于 B 选项, 幂函数 $y = x^{-1}$ 不经过原点, B 选项错误; 对于 C 选项, 幂函数 $y = x^{-1}$ 的图象关于原点对称, 但函数 $y = x^{-1}$ 在定义域内不单调, C 选项错误; 对于 D 选项, 由于幂函数在第一象限必有图象, 若幂函数在第四象限有图象, 与函数的定义矛盾, 所以, 幂函数的图象不可能在第四象限, 若幂函数为偶函数, 则幂函数在第二象限有图象, D 选项正确. 故选: D.

题型八: 幂函数中的参数问题

例 8: (2021·福建·漳州三中·高一·期中) 已知函数 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^{m^2 - 2m - 2}$ 是幂函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上递增, 则实数 $m =$ ()

- A. 2 B. -1 C. 4 D. 2 或 -1

【答案】B

【解析】因函数 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^{m^2 - 2m - 2}$ 是幂函数, 则 $m^2 - m - 1 = 1$, 即 $m^2 - m - 2 = 0$, 解得 $m = -1$ 或 $m = 2$,

当 $m = -1$ 时, 函数 $f(x) = x$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增, 则 $m = -1$, 当 $m = 2$ 时, 函数 $f(x) = x^{-2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上递减, 不符合要求, 实数 $m = -1$. 故选: B.

第四章 指数函数与对数函数

4.1 指数

一、指数与指数幂的运算

1.根式：一般地，如果 $x^n = a$ ，那么 x 叫做 a 的 n 次方根，其中 $n > 1$ ，且 $n \in N^*$ 。

①当 n 是偶数时，正数的 n 次方根有两个（互为相反数）

②当 n 是奇数时，正数的 n 次方根是一个正数；负数的偶次方根是一个负数

(1) 根式：式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式

(2) 根指数：式子 $\sqrt[n]{a}$ 中的 n 叫做根指数

(3) 被开方数：式子 $\sqrt[n]{a}$ 中的 a 叫做被开方数

2.负数没有偶次方根

3.零的任何次方根都是零（记作： $\sqrt[n]{0} = \underline{0}$ ）

5.根式结论：

当 n 是奇数时， $\sqrt[n]{a^n} = \underline{a}$

当 n 是偶数时， $\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a, a \geq 0; \\ -a, a < 0. \end{cases}$

6.正数的分数指数幂的意义

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0, m, n \in N^*, n > 1)$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad (a > 0, m, n \in N^*, n > 1)$$

7.0 的正分数指数幂等于 0，0 的负分数指数幂没有意义

8.有理指数幂的运算性质

$$(1) \quad a^r \cdot a^s = \underline{a^{r+s}} \quad (a > 0, r, s \in Q)$$

$$(2) \quad (a^r)^s = \underline{a^{rs}} \quad (a > 0, r, s \in Q)$$

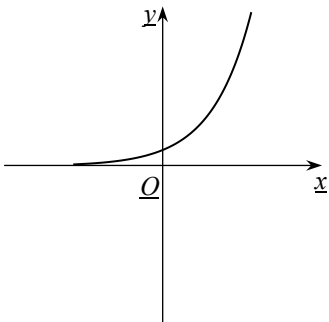
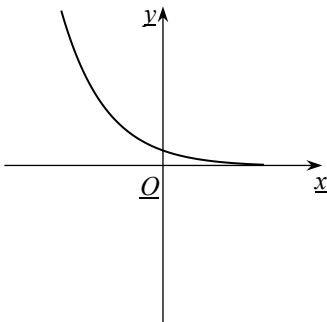
$$(3) \quad (ab)^r = \underline{a^r b^r} \quad (a > 0, r, s \in Q)$$

9.无理指数幂：一般地，无理数指数幂 a^α ($a > 0$ ， α 是无理数) 是一个确定的实数，有理数指数幂的运算性质同样适应于无理数指数幂

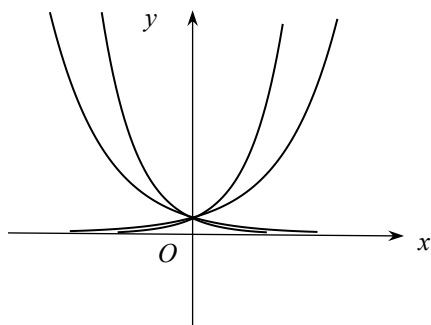
4.2 指数函数

二、指数函数及其性质

1. 指数函数：一般地，函数 $y = a^x$ ($a > 0$ ，且 $a \neq 1$) 叫做指数函数，其中 x 是自变量，函数的定义域是 R .
2. 满足指数函数的要求：① $a > 0$ ，且 $a \neq 1$ ；② 系数为 1；③ 指数 x 为自变量.
3. 一般地，指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$ ，且 $a \neq 1$) 的图像和性质如下表所示：

	$a > 1$	$0 < a < 1$
图像		
定义域	R	
值域	$(0, +\infty)$	
性质	过定点 $(0, 1)$ ，即 $x = 0$ 时， $y = 1$	
	<u>非奇非偶函数</u>	
	在 R 上为 <u>增函数</u>	在 R 上为 <u>减函数</u>

4. 在第一象限内：底数越大，图像越靠近 y 轴



5. 与指数函数有关的奇偶函数

奇函数： $f(x) = a^x - a^{-x}$ ； $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ ； $f(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1} = 1 - \frac{2}{a^x + 1}$

偶函数: $f(x) = a^x + a^{-x}$

4.3 对数

1.对数: 一般地, 如果 $a^x = N$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 那么数 x 叫做以 a 为底 N 的对数, 记作:

$$x = \log_a N.$$

(1) 底数: a 叫做对数的底数

(2) 真数: N 叫做真数

2.常用对数: 以 10 为底的对数, $\log_{10} N = \underline{\lg N}$.

3.自然对数: 在科学技术中常用以无理数 $e = 2.71828\cdots$ 为底数的对数, 以 e 为底的对数称为自然对数, $\log_e N = \underline{\ln N}$

4.对数与指数间的关系: 当 $a > 0$, 且 $a \neq 1$ 时, $a^x = N \Leftrightarrow \underline{x = \log_a N}$

5.对数的性质:

①负数和零没有对数

$$\textcircled{2} \log_a a = \underline{1}$$

$$\textcircled{3} \log_a 1 = \underline{0}$$

$$\textcircled{4} a^{\log_a N} = \underline{N}$$

6.对数的运算性质

$$\textcircled{1} \log_a M \cdot N = \underline{\log_a M + \log_a N}$$

$$\textcircled{2} \log_a \frac{M}{N} = \underline{\log_a M - \log_a N}$$

$$\textcircled{3} \log_a M^n = \underline{n \log_a M}$$

$$\textcircled{4} \log_{a^m} M^n = \underline{\frac{n}{m} \log_a M}$$

$$\textcircled{5} \log_a b = \underline{\frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

$$\textcircled{6} \log_a b \cdot \log_b a = \underline{1}$$

$$\textcircled{9} \lg 2 + \lg 5 = \underline{1}$$

7.运算性质的推导:

①设 $a^m = M$, $a^n = N$, 则 $\log_a M = m$, $\log_a N = n$

$$\therefore a^m \cdot a^n = a^{m+n} = M \cdot N , \therefore \log_a M \cdot N = m + n = \log_a M + \log_a N$$

②设 $a^m = M$, $a^n = N$, 则 $\log_a M = m$, $\log_a N = n$

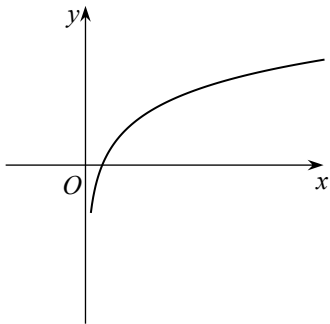
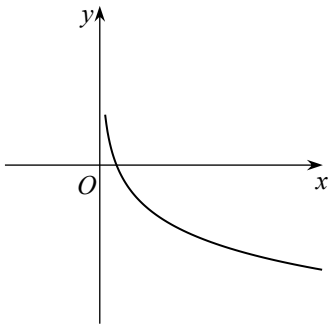
$$\therefore \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{M}{N} , \therefore \log_a \frac{M}{N} = m - n = \log_a M - \log_a N$$

4.4 对数函数

一、对数函数及性质

1. 一般地, 函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 叫做对数函数, 其中 x 是自变量, 定义域为 $(0, +\infty)$.

2. 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图像和性质

	$0 < a < 1$	$a > 1$
图像		
定义域	$(0, +\infty)$	
值域	$\mathbb{R}$	
性质	过定点 $(1, 0)$, 即 $x = 1$ 时, $y = 0$	
	在 $(0, +\infty)$ 上是 <u>减函数</u>	在 $(0, +\infty)$ 上是 <u>增函数</u>
	<u>非奇非偶函数</u>	

(1) $y = \log_a x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 的图像关于 x 轴对称

(2) 在第一象限内: 底数越小, 越靠近 y 轴

(3) 比较两个对数之间的大小: 找中间量 “0”、“1” 进行比较

(4) 求对数函数的定义域: 底数 $a > 0$, 且底数 $a \neq 1$, 且真数 $N > 0$

3. 与对数函数有关的奇偶函数

奇函数: $f(x) = \log_a \left(\sqrt{(ax)^2 + 1} - ax \right)$; $f(x) = \log_a \left(\sqrt{(ax)^2 + 1} + ax \right)$; $f(x) = \log_a \frac{m \pm nx}{m \mp nx}$

二、反函数

1.反函数: 一般地, 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 与对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 互为反函数, 它们的定义域与值域正好互换。

2.原函数

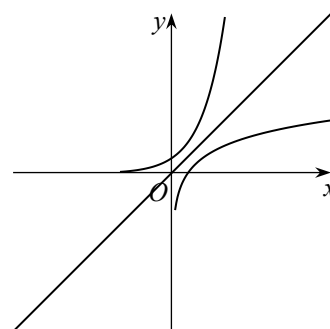
3.互为反函数: 函数 $f(x)$ 与反函数 $f^{-1}(x)$ 互为反函数

4.性质:

- (1) 函数 $f(x)$ 与它的反函数 $f^{-1}(x)$ 图像关于直线 $y = x$ 对称
- (2) 函数存在反函数的充要条件是: 函数的定义域与值域是一一映射
- (3) 一个函数与它的反函数在相应区间上单调性一致, 奇偶性一致
- (4) 原函数图像经过 (a, b) , 则反函数图像经过 (b, a)

5.求反函数的步骤:

- ①由 $f(x)$ 求出 x (用 y 表示 x)
- ② x 和 y 互换位置
- ③求出 $f^{-1}(x)$ 的定义域



第五章 三角函数

5.1 任意角与弧度制

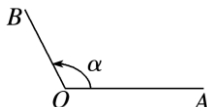
知识点一 任意角

1. 角的概念:

角可以看成平面内一条射线绕着它的端点旋转所成的图形.

2. 角的表示:

如图, OA 是角 α 的始边, OB 是角 α 的终边, O 是角 α 的顶点. 角 α 可记为“角 α ”或“ $\angle \alpha$ ”或简记为“ α ”.



3. 角的分类:

名称	定义	图示
正角	按逆时针方向旋转形成的角	
负角	按顺时针方向旋转形成的角	
零角	一条射线没有作任何旋转形成的角	

知识点二 角的加法与减法

设 α , β 是任意两个角, $-\alpha$ 为角 α 的相反角.

(1) $\alpha + \beta$: 把角 α 的终边旋转角 β .

(2) $\alpha - \beta$: $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

知识点三 象限角

把角放在平面直角坐标系中, 使角的顶点与原点重合, 角的始边与 x 轴的非负半轴重合, 那么, 角的终边在第几象限, 就说这个角是第几象限角; 如果角的终边在坐标轴上, 就认为这个角不属于任何一个象限.

知识点四 终边相同的角

所有与角 α 终边相同的角, 连同角 α 在内, 可构成一个集合 $S = \{\beta \mid \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 即任一与角 α 终边相同的角, 都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

终边在 x 轴正半轴上的角的集合 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 或 $\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

终边在 x 轴负半轴上的角的集合 $\{\alpha \mid \alpha = 180^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 或 $\{\alpha \mid \alpha = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

终边在 x 轴上的角的集合 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$; 或 $\{\alpha \mid \alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

终边在 y 轴正半轴上的角的集合 $\{\alpha \mid \alpha = 90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 或 $\{\alpha \mid \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

终边在 y 轴负半轴上的角的集合 $\{\alpha \mid \alpha = -90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 或 $\{\alpha \mid \alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

终边在 y 轴上的角的集合 $\{\alpha \mid \alpha = 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$; 或 $\{\alpha \mid \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

知识点五 度量角的两种单位制

1. 角度制:

(1) 定义: 用度作为单位来度量角的单位制.

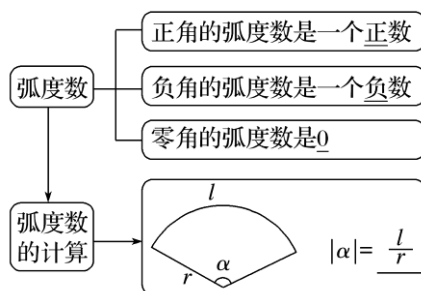
(2) 1 度的角: 周角的 $\frac{1}{360}$.

2. 弧度制:

(1) 定义: 以弧度作为单位来度量角的单位制.

(2)1 弧度的角：长度等于半径长的圆弧所对的圆心角.

知识点六 弧度数的计算



知识点七 角度与弧度的互化

角度化弧度	弧度化角度
$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$	$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$
$180^\circ = \pi \text{ rad}$	$\pi \text{ rad} = 180^\circ$
$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.01745 \text{ rad}$	$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ$
度数 $\times \frac{\pi}{180}$ = 弧度数	弧度数 $\times \left(\frac{\pi}{180}\right)^\circ$ = 度数

知识点八 弧度制下的弧长与扇形面积公式

设扇形的半径为 R ，弧长为 l ， $\alpha (0 < \alpha < 2\pi)$ 为其圆心角，则

(1)弧长公式： $l = \alpha R$.

(2)扇形面积公式： $S = \frac{1}{2}lR = \frac{1}{2}\alpha R^2$.

5.2 三角函数的概念

知识点一 任意角的三角函数的定义

设 α 是一个任意角， $\alpha \in \mathbb{R}$ ，它的终边 OP 与单位圆相交于点 $P(x, y)$ ，点 P 的纵坐标 y 叫做 α 的正弦函数，记作 $\sin \alpha$ ，即 $\sin \alpha = y$ ；点 P 的横坐标 x 叫做 α 的余弦函数，记作 $\cos \alpha$ ，即 $\cos \alpha = x$ ；把点 P 的纵坐标与

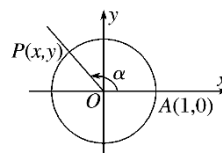
横坐标的比值 $\frac{y}{x}$ 叫做 α 的正切，记作 $\tan \alpha$ ，即 $\tan \alpha = \frac{y}{x} (x \neq 0)$.

正弦函数、余弦函数和正切函数统称为三角函数，分别记为：

正弦函数 $y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ ；

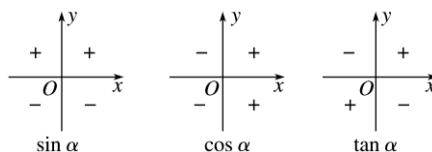
余弦函数 $y = \cos x, x \in \mathbb{R}$ ；

正切函数 $y = \tan x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.



知识点二 正弦、余弦、正切函数值在各象限内的符号

1. 图示：



2. 口诀：“一全正，二正弦，三正切，四余弦”.

知识点三 公式一

$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha$, $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha$, $\tan(\alpha + 2k\pi) = \tan \alpha$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$.

终边相同的角的同一三角函数的值相等.

知识点四 同角三角函数的基本关系

1. 平方关系：同一个角 α 的正弦、余弦的平方和等于 1，即 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

2. 商数关系：同一个角 α 的正弦、余弦的商等于这个角的正切，

即 $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$ 其中 $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

知识点五 特殊角三角函数值

角度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	不存在	0

5.3 诱导公式

知识点一 公式二

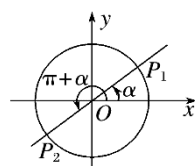
1. 角 $\pi + \alpha$ 与角 α 的终边关于原点对称。如图所示。

2. 公式：

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha,$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha.$$



知识点二 公式三

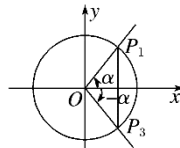
1. 角 $-\alpha$ 与角 α 的终边关于 x 轴对称。如图所示。

2. 公式：

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha,$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha.$$



知识点三 公式四

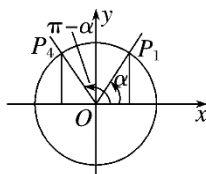
1. 角 $\pi - \alpha$ 与角 α 的终边关于 y 轴对称。如图所示。

2. 公式：

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha,$$

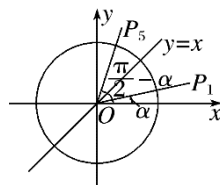
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha.$$



知识点四 公式五

1. 角 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 与角 α 的终边关于直线 $y=x$ 对称。如图所示。

2. 公式： $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha, \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$.



知识点五 公式六

1. 公式： $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha, \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$.

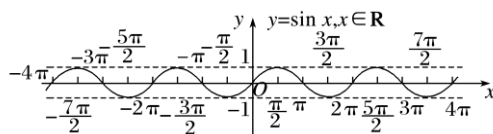
2. 公式五与公式六中角的联系 $\frac{\pi}{2} + \alpha = \pi - (\frac{\pi}{2} - \alpha)$.

5.4 三角函数的图象与性质

知识点一 正弦函数的图象

1. 正弦曲线的定义

正弦函数 $y = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$ 的图象叫正弦曲线.



2. 正弦函数图象的画法

(1) 几何法:

①利用单位圆上点 $T(x_0, \sin x_0)$ 画出 $y = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$ 的图象;

②将图象向左、向右平行移动(每次 2π 个单位长度).

(2) 五点法:

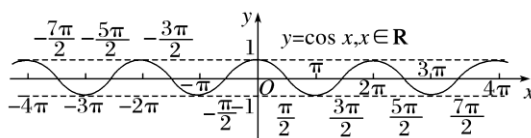
①画出正弦曲线在 $[0, 2\pi]$ 上的图象的五个关键点 $(0, 0), (\frac{\pi}{2}, 1), (\pi, 0), (\frac{3\pi}{2}, -1), (2\pi, 0)$, 用光滑的曲线连接;

②将所得图象向左、向右平行移动(每次 2π 个单位长度).

知识点二 余弦函数的图象

1. 余弦曲线的定义

余弦函数 $y = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$ 的图象叫余弦曲线.



2. 余弦函数图象的画法

(1)要得到 $y = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$ 的图象, 只需把 $y = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度即可, 这是由于

$$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}).$$

(2)用“五点法”: 画余弦曲线 $y = \cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的图象时, 所取的五个关键点分别为 $(0, 1), (\frac{\pi}{2}, 0), (\pi, -1), (\frac{3\pi}{2}, 0), (2\pi, 1)$, 再用光滑的曲线连接.

知识点三 周期性

1. 函数的周期性

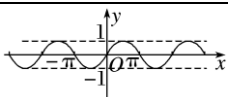
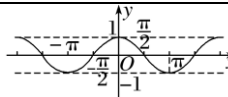
(1)一般地, 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个非零常数 T , 使得对每一个 $x \in D$ 都有 $x+T \in D$, 且 $f(x+T)=f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 就叫做周期函数. 非零常数 T 叫做这个函数的周期.

(2)如果在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在一个最小的正数, 那么这个最小正数叫做 $f(x)$ 的最小正周期.

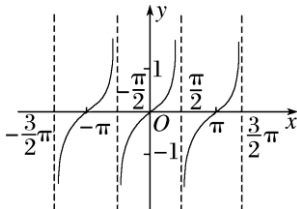
2. 正弦、余弦函数的周期性

正弦函数 $y = \sin x (x \in \mathbf{R})$ 和余弦函数 $y = \cos x (x \in \mathbf{R})$ 都是周期函数, $2k\pi (k \in \mathbf{Z}, \text{ 且 } k \neq 0)$ 都是它们的周期. 最小正周期为 2π .

知识点四 正弦函数、余弦函数的单调性、奇偶性与最值

	正弦函数	余弦函数
图象		
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$
单调性	在 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in \mathbf{Z})$ 上单调递增, 在 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right] (k \in \mathbf{Z})$ 上单调递减	在 $[2k\pi - \pi, 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ 上单调递增, 在 $[2k\pi, 2k\pi + \pi] (k \in \mathbf{Z})$ 上单调递减
最值	$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 时, $y_{\max} = 1$; $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 时, $y_{\min} = -1$	$x = 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 时, $y_{\max} = 1$; $x = 2k\pi + \pi (k \in \mathbf{Z})$ 时, $y_{\min} = -1$
奇偶性	<u>奇函数</u>	<u>偶函数</u>
对称性	对称轴 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 对称中心 $(k\pi, 0) (k \in \mathbf{Z})$	对称轴 $x = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 对称中心 $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0) (k \in \mathbf{Z})$

知识点五 函数 $y = \tan x$ 的图象与性质

解析式	$y = \tan x$
图象	
定义域	$\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$
值域	$\mathbf{R}$
最小正周期	π
奇偶性	<u>奇函数</u>
单调性	在每个开区间 $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}) (k \in \mathbf{Z})$ 上都是增函数
对称性	对称中心 $(\frac{k\pi}{2}, 0) (k \in \mathbf{Z})$

5.5 三角恒等变换

知识点一 两角和与差的余弦公式

名称	简记符号	公式	使用条件
两角差的余弦公式	$C_{(\alpha-\beta)}$	$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$	$\alpha, \beta \in \mathbf{R}$
两角和的余弦公式	$C_{(\alpha+\beta)}$	$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$	$\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

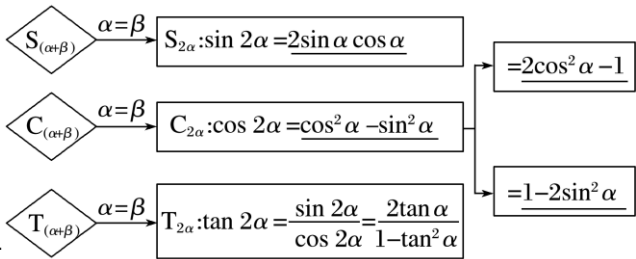
知识点二 两角和与差的正弦公式

名称	简记符号	公式	使用条件
两角和的正弦	$S_{(\alpha+\beta)}$	$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$	$\alpha, \beta \in R$
两角差的正弦	$S_{(\alpha-\beta)}$	$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$	$\alpha, \beta \in R$

知识点三 两角和与差的正切公式

名称	公式	简记符号	条件
两角和的正切	$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$	$T_{(\alpha+\beta)}$	$\alpha, \beta, \alpha+\beta \neq k\pi+\frac{\pi}{2} (k \in Z)$
两角差的正切	$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$	$T_{(\alpha-\beta)}$	$\alpha, \beta, \alpha-\beta \neq k\pi+\frac{\pi}{2} (k \in Z)$

知识点四 二倍角公式



知识点五 半角公式

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

知识点六 辅助角公式

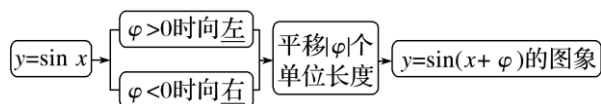
辅助角公式:

$$\underline{a \sin x + b \cos x = \sin(x+\theta)} \text{ (其中 } \tan\theta = \frac{b}{a} \text{)}$$

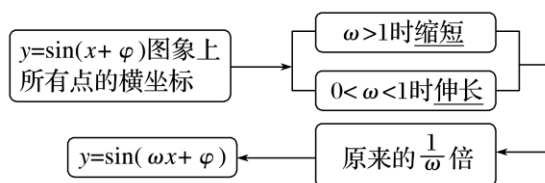
5.6 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$

知识点 A, ω, φ 对函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 图象的影响

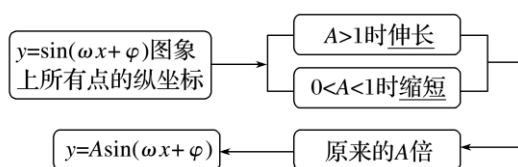
1. φ 对 $y = \sin(x + \varphi), x \in R$ 图象的影响



2. $\omega (\omega > 0)$ 对 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 图象的影响

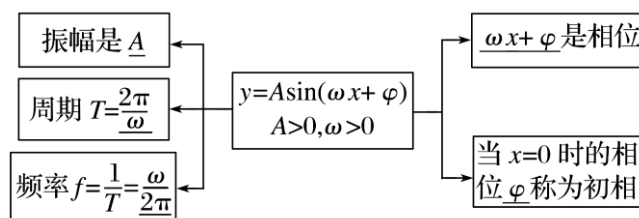


3. $A (A > 0)$ 对 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 图象的影响



5.7 三角函数的应用

知识点 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi), A > 0, \omega > 0$, 中参数的物理意义



【必修二】

第六章 平面向量

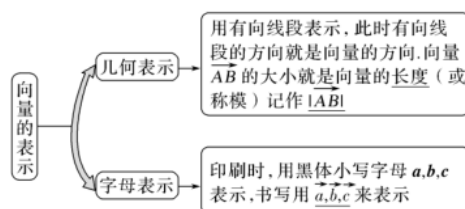
【6.1】平面向量的概念

1、向量的定义及表示（向量无特定的位置，因此向量可以作任意的平移）

（1）定义：既有大小又有方向的量叫做向量.

（2）表示：①有向线段：带有方向的线段，它包含三个要素：起点、方向、长度；

② 向量的表示：



2、向量的有关概念：

相等向量是平行（共线）向量，但平行（共线）向量不一定是相等向量

向量名称	定义
零向量	长度为0的向量，记作 $\mathbf{0}$
单位向量	长度等于1个单位长度的向量
平行向量 (共线向量)	方向相同或相反的非零向量，向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 平行，记作 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 规定：零向量与任一向量平行
相等向量	长度相等且方向相同的向量；向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 相等，记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$

【6.2】平面向量的运算

1、向量的加法

（1）定义：求两个向量和的运算.

（2）运算法则：

向量求和的法则	图示	几何意义
三角形法则 使用三角形法则时要注意“首尾相接”的条件.		已知非零向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, 在平面内任取一点 A, 作 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$, 则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫做 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的和, 记作 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, 即 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
平行四边形法则 向量加法的平行四边形法则应用的前提是共起点		以同一点 O 为起点的两个已知向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, 以 OA, OB 为邻边作 $\square OACB$, 则以 O 为起点的向量 $\overrightarrow{OC}$ ($\overrightarrow{OC}$ 是 $\square OACB$ 的对角线) 就是向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的和

（3）规定：对于零向量与任意向量 $\mathbf{a}$, 规定 $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$.

（4）一般地我们有 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$, 当且仅当 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 方向相同时等号成立.

（5）向量加法的运算律与实数加法的运算律相同

2、向量的减法

（1）相反向量（利用相反向量的定义， $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ 就可以把减法转化为加法）

定义：我们规定，与向量 $\mathbf{a}$ 长度相等，方向相反的向量，叫做 $\mathbf{a}$ 的相反向量

性质：①对于相反向量有： $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ ；②若 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 互为相反向量，则 $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ ；③零向量的相反向量仍是零向量

(2) 向量减法运算（向量的减法是向量加法的一种逆运算）

定义：求两个向量差的运算叫做向量的减法.

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}), \text{ 减去一个向量就等于加上这个向量的相反向量.}$$

几何意义： $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 表示为从向量 $\mathbf{b}$ 的终点指向向量 $\mathbf{a}$ 的终点的向量.

3、向量的数乘运算（实数与向量可以进行数乘运算，但不能进行加减运算）

(1) 定义：规定实数 λ 与向量 $\mathbf{a}$ 的积是一个向量，这种运算叫做向量的数乘，记作： $\lambda \mathbf{a}$ ，它的长度和方向规定如下：

① $|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|$ ；②当 $\lambda > 0$ 时， $\lambda \mathbf{a}$ 的方向与 $\mathbf{a}$ 的方向相同；当 $\lambda < 0$ 时， $\lambda \mathbf{a}$ 的方向与 $\mathbf{a}$ 的方向相反.

③由①可知，当 $\lambda = 0$ 时， $\lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}$ ；由①②知， $(-1) \mathbf{a} = -\mathbf{a}$.

(2) 运算律：设 λ, μ 为任意实数，则有：① $\lambda(\mu \mathbf{a}) = (\lambda \mu) \mathbf{a}$ ；② $(\lambda + \mu) \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}$ ；③ $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$;

特别地，有 $(-\lambda) \mathbf{a} = -(\lambda \mathbf{a}) = \lambda(-\mathbf{a})$ ； $\lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} - \lambda \mathbf{b}$.

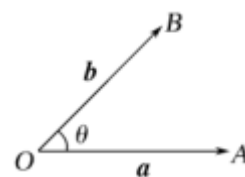
(3) 向量的加、减、数乘运算统称为向量的线性运算，向量的线性运算结果仍是向量.

对于任意向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ，以及任意实数 λ, μ_1, μ_2 ，恒有 $\lambda(\mu_1 \mathbf{a} \pm \mu_2 \mathbf{b}) = \lambda \mu_1 \mathbf{a} \pm \lambda \mu_2 \mathbf{b}$.

(4) 共线向量定理：向量 $\mathbf{a}$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$) 与 $\mathbf{b}$ 共线的充要条件是：存在唯一一个实数 λ ，使 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$. 也就是说，位于同一直线上的向量可以由位于这条直线上的一个非零向量表示.

4、向量的数量积

(1) 向量的夹角：两向量的夹角与两直线的夹角的范围不同，向量夹角范围是 $[0, \pi]$ ，而两直线夹角的范围为 $[0, \frac{\pi}{2}]$



(2) 向量的夹角的定义：已知两个非零向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ， O 是平面上的任意一点，作向量 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ ，则 $\angle AOB = \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 叫做向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角.

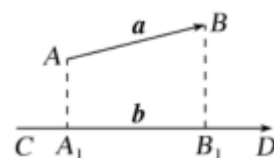
当 $\theta = 0$ 时， $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 同向；当 $\theta = \pi$ 时， $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 反向.

如果 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角是 $\frac{\pi}{2}$ ，我们说 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 垂直，记作 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

(3) 向量的数量积及其几何意义：向量的数量积是一个实数，不是向量，它的值可正可负可为 0

(4) 向量的数量积的定义：已知两个非零向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ ，它们的夹角为 θ ，我们把数量 $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$ 叫做向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的数量积（或内积），记作 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ，即 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$. 规定：零向量与任一向量的数量积为 0.

(5) 投影：如图，设 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 是两个非零向量， $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CD} = \mathbf{b}$ ，我们考虑如下变换：过 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B ，分别作 $\overrightarrow{CD}$ 所在直线的垂线，垂足分别为 A_1 , B_1 得到 $\overrightarrow{A_1B_1}$ ，我们称上述变换为向量 $\mathbf{a}$ 向向量 $\mathbf{b}$ 投影， $\overrightarrow{A_1B_1}$ 叫做向量 $\mathbf{a}$ 在向量 $\mathbf{b}$ 上的投影向量.



(6) 向量数量积的性质

设 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 是非零向量, 它们的夹角是 θ , $\mathbf{e}$ 是与 $\mathbf{b}$ 方向相同的单位向量, 则

① $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \theta$ ② $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ③ 当 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 同向时, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$; 当 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 反向时, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$, 特别地, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$ 或 $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$. 在求解向量的模时一般转化为模的平方, 但不要忘记开方 ④ $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$.

(7) 运算律: ① $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$; ② $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

(8) 运算性质: 类比多项式的乘法公式

【6.3】平面向量基本定理及坐标表示

1、平面向量基本定理

如果 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量, 那么对于这一平面内的任意向量 $\vec{a}$, 有且只有一对实数 λ_1, λ_2 ,

使 $\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$. 我们把不共线的向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底.

2、平面向量的坐标表示

(1) 基底: 在平面直角坐标系中, 设与 x 轴、 y 轴方向相同的两个单位向量分别为 $\mathbf{i}, \mathbf{j}$, 取 $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ 作为基底.

(2) 坐标: 对于平面内的一个向量 $\mathbf{a}$, 由平面向量基本定理可知, 有且仅有一对实数 x, y , 使得 $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, 则有序数对 (x, y) 叫做向量 $\mathbf{a}$ 的坐标.

(3) 平面向量的加减法坐标运算 (可类比实数的加减运算法则进行记忆)

设向量 $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, 则有下表:

	文字描述	符号表示
加法	两个向量和的坐标分别等于这两个向量相应坐标的和	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
减法	两个向量差的坐标分别等于这两个向量相应坐标的差	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$
重要结论	一个向量的坐标等于表示此向量的有向线段的终点的坐标减去起点的坐标	已知 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

(4) 平面向量数乘运算的坐标表示

设向量 $\mathbf{a} = (x, y)$, 则有 $\lambda \mathbf{a} = (\lambda x, \lambda y)$, 这就是说实数与向量的积的坐标等于用这个实数乘原来向量的相应坐标.

(5) 平面向量共线的坐标表示: 设 $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$, 其中 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. 向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$) 共线的充要条件是 $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$.

(6) 中点坐标公式: 若 P_1, P_2 的坐标分别是 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 线段 $P_1 P_2$ 的中点 P 的坐标为 (x, y) , 则 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. 此公式为线段 $P_1 P_2$ 的中点坐标公式.

(7) 两向量的数量积与两向量垂直的坐标表示

已知两个非零向量, 向量 $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 θ .

数量积: 两个向量的数量积等于它们对应坐标的乘积的和, 即: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$

向量垂直: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$

(8) 与向量的模、夹角相关的三个重要公式

① 向量的模: 设 $\mathbf{a} = (x, y)$, 则 $|\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

② 两点间的距离公式: 若 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

③向量的夹角公式：设两非零向量 $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 θ , 则

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

【6.4】平面向量的应用

1、平面几何中的向量方法

用向量方法解决平面几何问题的“三步曲”

- (1) 建立平面几何与向量的联系, 用向量表示问题中涉及的几何元素, 将平面几何问题转化为向量问题;
- (2) 通过向量运算, 研究几何元素之间的关系;
- (3) 把运算结果“翻译”成几何关系.

2、向量在物理中的应用举例

(1) 向量与力: 向量是既有大小, 又有方向的量, 它们可以有共同的起点, 也可以没有共同的起点. 而力是既有大小和方向, 又有作用点的量. 用向量知识解决力的问题时, 往往把向量平移到同一作用点上.

(2) 向量与速度、加速度、位移: 速度、加速度、位移的合成与分解, 实质上就是向量的加、减运算. 用向量解决速度、加速度、位移等问题, 用的知识主要是向量的线性运算, 有时也借助于坐标来运算.

(3) 向量与功、动量: 力所做的功是力在物体前进方向上的分力与物体位移的乘积, 它的实质是力和位移两个向量的数量积, 即 $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{F}| |\mathbf{s}| \cos \theta$ (θ 为 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{s}$ 的夹角). 动量 $m \mathbf{v}$ 实际上是数乘向量.

第七章 复数

7.1 复数的概念

- 1、虚数单位为 i , $i^2 = -1$,
- 2、复数 $z = a + bi$, ($a, b \in R$), a, b 分别叫做复数 z 的实部与虚部。
- 3、复数 $z = a + bi$, ($a, b \in R$), 当且仅当 $b = 0$ 时, 它是实数, 当且仅当 $a = b = 0$ 时, 它是实数 0 , 当 $b \neq 0$ 时, 它叫做虚数, 当 $a = 0$ 且 $b \neq 0$ 时, 它是纯虚数
- 4、相等复数: $a + bi$ 与 $c + di$ 相等当且仅当 $a = c$ 且 $b = d$
- 5、复数集 $C = \{a + bi \mid a, b \in R\}$, 复平面, x 轴叫做实轴, y 轴叫做虚轴。
- 6、复数 $z = a + bi \Leftrightarrow$ 复平面内的点 $Z(a, b) \Leftrightarrow$ 向量 $\overrightarrow{OZ} = (a, b)$
- 7、向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模叫做复数 $z = a + bi$ 的模, 或绝对值, 记作 $|z|$ 或 $|a + bi|$, 及 $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$, 其中 $a, b \in R$
- 8、一般地, 当两个复数的实部相等, 虚部互为相反数时, 这两个复数叫做互为共轭复数, 即 $z = a + bi$, ($a, b \in R$) 与 $\bar{z} = a - bi$, $a, b \in R$ ($a, b \in R$) 互为共轭复数。

7.2 复数的四则运算

$$z_1 = a + bi, z_2 = c + di, a, b, c, d \in R$$

- 1、加法: $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$
- 2、减法: $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$
- 3、乘法: $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- 4、除法: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$

5、求根公式

在复数范围内, 实系数方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的求根公式为

$$(1) \text{ 当 } \Delta \geq 0 \text{ 时, } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$$(2) \text{ 当 } \Delta < 0 \text{ 时, } x = \frac{-b \pm \sqrt{-(b^2 - 4ac)}i}{2a};$$

7.3 复数的三角表示

一般地，任何一个复数 $z = a + bi$ 都可以表示 $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，其中 r 是复数 z 的模， θ 是以 x 的非负半轴为始边，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所在的射线为终边的角，叫做复数 $z = a + bi$ 的辅角。 $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 叫做复数 $z = a + bi$ 三角表示， $a + bi$ 叫做复数的代数表示

复数乘、除法的三角表示

$$(1) \text{ 乘法: } r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

两个复数相乘，积的模等于各复数的模的积，积的辅角等于各复数的辅角和

$$(2) \text{ 除法: } \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

两个复数相除，商的模等于被除数的模除以除数的模所得的商，商的辅角等于被除数的辅角减去除数的辅角所得的差

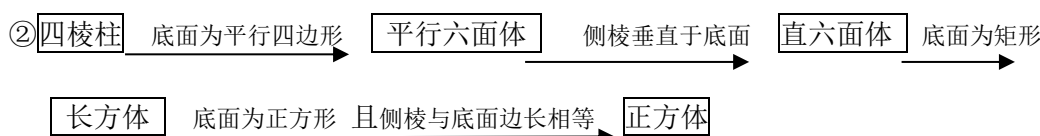
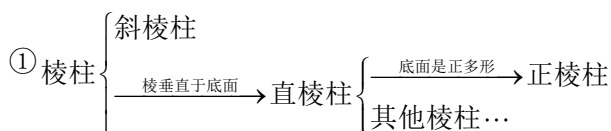
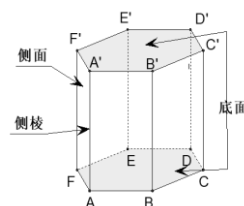
第八章 立体几何初步

1. 基本立体图形

知识点一 简单多面体

1. 柱体

有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面围成的几何体叫作棱柱。



2. 锥体

(1) 定义：有一个面是多边形，其余各面是有一个公共顶点的三角形，由这些面所围成的几何体叫作棱锥。

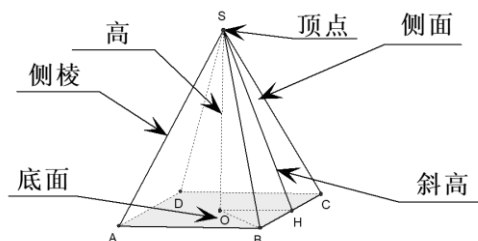
(2) 相关概念

① 这个多边形面叫作棱锥的底面

② 有公共顶点的各个三角形叫作棱锥的侧面

③ 相邻侧面的公共边叫作棱锥的侧棱。

④ 各侧面的公共顶点叫作棱锥的顶点。



(3) 表示方法：如四棱锥 $S-ABCD$

(4) 棱锥的分类：三棱锥、四棱锥、五棱锥

(5) 特殊的棱锥：

① 底面是正多边形，且顶点与底面中心的连线垂直于底面的棱锥叫作正棱锥。

② 侧棱长等于底面边长的正三棱锥叫作正四面体

知识点二 简单旋转体

1. 圆柱、圆锥、圆台

分别以矩形的一边、直角三角形的一条直角边、直角梯形垂直于底边的腰所在的直线为旋转轴，其余各边旋转而形成的曲面所围成的几何体分别叫作圆柱、圆锥、圆台。

2. 球

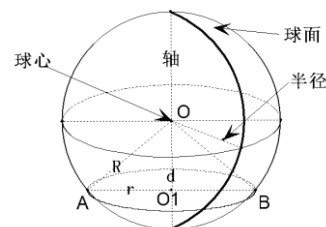
球面：以圆的直径所在的直线为旋转轴，将半圆旋转形成的曲面叫作球面；

球体：球面所围成的几何体叫作球体；简称球；

球心：半圆的圆心叫作球心；

球的半径：连接球心和球面上任意一点的线段；

球的直径：连接球面上两点并且过球心的线段。



3. 旋转体的结构特征

名称	圆柱	圆锥	圆台	球
母线	互相平行且相等， <u>垂直于底面</u>	相交于 <u>一点</u>	延长线交于 <u>一点</u>	／
轴截面	全等的 <u>矩形</u>	全等的 <u>等腰三角形</u>	全等的 <u>等腰梯形</u>	／
侧面展开图	<u>矩形</u>	<u>扇形</u>	<u>圆环的一部分</u>	／

2. 直观图

(1) 画法：常用斜二测画法。

(2) 规则

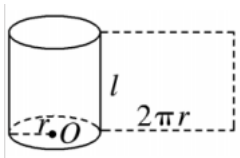
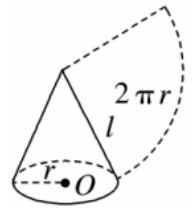
① 原图形中 x 轴、 y 轴、 z 轴两两垂直，直观图中， x' 轴、 y' 轴的夹角为 45° (或 135°)， z' 轴与 x' 轴和 y' 轴所在平面垂直。

② 原图形中平行于坐标轴的线段，直观图中仍平行于坐标轴。平行于 x 轴和 z 轴的线段在直观图中保持原长度不变，平行于 y 轴的线段长度在直观图中变为原来的一半。

注：原图形与直观图面积之比为 $2\sqrt{2}:1$ 。

3. 简单几何体的表（侧）面积与体积公式

(1) 圆柱、圆锥、圆台的侧面展开图及侧面积公式

名称	圆柱	圆锥	圆台
侧面展开图			
侧面积公式	$S_{\text{圆柱侧}} = 2\pi r l$	$S_{\text{圆锥侧}} = \pi r l$	$S_{\text{圆台侧}} = \pi(r_1 + r_2)l$

(2) 柱、锥、台和球的表面积和体积

	表面积	体积
柱体 (圆柱 和棱 柱)	$S_{\text{表面积}} = S_{\text{侧}} + 2S_{\text{底}}$	$V = Sh$
锥体 (圆锥 和棱 锥)	$S_{\text{表面积}} = S_{\text{侧}} + S_{\text{底}}$	$V = \frac{1}{3}Sh$

台体 (圆台 和棱 台)	$S_{\text{表面积}} = S_{\text{侧}} + S_{\text{上}} + S_{\text{下}}$	$V = \frac{1}{3}(S_{\text{上}} + S_{\text{下}} + \sqrt{S_{\text{上}}S_{\text{下}}})h$
球	$S = 4\pi R^2$	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

知识拓展：几个与球有关的切、接常用结论

(1) 正方体的棱长为 a ，球的半径为 R ，

①若球为正方体的外接球，则 $2R = \sqrt{3}a$ ；

②若球为正方体的内切球，则 $2R = a$ ；

③若球与正方体的各棱相切，则 $2R = \sqrt{2}a$ 。

(2) 若长方体的同一顶点的三条棱长分别为 a, b, c ，外接球的半径为 R ，则 $2R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ 。

(3) 正四面体的外接球与内切球的半径之比为 $3:1$ 。

4. 空间点、直线、平面之间的位置关系

(1) 平面

基本事实 1 过不在一条直线上的三个点，有且只有一个平面

基本事实 2 如果一条直线上的两个点在一个平面内，那么这条直线在这个平面内

推论 1 经过一条直线和这条直线外一点，有且只有一个平面

推论 2 经过两条相交直线，有且只有一个平面

推论 3 经过两条平行直线，有且只有一个平面

基本事实 3 如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线

基本事实 4 平行于同一条直线的两条直线平行

(2) 空间位置关系

①空间中直线与直线的位置关系

$\left\{ \begin{array}{l} \text{共面直线} \left\{ \begin{array}{l} \text{相交直线: } \underline{\text{在同一平面内, 有且只有一个公共点;}} \\ \text{平行直线: } \underline{\text{在同一平面内, 没有公共点;}} \end{array} \right. \\ \text{异面直线: } \underline{\text{不同在任何一个平面内, 没有公共点}} \end{array} \right.$

②空间中直线与平面的位置关系

直线在平面内——有无数个公共点；

直线与平面相交——有且只有一个公共点；

直线与平面平行——没有公共点

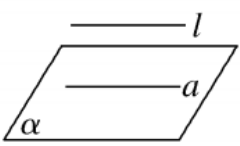
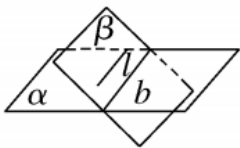
③空间中平面与平面的位置关系

两个平面平行——没有公共点

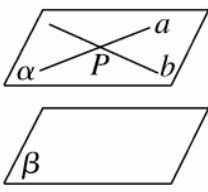
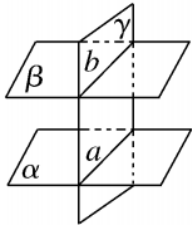
两个平面相交——有一条公共直线

5. 空间直线、平面的平行

1. 直线与平面平行的判定定理和性质定理

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	平面外一条直线与此平面内的一条直线平行,则该直线与此平面平行(简记为“线线平行 $\Rightarrow$ 线面平行”)		$\left. \begin{array}{l} l // a \\ a \subset \alpha \\ l \not\subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow l // \alpha$
性质定理	一条直线与一个平面平行,则过这条直线的任一平面与此平面的交线与该直线平行(简记为“线面平行 $\Rightarrow$ 线线平行”)		$\left. \begin{array}{l} l // \alpha \\ l \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = b \end{array} \right\} \Rightarrow l // b$

2. 平面与平面平行的判定定理和性质定理

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行,则这两个平面平行(简记为“线面平行 $\Rightarrow$ 面面平行”)		$\left. \begin{array}{l} a // \beta \\ b // \beta \\ a \cap b = P \\ a \subset \alpha \\ b \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha // \beta$
性质定理	如果两个平行平面同时和第三个平面相交,那么它们的交线平行		$\left. \begin{array}{l} \alpha // \beta \\ \alpha \cap \gamma = a \\ \beta \cap \gamma = b \end{array} \right\} \Rightarrow a // b$

知识拓展: (1)垂直于同一条直线的两个平面平行,即若 $a \perp \alpha, a \perp \beta$,则 $\alpha // \beta$;

(2)垂直于同一个平面的两条直线平行,即若 $a \perp \alpha, b \perp \alpha$,则 $a // b$;

(3)平行于同一个平面的两个平面平行,即若 $\alpha // \beta, \beta // \gamma$,则 $\alpha // \gamma$;

(4)如果两个平面平行,那么其中一个平面内的任意一条直线平行于另一个平面.

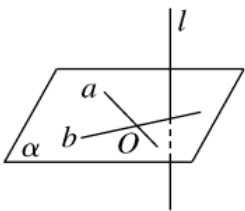
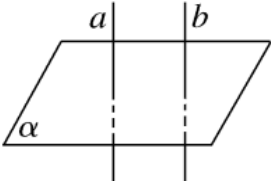
6. 空间直线、平面的垂直

1. 直线与平面垂直

(1) 定义

如果直线 l 与平面 α 内的任意一条直线都垂直, 则直线 l 与平面 α 垂直.

(2) 判定定理与性质定理

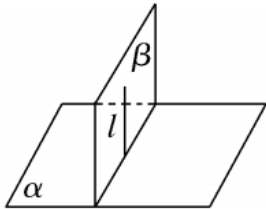
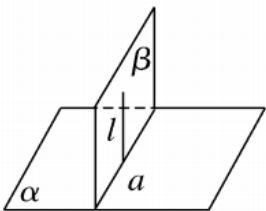
	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	一条直线与一个平面内的两条 <u>相交</u> 直线都垂直, 则该直线与此平面垂直		$\left. \begin{array}{l} a, b \subset \alpha \\ a \cap b = O \\ l \perp a \\ l \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow l \perp \alpha$
性质定理	垂直于同一个平面的两条直线 <u>平行</u>		$\left. \begin{array}{l} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$

2. 平面与平面垂直

(1) 平面和平面垂直的定义

两个平面相交, 如果它们所成的二面角是直二面角, 就说这两个平面互相垂直.

(2) 平面与平面垂直的判定定理与性质定理

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	一个平面过另一个平面的 <u>垂线</u> , 则这两个平面垂直		$\left. \begin{array}{l} l \perp \alpha \\ l \subset \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$
性质定理	两个平面垂直, 则一个平面内垂直于 <u>交线</u> 的直线与另一个平面垂直		$\left. \begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ l \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = a \\ l \perp a \end{array} \right\} \Rightarrow l \perp \alpha$

知识拓展: 熟记常用结论:

- (1) 若一条直线垂直于一个平面, 则它垂直于这个平面内的任何一条直线.
- (2) 若两平行线中的一条垂直于一个平面, 则另一条也垂直于这个平面.

(3) 垂直于同一条直线的两个平面平行.

(4) 一条直线垂直于两平行平面中的一个, 则这一条直线与另一个平面也垂直.

(5) 过一点有且只有一条直线与已知平面垂直; 过一点有且只有一个平面与已知直线垂直.

7. 求角: (步骤———1. 找或作角; 2. 求角)

(1) 异面直线所成角的求法:

① 平移法: 一作: 即据定义作平行线, 作出异面直线所成的角;

二证: 即证明作出的角是异面直线所成的角;

三求: 解三角形, 求出作出的角, 如果求出的角是锐角或直角, 则它就是要求的角; 如果求出的角是钝角, 则它的补角才是要求的角.

② 补形法: 补成正方体、平行六面体、长方体等, 发现两条异面直线间的关系.

③ 向量法: 转化为两直线方向向量的夹角.

(2) 直线与平面所成的角:

① 直接法 (利用线面角定义); ② 先求斜线上的点到平面距离 h , 与斜线段长度作比, 得 $\sin \theta$.

② 向量法, 转化为直线的方向向量与平面法向量的夹角.

(3) 二面角的求法:

① 定义法: 在二面角的棱上取一点 (特殊点), 作出平面角, 再求解;

② 三垂线法: 由一个半面内一点作 (或找) 到另一个半平面的垂线, 用三垂线定理或逆定理作出二面角的平面角, 再求解;

③ 射影法: 利用面积射影公式: $S' = S \cos \theta$, 其中 θ 为平面角的大小;

注: 对于没有给出棱的二面角, 应先作出棱, 然后再选用上述方法;

④ 向量法, 转化为两个平面法向量的夹角.

8. 求距离: (步骤———1. 找或作垂线段; 2. 求距离)

(1) 求空间距离常用的 3 种方法

① 直接法: 利用线线垂直、线面垂直、面面垂直等性质定理与判定定理, 作出垂线段, 再通过解三角形求出距离.

② 间接法: 利用等体积法、特殊值法等转化求解.

③ 向量法: 空间中的距离问题一般都可转化为点到平面的距离问题进行求解.

(2) 求点 P 到平面 α 的距离的 3 个步骤

① 在平面 α 内取一点 A , 确定向量 $\vec{PA}$ 的坐标;

② 确定平面 α 的法向量 $\vec{n}$;

③ 代入公式 $d = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$ 求解

(3) 球面距离: (步骤)

第一步: 求线段 AB 的长;

第二步: 求球心角 $\angle AOB$ 的弧度数;

第三步: 求劣弧 AB 的长.

9. 结论:

(1) 从一点 O 出发的三条射线 OA 、 OB 、 OC ，若 $\angle AOB = \angle AOC$ ，则点 A 在平面 $\angle BOC$ 上的射

影在 $\angle BOC$ 的平分线上；

(2) 立平斜公式(最小角定理公式)： $\cos \theta = \cos \theta_1 \cos \theta_2$ ；

(3) 正棱锥的各侧面与底面所成的角相等，记为 θ ，则 $S_{\text{侧}} \cos \theta = S_{\text{底}}$ ；

(4) 长方体的性质

①长方体体对角线与过同一顶点的三条棱所成的角分别为 α, β, γ ，则：

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1; \quad \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$$

②长方体体对角线与过同一顶点的三侧面所成的角分别为 α, β, γ ，则有

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2; \quad \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$$

(5) 正四面体的性质：设棱长为 a ，则正四面体的：

$$\text{①高: } h = \frac{\sqrt{6}}{3}a; \quad \text{②对棱间距离: } \frac{\sqrt{2}}{2}a;$$

$$\text{③ 相邻两面所成角余弦值: } \frac{1}{3}; \quad \text{④内切球半径: } \frac{\sqrt{6}}{12}a; \quad \text{外接球半径: } \frac{\sqrt{6}}{4}a;$$

第九章 统计

1. 随机抽样

(1) 对每一个调查对象都进行调查的方法,称为全面调查,又称普查.在一个调查中,我们把调查对象的全体称为总体,组成总体的每一个调查对象称为个体.

(2) 根据一定目的,从总体中抽取一部分个体进行调查,并以此为依据对总体的情况作出估计和推断的调查方法,称为抽样调查,我们把从总体中抽取的那部分个体称为样本,样本中包含的个体数称为样本容量,简称样本量.

2. 抽样方法

(1) 简单随机抽样:一般地,设一个总体的个数为 N ,通过逐个不放回的方法从中抽取一个容量为 n 的样本,且每个个体被抽到的机会相等,就称这种抽样为简单随机抽样.

注:①每个个体被抽到的概率为 $\frac{n}{N}$;

②常用的简单随机抽样方法有:抽签法;随机数法.

(2) 分层随机抽样:一般的按一个或多个变量,把总体划分成若干个子总体,每个个体属于且仅属于一个子总体,在每个子总体中独立的进行简单随机抽样,再把所有子总体中抽取的样本合在一起,作为总样本,这样的抽样方法称为分层随机抽样.每一个子总体称为层,在分层随机抽样中,如果每层样本量都与层的大小成比例,那么称这种样本量的分配方式为比例分配.

(3) 一般地, 总体中有 N 个个体, 它们的变量值分别为 $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$, 则称 $\bar{Y} = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i$ 为

总体均值, 又称总体平均数.

如果总体的 N 个变量值中, 不同的值共有 $k(k \leq N)$ 个, 不妨记为 $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$, 其中 Y_i 出现的频数

$f_i (i=1, 2, \dots, k)$, 则总体均值还可以写成加权平均数的形式 $\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i Y_i$.

如果从总体中抽取一个容量为 n 的样本, 它们的变量值分别为 $y_1, y_2, \dots, y_n$, 则称

$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ 为样本均值, 又称样本平均数.在简单随机抽样中, 我们常用样本平均数 $\bar{y}$ 去

估计总体平均数 $\bar{Y}$.

(4) 统计学是通过收集数据和分析数据来认识未知现象的, 我们可以通过调查、实验、观察、查询获得数据.

3. 用样本估计总体:

(1) 我们通常可以选择频率分布表和频率分布直方图来整理和表示数据.制作频率分布直方图的步骤有:求极差, 决定组距和组数, 将数据分组, 列频率分布表, 画频率分布直方图.

(2) 总体百分位数的估计:

一般地, 一组数据的第 p 百分位数是这样一个值, 它使得这组数据中至少有 $p\%$ 的数据小于或等于这个值, 且至少有 $(100-p)\%$ 的数据大于或等于这个值.

可以通过下面的步骤计算一组 n 个数据的第 p 百分位数:

第 1 步, 按从小到大排列原始数据.

第 2 步, 计算 $i = n \times p\%$.

第 3 步, 若 i 不是整数, 而大于 i 的比邻整数为 j , 则第 p 百分位数为第 j 项数据; 若 i 是整数, 则第 p 百分位数为第 i 项数据和第 j 项数据的平均数.

(3) 总体集中趋势的估计:

一般地, 对数值型数据集中趋势的描述, 可以用平均数、中位数, 而对分类型数据集中趋势的描述, 可以用众数.

(4) 总体离散程度的估计:

$$\text{样本平均数 } \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i ;$$

$$\text{样本方差 } S^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 ;$$

$$\text{样本标准差 } S = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} .$$

标准差刻画数据的离散程度和波动幅度, 标准差越大, 数据的离散程度越大, 标准差越小, 数据的散程度越小.

第十章 概率

一、样本点和样本空间

(准备) **随机试验**: 我们把对随机现象的实现和对它的观察称为随机试验. **随机试验的特点**: ①试验可以在相同的条件下重复进行 ②试验的所有可能结果是明确可知的, 并且不止一个 ③每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个, 事先并不知道会出现哪一种结果.

(1) 定义: 我们把随机试验 E 的每个可能的基本结果称为**样本点**, 全体样本点的集合称为试验 E 的**样本空间**.

(2) 表示: 一般地, 我们用 Ω 表示样本空间, 用 ω 表示样本点

(3) 有限样本空间: 如果一个随机试验有 n 个可能结果 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, 则称样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ 为有限样本空间

有限样本空间

二、随机事件

定义: 我们将样本空间 Ω 的子集称为**随机事件**, 简称“事件”.

表示: 随机事件一般用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示

发生: 在每次试验中, 当且仅当 A 中某个样本点出现时, 称为事件 A 发生.

随机事件的三种特殊情况如下:

(1) **基本事件**: 只包含一个样本点的事件称为基本事件.

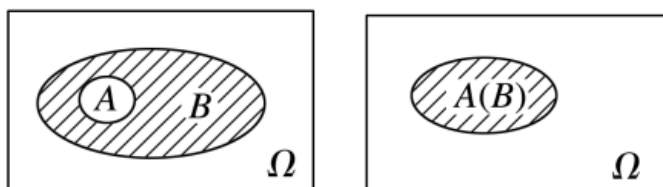
(2) **必然事件**: Ω 作为自身的子集, 包含了所有的样本点, 在每次试验中总有一个样本点发生, 所以总会发生, 我们称为必然事件.

(3) **不可能事件**: 空集 $\emptyset$ 中不包含任何样本点, 在每次试验中都不会发生, 我们称 $\emptyset$ 为不可能事件.

三、事件的关系与运算

(1) 两个关系

包含关系: 一般地, 对于事件 A 与事件 B , 如果事件 A 发生, 则事件 B 一定发生, 这时称事件包含事件 A (或称事件 A 包含于事件 B), 记作 $B \supseteq A$ (或 $A \subseteq B$)

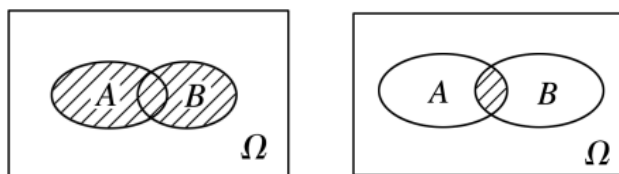


相等关系: 如果事件 C_1 发生, 那么事件 D_1 一定发生, 反过来也对, 这时我们说这两个事件相等, 记作 $C_1 = D_1$ 。

(2) 两个运算

并事件 (和事件): 若某事件发生当且仅当事件 A 发生或事件 B 发生, 则称此事件为事件 A 与事件 B 的并事件 (或和事件), 记作 $A \cup B$ (或 $A+B$)

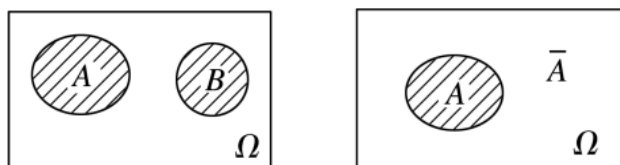
交事件（积事件）：若某事件发生当且仅当事件 A 发生且事件 B 发生，则称此事件为事件 A 与事件 B 的交事件（或积事件），记作 $A \cap B$ （或 AB ）



（3）互斥事件与对立事件

互斥事件：一般地，如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，也就是说 $A \cap B$ 是一个不可能事件，即 $A \cap B = \emptyset$ ，则称事件 A 与事件 B 互斥（或互不相容），符号表示： $A \cap B = \emptyset$ 。

对立事件：一般地，如果事件 A 和事件 B 在任何一次试验中有且仅有一个发生，即 $A \cup B = \Omega$ ，且 $A \cap B = \emptyset$ ，那么称事件 A 与事件 B 互为对立，事件 A 的对立事件记为 $\bar{A}$ ，符号表示： $A \cup B = \Omega$ ，且 $A \cap B = \emptyset$ 。



事件 A 与事件 B 互斥 事件 A 与事件 B 互为对立

四、古典概型

（1）古典概型的定义

试验具有如下共同特征：

- (1)有限性：样本空间的样本点只有有限个；
- (2)等可能性：每个样本点发生的可能性相等。

我们将具有以上两个特征的试验称为古典概型试验，其数学模型称为古典概率模型，简称**古典概型**。

（2）古典概型的判断

一个试验是否为古典概型，在于这个试验是否具有古典概型的两个特点：有限性和等可能性。并不是所有的试验都是古典概型。

下列三类试验都不是古典概型：

- ①样本点个数有限，但非等可能。②样本点个数无限，但等可能。③样本点个数无限，也不等可能。

（3）古典概型的概率计算公式

一般地，设试验 E 是古典概型，样本空间 Ω 包含 n 个样本点，事件 A 包含其中的 k 个样本点，则定义事件

$$A \text{ 的概率 } P(A) = \frac{k}{n} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

其中, $n(A)$ 和 $n(\Omega)$ 分别表示事件 A 和样本空间 Ω 包含的样本点个数.

(4) 古典概型的解题步骤

求古典概型概率的步骤:

(1) 判断试验的事件是否是古典概型, 并用字母表示所求事件 (如事件 A)

(2) 确定样本空间的样本点的总数 n

(3) 确定所求事件 A 包含的样本点的个数 k

(4) 用公式 $P(A) = \frac{k}{n} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$ 求出事件 A 发生的概率.

五、概率的基本性质

(1) 概率的基本性质 (性质 1、性质 2、性质 5)

性质 1: 对任意的事件 A , 都有 $P(A) \geq 0$;

性质 2: 必然事件的概率为 1, 不可能事件的概率为 0, 即 $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$;

性质 5: 如果 $A \subseteq B$, 那么 $P(A) \leq P(B)$, 由该性质可得, 对于任意事件 A , 因为 $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$, 所以 $0 \leq P(A) \leq 1$.

(2) 互斥事件的概率加法公式 (性质 3)

性质 3: 如果事件 A 与事件 B 互斥, 那么 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

注意: 只有事件 A 与事件 B 互斥, 才可以使用性质 3, 否则不能使用该加法公式.

(3) 对立事件的概率 (性质 4)

性质 4: 如果事件 A 与事件 B 互为对立事件, 那么 $P(B) = 1 - P(A)$, $P(A) = 1 - P(B)$;

(4) 概率的一般加法公式 (性质 6)

性质 6: 设 A , B 是一个随机试验中的两个事件, 有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

六、事件的相互独立性

(1) 概念: 对任意两个事件 A 与 B , 如果 $P(AB) = P(A)P(B)$ 成立, 则称事件 A 与事件 B 相互独立(mutually independent), 简称为独立.

性质 1: 必然事件 Ω 、不可能事件 $\emptyset$ 与任意事件相互独立

性质 2: 如果事件 A 与 B 相互独立, 则 A 与 $\bar{B}$, $\bar{A}$ 与 B , $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立

则: $P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$, $P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B)$, $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B})$

(2) 相互独立事件概率的求法

已知两个事件 A , B 相互独立, 它们的概率分别为 $P(A)$, $P(B)$, 则有

事件	表示	概率
A, B 同时发生	AB	$P(AB) = P(A)P(B)$
A, B 都不发生	$\bar{A}\bar{B}$	$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = [1 - P(A)][1 - P(B)]$
A, B 恰有一个发生	$A\bar{B} \cup \bar{A}B$	$P(A\bar{B} \cup \bar{A}B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(A)P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(B)$
A, B 中至少有一个发生	$A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup AB$	$P(A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup AB) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(AB)$ 或 $P(A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup AB) = 1 - P(\bar{A}\bar{B})$
A, B 中至多有一个发生	$A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup \bar{A}\bar{B}$	$P(A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup \bar{A}\bar{B}) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(\bar{A}\bar{B})$ 或 $P(A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup \bar{A}\bar{B}) = 1 - P(AB)$

(3) 互斥事件与相互独立事件的区别与联系

	相互独立事件	互斥事件
判断方法	一个事件发生与否对另一个事件发生的概率没有影响	两个事件不可能同时发生, 即 $A \cap B = \emptyset$
概率公式	事件 A 与 B 相互独立等价于 $P(AB) = P(A)P(B)$	事件 A 与 B 互斥, 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

七、频率与概率

(1) 频率具有随机性: 大量试验表明, 在任何确定次数的随机试验中, 一个随机事件 A 发生的频率具有随机性。

(2) 频率具有稳定性: 一般地, 对于给定的随机事件 A , 随着试验次数 n 的增大, 频率偏离概率的幅度会缩小, 即事件 A 发生的频率会逐渐稳定于事件 A 发生的概率 $P(A)$ 。

可以用频率估计概率 $P(A)$ 。

(3) 随机模拟方法估计概率的步骤

①建立概率模型

②进行模拟试验 (可用抽签法或随机数法)

- ③统计试验结果
- ④用频率估计概率

【选择性必修一】

第一章 空间向量与立体几何

1.空间向量的相关概念

(1) 定义：在空间，我们把具有大小和方向的量叫做向量，空间向量的大小叫做空间向量的长度或模.

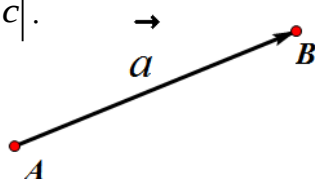
(2) 空间向量的表示

①几何表示：与平面向量一样，空间向量也用有向线段表示，有向线段的长度表示空间向量的模.

②符号表示：空间向量用字母 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, 其模分别记为 $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$.

空间向量可用有向线段表示.如图，向量 $\vec{a}$ 的起点是 A ，终点是 B ，

则向量 $\vec{a}$ 可记作 $\overrightarrow{AB}$ ，其模记为 $|\vec{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$.



(3) 特殊的空间向量

向量名称	方向	向量的模（大小）	表示方法
零向量	任意	0	$\vec{0}$
单位向量		1	
相反向量	相反	相等	$\vec{a}$ 的相反向量: $-\vec{a}$ $\overrightarrow{AB}$ 的相反向量: $-\overrightarrow{AB}$ 或 $\overrightarrow{BA}$
相等向量	相同	相等	$\vec{a} = \vec{b}$

(4) 共线向量：如果表示若干空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合，那么这些向量叫做共线向量或平行向量.

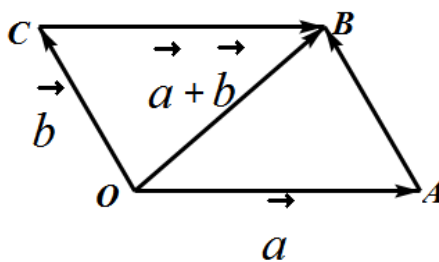
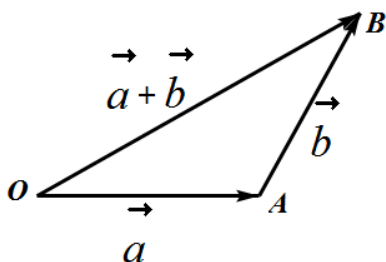
规定：零向量与任意向量平行，即对任意向量 $\vec{a}$ ，都有 $\vec{0} // \vec{a}$.

2.空间向量的加减运算

(1) 加法运算

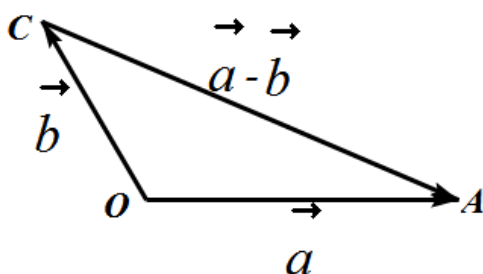
①三角形法则（首尾顺次连接，首指向尾为和）： $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$.

②平行四边形法则（共起点为邻边作平行四边形，共起点对角线为和）： $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$.



(2) 减法运算

①三角形法则（共起点，连终点，方向指向被减向量）： $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CA}$.



(2) 加法运算的运算律

①交换律： $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

②结合律： $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

3. 空间向量的数乘运算

(1) 定义：与平面向量一样，实数 λ 与空间向量的乘积 $\lambda\vec{a}$ 仍然是一个向量，称为空间向量的数乘.

(2) 几何意义

①当 $\lambda > 0$ 时， $\lambda\vec{a}$ 与向量 $\vec{a}$ 方向相同；

②当 $\lambda < 0$ 时， $\lambda\vec{a}$ 与向量 $\vec{a}$ 方向相反；

③当 $\lambda = 0$ 时， $\lambda\vec{a} = \vec{0}$ ，其方向是任意的.

$\lambda\vec{a}$ 的长度是 $\vec{a}$ 长度的 $|\lambda|$ 倍.

(3) 运算律

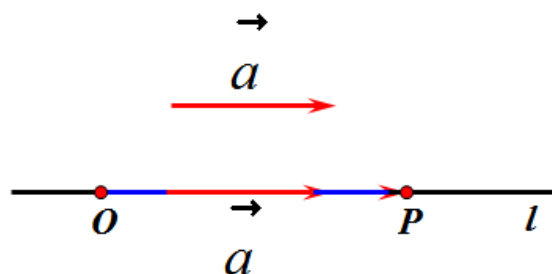
①结合律： $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ ，（其中 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ）.

②分配律： $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ ， $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ ，（其中 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ）.

4. 共线向量定理：对任意两个空间向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0})$ ， $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 的充要条件是存在实数 λ ，使 $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

5. 方向向量

如图， O 是直线 l 上一点，在直线 l 取非零向量 $\vec{a}$ ，则对于直线 l 上的任意一点 P ，由数乘向量的定义及向量共线的充要条件可知，存在实数 λ ，使得 $\overrightarrow{OP} = \lambda\vec{a}$. 我们把与向量 $\vec{a}$ 平行的非零向量称为直线 l 的方向向量.



6. 共面向量

(1) 定义：平行于同一个平面的向量，叫做共面向量.

(2) 共面向量定理：如果两个向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 不共线，那么向量 $\vec{p}$ 与向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 共面的充要条件是存在唯一的

有序实数对 (x, y) , 使 $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

7. 空间向量的数量积运算

(1) **空间向量的夹角**: 如图, 已知两个非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 在空间中任取一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, 则 $\angle AOB$ 叫做向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角.

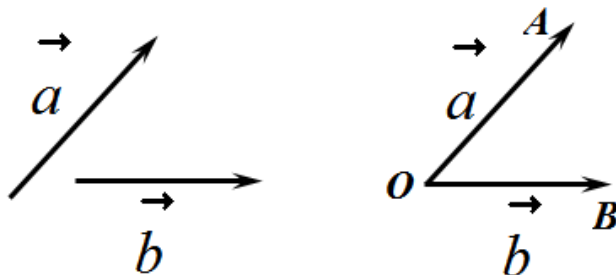
①记法: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

②范围: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in [0, \pi]$.

当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线且方向相同时, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$.

当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线且方向相反时, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \pi$.

③如果 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{2}$, 那么 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 互相垂直, 记作 $\vec{a} \perp \vec{b}$.



(2) **空间向量的数量积**: 已知两个非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 则 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 叫做 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的数量积, 记作: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

即: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

①特别地, 零向量与任意向量的数量积为 0.

② $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = |\vec{a}|^2$

③运算律:

$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (交换律).

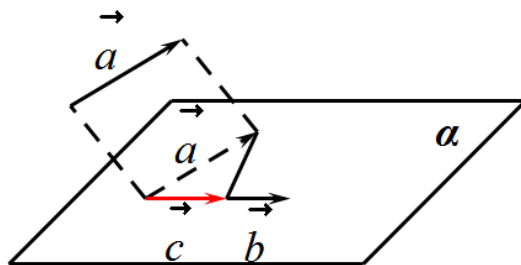
$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (分配律).

④投影向量

如图, 在空间, 向量 $\vec{a}$ 向向量 $\vec{b}$ 投影, 由于它们是自由向量, 以此可以先把它们平移到同一个平面 α 内, 进而利用平面上向量的

投影, 得到与向量 $\vec{b}$ 共线的向量 $\vec{c}$, $\vec{c} = |\vec{a}|\cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$, 向量 $\vec{c}$

称为向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量.



⑤ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的几何意义: $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积等于 $\vec{a}$ 的模与 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影 $|\vec{b}|\cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 的乘积, 也等于 $\vec{b}$ 的模与 $\vec{a}$

在 $\vec{b}$ 上的投影 $|\vec{a}|\cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 的乘积.

⑥空间向量数量积的性质

i $\vec{a} \cdot \vec{e} = |\vec{a}|\cos\langle \vec{a}, \vec{e} \rangle$.

ii 若 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为非零向量, 则 $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$\text{iii } \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = |\vec{a}|^2; \text{ 或 } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\vec{a}^2}.$$

$$\text{iv 若 } \vec{a}, \vec{b} \text{ 为非零向量, 则 } \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

$$\text{v } |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \text{ (当且仅当 } \vec{a}, \vec{b} \text{ 共线时等号成立).}$$

8. 空间向量基本定理

(1) **定理:** 如果三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 不共面, 那么对任意一个空间向量 $\vec{p}$, 存在唯一的有序实数组 (x, y, z) , 使得 $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

(2) 基底与基向量

如果三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 不共面, 那么所有空间向量组成的集合就是 $\{\vec{p} | \vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}, x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

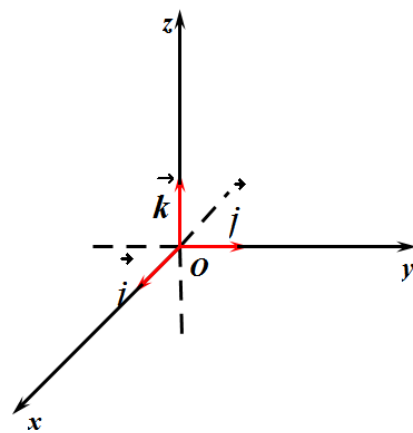
这个集合可看作向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 生成的, 我们把 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 叫做空间的一个基底, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 都叫做基向量. 空间任意三个不共面的向量都可以构成空间的一个基底.

(3) **单位正交基底:** 特别地, 如果空间的一个基底中的三个基向量两两垂直, 且长度都为 1, 那么这个基底叫做单位正交基底, 常用 $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ 表示.

(4) **正交分解:** 由空间向量基本定理可知, 对空间中的任意向量 $\vec{a}$, 均可以分解为三个向量 $x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$, 使 $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. 像这样, 把一个空间向量分解为三个两两垂直的向量, 叫做把空间向量进行正交分解.

9. 空间直角坐标系

(1) **空间直角坐标系:** 如图, 在空间选定一点 O 和一个单位正交基底 $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, 以点 O 为原点, 分别以 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 的方向为正方向, 以它们的长为单位长度建立三条数轴: x 轴、 y 轴、 z 轴, 它们都叫做坐标轴. 这时我们就建立了一个空间平面直角坐标系 $Oxyz$, O 叫做原点, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 都叫做坐标向量, 通过每两个坐标轴的平面叫做坐标平面, 分别称为 Oxy 平面, Oyz 平面, Ozx 平面, 它们把空间分成八个部分.



(2) 空间向量的坐标

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 为坐标向量, 对空间任意一点 A , 对应一个向量 $\vec{OA}$, 且点 A 的位置由向量 $\vec{OA}$ 唯一确定, 由空间向量基本定理, 存在唯一的有序实数组 (x, y, z) , 使 $\vec{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

在单位正交基底 $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ 下与向量 $\vec{OA}$ 对应的有序实数组 (x, y, z) , 叫做点 A 在空间直角坐标系中的坐标, 记作 $A(x, y, z)$, 其中 x 叫做点 A 的横坐标, y 叫做点 A 的纵坐标, z 叫做点 A 的竖坐标.

(3) 空间向量的坐标运算

设 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

①加法: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$;

②减法: $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$;

③数乘: $\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

④数量积: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$;

⑤共线: 当 $\vec{b} \neq 0$ 时, $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}_1 = \lambda \vec{b}_1, \vec{a}_2 = \lambda \vec{b}_2, \vec{a}_3 = \lambda \vec{b}_3$;

⑥垂直: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$;

⑦向量长度: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$;

⑧向量夹角: $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$.

(4) 空间两点间的距离公式

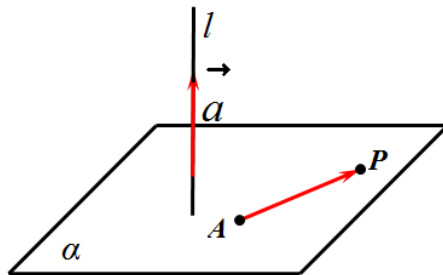
设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $O(0,0,0)$ 则 $\overrightarrow{P_1 P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

于是 $P_1 P_2 = |\overrightarrow{P_1 P_2}| = \sqrt{\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \overrightarrow{P_1 P_2}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

10. 空间向量的应用

(1) 平面的法向量

①定义: 如图, 直线 $l \perp \alpha$. 取直线 l 的方向向量 $\vec{a}$, 我们称向量 $\vec{a}$ 为平面 α 的法向量. 给定一个点 A 和一个向量 $\vec{a}$, 那么过点 A , 且以向量 $\vec{a}$ 为法向量的平面完全确定, 可以表示为集合 $\{P | \vec{a} \cdot \overrightarrow{AP} = 0\}$.



②求平面法向量的方法:

i 直接找: 结合几何体给出的有向线段, 证明线面垂直即可.

ii 待定系数法.

具体步骤：

第一步：设平面的一个法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$ ；

第二步：选取不共线的两个向量 $\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AC}$ ；

第三步：根据法向量的定义建立方程组
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases},$$

第四步：解方程组，取其中一个解，得到平面的一个法向量.

(2) 空间线面位置关系的判定

设空间两条直线 l_1, l_2 的方向向量分别为 $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, 两个平面 α_1, α_2 的法向量分别为 $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1), \vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, 则

位置关系	向量表示	向量运算	坐标运算
$l_1 \perp l_2$	$\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$	$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$	$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$
$l_1 \perp \alpha_1$	$\vec{v}_1 // \vec{n}_1$	$\vec{n}_1 = k\vec{v}_1$	$a_1 = kx_1, b_1 = ky_1, c_1 = kz_1, k$ 为非零常数
$\alpha_1 \perp \alpha_2$	$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$	$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$	$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$
$l_1 // l_2$	$\vec{v}_1 // \vec{v}_2$	$\vec{v}_2 = k\vec{v}_1$	$x_2 = kx_1, y_2 = ky_1, z_2 = kz_1, k$ 为非零常数
$l_1 // \alpha_1$	$\vec{v}_1 \perp \vec{n}_1$	$\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0$	$x_1a_1 + y_1b_1 + z_1c_1 = 0$
$\alpha_1 // \alpha_2$	$\vec{n}_1 // \vec{n}_2$	$\vec{n}_2 = k\vec{n}_1$	$a_2 = ka_1, b_2 = kb_1, c_2 = kc_1, k$ 为非零常数

(3) 向量与距离

① 点到直线的距离

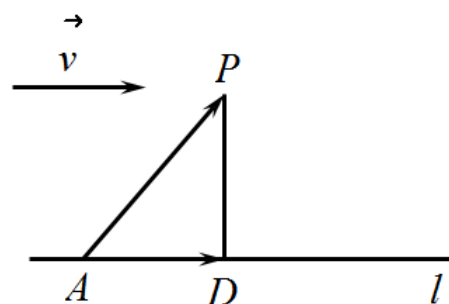
如图, 直线 l 的方向向量为 $\vec{v}$, 点 P 为直线 l 外一点, 过点 P 作直线 l 的垂线交直线 l 于点 D , 则 $|\overrightarrow{PD}|$ 即为点 P 到直线 l 的距离.

设 A 为直线 l 上任意一点, 则 $\overrightarrow{AD}$ 是 $\overrightarrow{AP}$ 在直线 l 上的投影向量, 其

$$\text{投影长 } |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AP}| \cos \angle PAD = |\overrightarrow{AP}| \cdot \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v}|}{|\overrightarrow{AP}| |\vec{v}|} = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|}.$$

所以, 点 P 到直线 l 的距离:

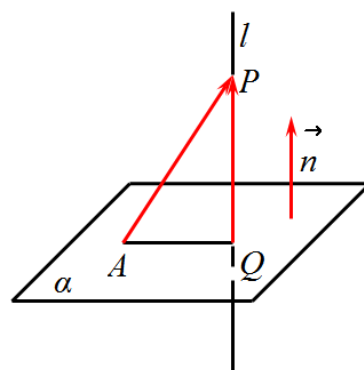
$$d = |\overrightarrow{PD}| = \sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2 - |\overrightarrow{AD}|^2} = \sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2 - \left(\frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|} \right)^2}$$



② 点到平面的距离

如图, $\vec{n}$ 为平面 α 的一个法向量, AP 为平面 α 的一条斜线段 (点 A 在平面 α 内), 则点 P 到平面 α 的距离就是 $\overrightarrow{AP}$ 在直线 l 上的投影向量

$$\overrightarrow{QP} \text{ 的长度: } PQ = |\overrightarrow{AP}| \cdot \cos \langle \overrightarrow{AP}, \vec{n} \rangle = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}.$$



(4) 向量与夹角

① 直线与直线的夹角

设两条异面直线 l_1 和 l_2 所成的角为 θ $\left(\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, 其方向向量分别为 $\vec{u}$, $\vec{v}$, 则

$$\cos \theta = |\cos \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|}.$$

② 直线与平面所成的角

设直线 l 和平面 α 所成的角为 θ $\left(\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$, 直线 l 方向向量为 $\vec{u}$, 平面 α 的法向量为 $\vec{n}$, 则

$$\sin \theta = |\cos \langle \vec{u}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|}.$$

③ 平面与平面所成的角

平面 α 与平面 β 相交, 形成四个二面角, 我们把四个二面角中不大于 90° 的二面角称为平面 α 与平面 β 的夹角.

设平面 α 与平面 β 的夹角为 θ , 其法向量分别为 $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, 则

$$\cos \theta = |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}.$$

第二章 直线和圆的方程

1、倾斜角与斜率

(1) 倾斜角：直线向上方向与x轴正方向所成的最小正角，范围 $[0, \pi)$

(2) 斜率：倾斜角的正切值记为直线的斜率

2、直线方程

点斜式	$y - y_1 = k(x - x_1)$
斜截式	$y = kx + b$
两点式	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
截距式	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
一般式	$Ax + By + C = 0$

3、两直线的平行与垂直

(1)、若 $l_1: y = k_1x + b_1$, $l_2: y = k_2x + b_2$, 则

➤ $l_1 \parallel l_2$: $k_1 = k_2, b_1 \neq b_2$

➤ $l_1 \perp l_2$: $k_1 k_2 = -1$

(2)、若 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$, 且 A_1, A_2, B_1, B_2 都不为零, 则

➤ $l_1 \parallel l_2$: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$

➤ $l_1 \perp l_2$: $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$

4、直角坐标公式

(1) 两点间距离: $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

(2) 点到直线距离: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

(3) 两平行线间的距离公式: $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

(4) 两直线夹角公式: $\tan \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right|$

(5) 中点坐标公式: $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$

5、圆

(1) 圆的定义: 平面上一动点P(x,y)到一定点A(a,b)的距离是常数r的动点轨迹为圆

(2) 圆的方程:

标准方程	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
一般方程	$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 (D^2 + E^2 - 4F > 0)$
直径式方程	$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

(3) 点 (x_0, y_0) 与圆 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 的位置关系

➤ 代数法: 若 $d = \sqrt{(a - x_0)^2 + (b - y_0)^2}$, 则在圆内 $d < r$, 在圆上 $d = r$, 在圆外 $d > r$

➤ 向量法: 取直径端点为A,B: 则在圆内 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} < 0$, 在圆上 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$, 在圆外 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} > 0$

(4) 直线和圆的位置关系

➤ 几何法: 通过比较圆心O到直线l的距离d判断位置关系的方法

➤ 代数法：通过联立圆方程和直线方程得到一元二次方程, 用其判别式判断位置关系的方法。

(5) 圆与圆的位置关系 (d 表示圆心距, R, r 表示两圆半径, 且 $R > r$)

➤ 相离: $d > R + r$

➤ 外切: $d = R + r$

➤ 相交: $R - r < d < R + r$

➤ 内切: $d = R - r$

➤ 内含: $0 < d < R - r$

(6) 圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 在圆上点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的切线方程为 $x_0x + y_0y = r^2$

(7) 圆系方程

➤ 过圆与圆交点的圆系方程: $x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + \lambda(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0$ ($\lambda \neq -1$)

➤ 圆与圆公共弦方程: $x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 - (x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0$

➤ 过圆与直线交点的圆系方程: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F + \lambda(Ax + By + C) = 0$

(8) 圆的方程的求法: 待定系数法、几何法、圆系法

第三章 圆锥曲线的方程

第一部分 椭圆

1、椭圆的定义：

平面内一个动点 P 到两个定点 F_1, F_2 的距离之和等于常数 ($|PF_1| + |PF_2| = 2a > |F_1F_2|$)，这个动点 P 的轨迹叫做椭圆. 这两个定点叫做椭圆的焦点，两焦点的距离叫做椭圆的焦距.

注意：若 $|PF_1| + |PF_2| = |F_1F_2|$ ，则动点 P 的轨迹为线段 F_1F_2 ；

若 $|PF_1| + |PF_2| < |F_1F_2|$ ，则动点 P 的轨迹无图形.

2、椭圆的标准方程：

焦点在 x 轴上时 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a^2 = b^2 + c^2$) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases}$ (参数方程，其中 φ 为参数)，

焦点在 y 轴上时 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)。

3、方程说明：

(1) a, b, c 的关系： a 最大，且 $a^2 = c^2 + b^2$ ；

(2) 判断方程：看 x^2, y^2 项的分母大小，哪个分母大，焦点就在哪个坐标轴上(“谁大在谁轴”)

(3) 椭圆方程的统一形式： $mx^2 + ny^2 = 1$ ($m > 0, n > 0, m \neq n$)

(4) 周长问题：已知经过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点 F_2 作直线 AB ，交椭圆于 A, B 两点， F_1 是椭圆的左

焦点，则 $\triangle ABF_1$ 的周长为 $4a$

4、椭圆的几何性质：(以 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 为例)：

(1) 范围： $-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b$ ；椭圆落在 $x = \pm a, y = \pm b$ 组成的矩形中

(2) 对称性：两条对称轴 $x = 0, y = 0$ ，一个对称中心 $(0, 0)$ ，

① 若把曲线方程中的 x 换成 $-x$ ，方程不变，则曲线关于 y 轴对称；

② 若把曲线方程中的 y 换成 $-y$ ，方程不变，则曲线关于 x 轴对称；

③ 若把曲线方程中的 x, y 同时换成 $-x, -y$ ，方程不变，则曲线关于原点对称。

(3) 顶点：椭圆与它的对称轴的交点叫顶点，

四个顶点 $A_1(-a, 0)$ $A_2(a, 0)$ $B_1(0, -b)$ $B_2(0, b)$

长轴： A_1A_2 ($|A_1A_2| = 2a$) 长半轴长： a

短轴： B_1B_2 ($|B_1B_2| = 2b$) 短半轴长： b

焦点：两个焦点 $(\pm c, 0)$ ；焦距 $2c$

性质：(1) 椭圆上到原点距离最近的点为短轴端点，最远点为长轴端点

(2) 过原点的弦中，最长为长轴，最短为短轴

(3) 做椭圆的平行弦，弦长最长的为过原点；

(4) 椭圆上到焦点的距离最近点、最远点分别为长轴两个端点；

(4) 离心率：我们把椭圆的焦距与长轴长的比 $\frac{c}{a}$ 称为椭圆的离心率，用 e 表示。

$e = \frac{c}{a}$ ，椭圆 $\Leftrightarrow 0 < e < 1$ ， e 越小，椭圆越圆； e 越大，椭圆越扁。

5、点与椭圆的位置关系：

①点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆外 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} > 1$;

②点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆上 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$;

③点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆内 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} < 1$

6. 直线与圆锥曲线的位置关系：

(1) 相交： $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 直线与椭圆相交；

(2) 相切： $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 直线与椭圆相切；

(3) 相离： $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 直线与椭圆相离；

7、焦点三角形：椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ， P 为椭圆上除长轴端点外的任一点， F_1, F_2 为椭圆的两个焦点

点组成 $\triangle F_1PF_2$ ， $\triangle F_1PF_2$ 叫焦点三角形；

①若 $\angle F_1PF_2 = \theta$ ，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 $b^2 \cdot \tan \frac{\theta}{2}$

② $F_1P \cdot F_2P = \frac{2b^2}{1 + \cos \theta}$

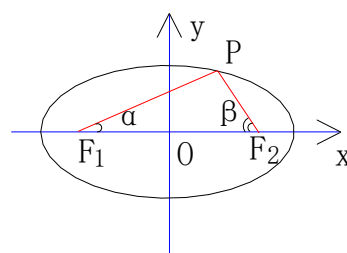
③周长为 $2a + 2c$

④ $\angle F_1PF_2$ 的最大值为 P 在短轴端点处，

⑤判断椭圆上一点 P ，使 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ 的点 P 的个数： B 为短轴端点

$\angle F_1BF_2 = 90^\circ$ 有 2 个； $\angle F_1BF_2 > 90^\circ$ 有 4 个； $\angle F_1BF_2 < 90^\circ$ 有 0 个

⑥若 $\angle PF_1F_2 = \alpha$ ， $\angle PF_2F_1 = \beta$ ，则离心率 $e = \frac{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$ ；



8、弦长公式：若直线 $y = kx + b$ 与圆锥曲线相交于两点 A, B ，且 x_1, x_2 分别为 A, B 的横坐标，则 $|AB| =$

$\sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2|$ ，若 y_1, y_2 分别为 A, B 的纵坐标，则 $|AB| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} |y_1 - y_2|$ ，若弦 AB 所在

直线方程设为 $x = ky + b$ ，则 $|AB| = \sqrt{1 + k^2} |y_1 - y_2|$ 。

9、圆锥曲线的中点弦问题：遇到中点弦问题常用“韦达定理”或“点差法”求解。

在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 中，以 $M(x_0, y_0)$ 为中点的弦 AB 所在直线

(1) $K_{AB} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$ ；

$$(2) k_{OM} \cdot k_{AB} = -\frac{b^2}{a^2}$$

$$(3) \text{中点弦 AB 的方程是 } \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}.$$

10、共焦点的椭圆标准方程

$$\text{共焦点, 则 } c \text{ 相同。与椭圆 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) \text{ 共焦点的椭圆方程可设为 } \frac{x^2}{a^2 + m} + \frac{y^2}{b^2 + m} = 1$$

$$(m > -b^2),$$

11、通径：过椭圆焦点与长轴垂直的直线截椭圆弦长叫通径。 $|AB| = \frac{2b^2}{a}$

12、椭圆的第二定义：

(1)、定义：动点到定点的距离与它到一条定直线的距离的比是一个 $(0,1)$ 内常数 e ，那么这个点的轨

迹叫做椭圆。其中定点叫做椭圆的焦点，定直线叫做椭圆的准线，常数 e 就是椭圆的离心率。

注意：① 定点必在定直线外 ② 比值必小于 1 ③ 符合此定义必为椭圆，但不一定是标准方程；

(2)、椭圆的准线方程

对应关系：焦点——准线

$$\textcircled{1} \text{ 对于 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ 左焦点 } F_1(-c,0) \text{ 对应着左准线 } l_1: x = -\frac{a^2}{c};$$

$$\text{右焦点 } F_2(c,0) \text{ 对应着右准线 } l_2: x = \frac{a^2}{c}.$$

$$\textcircled{2} \text{ 对于 } \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1, \text{ 下焦点 } F_1(0,-c) \text{ 对应着下准线 } l_1: y = -\frac{a^2}{c};$$

$$\text{上焦点 } F_2(0,c) \text{ 对应着上准线 } l_2: y = \frac{a^2}{c}.$$

(3) 准线方程的特征：

椭圆的准线方程有两条，这两条准线在椭圆外部，与短轴平行，且关于短轴对称。

$$\text{准线的位置关系：} |x| \leq a < \frac{a^2}{c}; \text{ 两准线间距离：} \frac{2a^2}{c}$$

$$\text{焦距 (焦参数)：焦点到准线的距离 } p = \frac{a^2}{c} - c = \frac{a^2 - c^2}{c} = \frac{b^2}{c}$$

(3)、椭圆的焦半径公式：

① $M(x_0, y_0)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一点, r_1 和 r_2 分别是点 M 与点 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$

的距离. 那么 (左焦半径) $r_1 = a + ex_0$, (右焦半径) $r_2 = a - ex_0$,

注意: 焦半径公式的两种形式的区别只和焦点的左右有关, 而与点在左在右无关.

② 同理有焦点在 y 轴上的椭圆的焦半径公式:
$$\begin{cases} |MF_1| = a + ey_0 \\ |MF_2| = a - ey_0 \end{cases}$$

(其中 F_1F_2 分别是椭圆的下上焦点)

第二部分 双曲线

1、双曲线的定义: 平面内到两定点 F_1, F_2 的距离的差的绝对值为常数 (小于 $|F_1F_2|$) 的动点的轨迹叫双曲

线. 即 $||MF_1| - |MF_2|| = 2a$, 这两个定点叫做双曲线的焦点, 两焦点间的距离叫做焦距.

注意两点:

(1) 距离之差的绝对值.

(2) $2a < |F_1F_2|$, 这两点与椭圆的定义有本质的不同.

当 $|MF_1| - |MF_2| = 2a$ 时, 曲线仅表示焦点 F_2 所对应的一支;

当 $|MF_1| - |MF_2| = -2a$ 时, 曲线仅表示焦点 F_1 所对应的一支;

当 $2a = |F_1F_2|$ 时, 轨迹是一直线上以 F_1, F_2 为端点向外的两条射线;

当 $2a > |F_1F_2|$ 时, 动点轨迹不存在.

2. 双曲线的标准方程

焦点在 x 轴上时: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 焦点是 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$,

焦点在 y 轴上时: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, 焦点是 $F_1(0, -c), F_2(0, c)$

3. 标准方程说明

(1) a, b, c 的关系: c 最大, 且 $c^2 = a^2 + b^2$;

(2) 焦点判定: 看正负——谁正在谁轴;

(3) 双曲线方程一般式: $Ax^2 - By^2 = 1, AB > 0$;

(4) 周长问题: 已知 F_1, F_2 为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左右焦点, A, B 在右支上, 线段 AB 过右焦点 F_2 , $|AB| = m$,

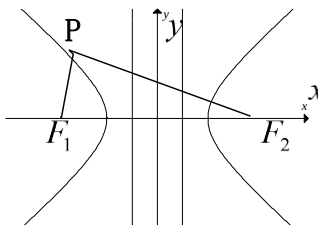
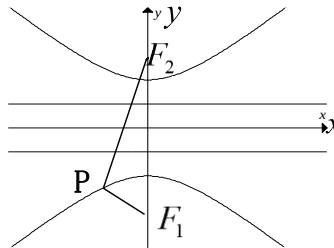
则 $\triangle ABF_1$ 的周长为 $4a + 2m$

4、曲线的内外部

(1) 点 $P(x_0, y_0)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的内部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} > 1$.

(2) 点 $P(x_0, y_0)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的外部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} < 1$.

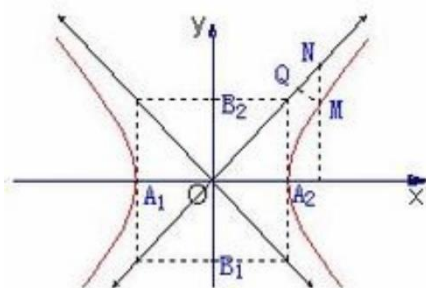
5、基本性质

双曲线	标准方程（焦点在 x 轴） $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$	标准方程（焦点在 y 轴） $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$
定义	定义：平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离的差的绝对值是常数（小于 F_1F_2）的点的轨迹叫双曲线。这两个定点叫做双曲线的焦点，两焦点的距离叫焦距。 $\{M \mid MF_1 - MF_2 = 2a\}$ ($2a < F_1F_2$)  	
范围	$ x \geq a, y \in R$	$ y \geq a, x \in R$
对称轴	x 轴, y 轴; 实轴长为 $2a$, 虚轴长为 $2b$	
对称中心	原点 $O(0, 0)$	
焦点坐标	$F_1(-c, 0) \quad F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c) \quad F_2(0, c)$
	焦点在实轴上, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; 焦距: $ F_1F_2 = 2c$	
顶点坐标	$(-a, 0) \quad (a, 0)$	$(0, -a) \quad (0, a)$

离心率	$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}, (e > 1) \quad \text{其中} \quad \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1} = \sqrt{e^2 - 1}$ ①当 $e \in (1, +\infty)$ 时, $\frac{c}{a} \in (0, +\infty)$, 且 e 增大, $\frac{b}{a}$ 也增大。e 增大时, 渐近线与实轴的夹角增大 (斜率)。 ②e 表示双曲线开口大小的一个量, e 越大, 开口越大。 同离心率的双曲线系 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 同离心率的双曲线系为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda \quad (\lambda > 0)$ 或 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = \lambda \quad (\lambda > 0)$	
渐近线方程	$y = \pm \frac{b}{a} x$	$y = \pm \frac{a}{b} x$
共渐近线 的双曲线 系方程	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = k \quad (k \neq 0)$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = k \quad (k \neq 0)$
直线和双 曲线的位置 置	双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与直线 $y = kx + b$ 的位置关系: 利用 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx + b \end{cases}$ 转化为一元二次方程用判别式确定。 二次方程二次项系数为零直线与渐近线平行。 相交弦 AB 的弦长 $AB = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$	

6、等轴双曲线

- (1) 半实轴长=半虚轴长 (一般而言是 $a=b$, 但有些地区教材版本不同, 不一定用的是 a, b 这两个字母);
- (2) 其标准方程为 $x^2 - y^2 = C$, 其中 $C \neq 0$;
- (3) 离心率 $e = \sqrt{2}$;
- (4) 渐近线: 两条渐近线 $y = \pm x$ 互相垂直;



7、在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 中，以 $M(x_0, y_0)$ 为中点的弦 AB 所在直线

$$(1) K_{AB} = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0};$$

$$(2) K_{OM} \cdot K_{AB} = \frac{b^2}{a^2}$$

$$(3) \text{中点弦的方程是 } \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}.$$

8、焦点三角形

已知 F_1 、 F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两个焦点，点 P 在双曲线上，设

$$\angle F_1 P F_2 = \theta, \angle P F_1 F_2 = \alpha, \angle F_1 F_2 P = \beta$$

$$\text{性质: (1) } |PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{2b^2}{1 - \cos \theta}$$

$$(2) \Delta F_1 P F_2 \text{ 的面积为 } S = b^2 \cdot \cot \frac{\theta}{2} = c |y_P| \text{ 由此可顺便求 P 点坐标。 } |y| = \frac{b^2}{c} \cot \frac{\theta}{2}$$

$$(3) \text{ 若 } \angle P F_1 F_2 = \alpha, \angle P F_2 F_1 = \beta, \text{ 则离心率 } e = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{|\sin \alpha - \sin \beta|} = \frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\left| \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right|};$$

$$(4) \angle F_1 P F_2 \text{ 的角分线是 P 处切线; } \Delta F_1 P F_2 \text{ 的内切圆与实轴切于顶点。}$$

9、双曲线的第二定义：到定点 F 的距离与到定直线 l 的距离之比为常数 $e = \frac{c}{a} (c > a > 0)$ 的点的轨迹是双曲线。其中，定点叫做双曲线的焦点，定直线叫做双曲线的准线。常数 e 是双曲线的离心率。

10、准线方程：

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 中, 左焦点 } F_1(-c, 0) \text{ 对应着左准线 } l_1: x = -\frac{a^2}{c}, \text{ 右焦点 } F_2(c, 0) \text{ 对应着右准线 } l_2: x = \frac{a^2}{c};$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ 中, 下焦点 } F_1(0, -c) \text{ 对应着下准线 } l_1: y = -\frac{a^2}{c}; \text{ 上焦点 } F_2(0, c) \text{ 对应着上准线 } l_2: y = \frac{a^2}{c}$$

11、双曲线的焦半径：双曲线上任意一点 M 与双曲线焦点 F_1, F_2 的连线段，叫做双曲线的焦半径。

焦点在 x 轴上的双曲线的焦半径公式： $\therefore \begin{cases} |MF_1| = |a + ex_0| \\ |MF_2| = |a - ex_0| \end{cases}$ F_1, F_2 是双曲线的左右焦点

焦点在 y 轴上的双曲线的焦半径公式： $\therefore \begin{cases} |MF_1| = |a + ey_0| \\ |MF_2| = |a - ey_0| \end{cases}$ F_1, F_2 是双曲线的下上焦点

12、焦点弦：

定义：过焦点的直线割双曲线所成的相交弦。焦点弦公式：可以通过两次焦半径公式得到：

设两交点 $A(x_1, y_1)B(x_2, y_2)$

当双曲线焦点在 x 轴上时，焦点弦只和两焦点的横坐标有关：

过左焦点与左支交于两点时： $|AB| = -2a - e(x_1 + x_2)$ 。

过右焦点与右支交于两点时： $|AB| = -2a + e(x_1 + x_2)$ 。

当双曲线焦点在 y 轴上时，焦点弦只和两焦点的纵坐标有关：

过下焦点与下支交于两点时： $|AB| = -2a - e(y_1 + y_2)$ 。

过上焦点与上支交于两点时： $|AB| = -2a + e(y_1 + y_2)$ 。

13、通径：过焦点且垂直于对称轴的相交弦。 $d = \frac{2b^2}{a}$

14、焦准距（也叫焦参数）位置： $|x| \geq a > \frac{a^2}{c} > 0$ 。焦点到准线的距离 $p = \frac{b^2}{c}$ 。

15、共轭双曲线：以已知双曲线实轴为虚轴，虚轴为实轴，这样的双曲线称为原双曲线的共轭双曲线

$$\text{如 } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \text{ 与 } \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1.$$

注意的区别：三量 a, b, c 中 a, b 不同（互换）c 相同。

通过分析曲线发现二者其具有相同的渐近线。此即为共轭之意。

① 性质：共用一对渐近线。双曲线和它的共轭双曲线的焦点在同一圆上。

② 确定双曲线的共轭双曲线的方法：将 1 变为 -1。

16、2b：双曲线的焦点到渐近线的距离为 b；

过双曲线顶点 A 的切线与渐近线相交点 M，所得线段 AM 的大小恰好就是 b。

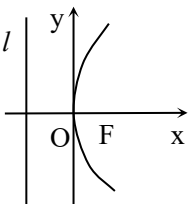
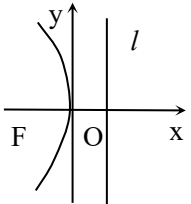
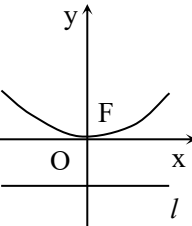
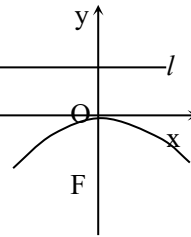
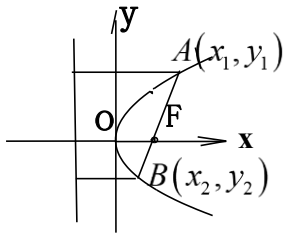
17、第三定义：与两个定点的斜率之积为常数的点的轨迹；

性质：双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，过原点任意作直线与双曲线交于两点 A、B，双曲线上任意一点 C，

$$\text{则 } k_{AC} \cdot k_{BC} = \frac{b^2}{a^2};$$

第三部分 抛物线

1、基础知识

抛 物 线	$y^2 = 2px$ ($p > 0$) 	$y^2 = -2px$ ($p > 0$) 	$x^2 = 2py$ ($p > 0$) 	$x^2 = -2py$ ($p > 0$) 
定义	平面内与一个定点 F 和一条定直线 l 的距离相等的点的轨迹叫做抛物线，点 F 叫做抛物线的焦点，直线 l 叫做抛物线的准线。 $\{M \mid MF = \text{点 } M \text{ 到直线 } l \text{ 的距离}\}$			
范围	$x \geq 0, y \in R$	$x \leq 0, y \in R$	$x \in R, y \geq 0$	$x \in R, y \leq 0$
对称性	关于 x 轴对称		关于 y 轴对称	
焦点	$(\frac{p}{2}, 0)$	$(-\frac{p}{2}, 0)$	$(0, \frac{p}{2})$	$(0, -\frac{p}{2})$
	焦点在对称轴上			
顶点	$O(0, 0)$			
离心率	$e = 1$			
准线 方程	$x = -\frac{p}{2}$	$x = \frac{p}{2}$	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
	准线与焦点位于顶点两侧且到顶点的距离相等。			
顶点到准线的距离	$\frac{p}{2}$			
焦点到准线的距离	p			
焦半径 $A(x_1, y_1)$	$AF = x_1 + \frac{p}{2}$	$AF = -x_1 + \frac{p}{2}$	$AF = y_1 + \frac{p}{2}$	$AF = -y_1 + \frac{p}{2}$
焦 点 弦 长 $ AB $	$(x_1 + x_2) + p$	$-(x_1 + x_2) + p$	$(y_1 + y_2) + p$	$-(y_1 + y_2) + p$
焦点弦 $ AB $ 的几条性质 $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$				

	以 AB 为直径的圆必与准线 l 相切			
	若 AB 的倾斜角为 α , 则 $ AB = \frac{2p}{\sin^2 \alpha}$		若 AB 的倾斜角为 α , 则 $ AB = \frac{2p}{\cos^2 \alpha}$	
	$x_1x_2 = \frac{p^2}{4} \qquad y_1y_2 = -p^2$			
	$\frac{1}{AF} + \frac{1}{BF} = \frac{AF + BF}{AF \bullet BF} = \frac{AB}{AF \bullet BF} = \frac{2}{p}$			
切线 方程	$y_0y = p(x + x_0)$	$y_0y = -p(x + x_0)$	$x_0x = p(y + y_0)$	$x_0x = -p(y + y_0)$

2、通径：通过抛物线的焦点 F 作垂直于 x 轴的直线，交抛物线于 A 、 B 两点，线段 AB 叫做抛物线的通径。
 $|AB| = 2p$

3、直线与抛物线的位置关系

直线 $l: y = kx + b$ ，抛物线 $C: y^2 = 2px$ ，由 $\begin{cases} y = kx + b \\ y^2 = 2px \end{cases}$ ，消 y 得： $k^2 x^2 + 2(kb - p)x + b^2 = 0$

- (1) 当 $k=0$ 时，直线 l 与抛物线的对称轴平行，有一个交点；
- (2) 当 $k \neq 0$ 时， $\Delta > 0$ ，直线 l 与抛物线相交，两个不同交点；
 $\Delta = 0$ ，直线 l 与抛物线相切，一个切点；
 $\Delta < 0$ ，直线 l 与抛物线相离，无公共点。
- (3) 若直线与抛物线只有一个公共点，则直线与抛物线必相切吗？（不一定）

4、在抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 中，以 $P(x_0, y_0)$ 为中点的弦所在直线的斜率

(1) $K_{AB} = \frac{p}{y_0}$;

(2) $K_{OM} \cdot K_{AB} = \frac{p}{x_0}$

(3) 中点弦的方程是 $yy_0 - 2p \frac{x+x_0}{2} = y_0^2 - 2px_0$.

【选择性必修二】

第四章 数列

4.1 数列的概念

1. 数列：按照一定顺序排列着的一列数称为数列.

(1) 项：数列中的每一个数叫做这个数列的项.

(2) 首项：数列中的每一项都和它的序号有关，排在第一位的数称为这个数列的第 1 项（通常也叫做首项）.

(3) 记法：排在第 n 位的数称为这个数列的第 n 项. 所以，数列的一般形式可以写成 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$. 简记为 $\{a_n\}$. ($\{ \}$ 此时表示数列，而不是集合)

2. 数列的分类

(1) 按照数列的项数分：

①有穷数列：项数有限的数列

②无穷数列：项数无限的数列

(2) 按照数列的变化趋势分：

①递增数列：从第 2 项起，每一项都大于它的前一项的数列.

②递减数列：从第 2 项起，每一项都小于它的前一项的数列.

③常数列：各项都相等的数列.

④摆动数列：从第 2 项起，有些项大于它的前一项，有些项小于它的前一项的数列.

3. 数列与数集：数列是按照一定顺序排列的一列数. 数集则是无序的.

4. 通项公式

(1) 数列可以看成以正整数集 N^* （或它的有限子集 $\{1, 2, \dots, n\}$ ）为定义域的函数 $a_n = f(n)$ ，当自变量按照从小到大的顺序依次取值时，所对应的一列函数值. 反过来，对于函数 $y = f(x)$ ，如果 $f(i) (i=1, 2, 3, \dots)$ 有意义，那么我们可以得到一个数列 $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$ 数列是特殊的函数（离散函数）

(2) 如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项与序号 n 之间的关系可以用一个式子来表示，那么这个公式叫做这个数列的通项公式.

5. 递推法：如果已知数列 $\{a_n\}$ 的首项（或前几项），且任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1} （或前几项）间的关系可用一个公式来表示，那么这个公式叫做数列的递推公式. 用递推公式给出数列的方法叫做递推法.

6. 数列的表示方法：图像、列表、公式、递推公式

4.2 等差数列

1. 等差数列的定义

一般地, 如果一个数列从第 2 项起, 每一项与它的前一项的差都等于同一个常数, 那么这个数列就叫做等差数列, 这个常数叫做等差数列的公差, 公差通常用字母 d 表示.

2. 等差中项

a, A, b 成等差数列 $\Leftrightarrow A$ 是 a, b 的等差中项 $\Leftrightarrow 2A = \underline{a + b}$.

3. 等差数列的通项公式

以 a_1 为首项, d 为公差的等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \underline{a_1 + (n-1)d}$.

4. 等差数列的前 n 项和公式

首项为 a_1 , 公差为 d , 末项为 a_n , 项数为 n 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \underline{na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}}$.

5. 等差数列的性质

数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, 则:

$$(1) \underline{a_n = a_m + (n-m)d} \quad (n, m \in N^*), \quad d = \underline{\frac{a_n - a_m}{n - m}} \quad (n \neq m).$$

$$(2) \text{若 } m+n = p+q, \text{ 则 } \underline{a_m + a_n = a_p + a_q} \quad (m, n, p, q \in N^*).$$

特别地, ①若 $m+n = 2p$, 则 $\underline{a_m + a_n = 2a_p}$ ($m, n, p \in N^*$);

②有穷等差数列中, 与首末两项等“距离”的两项之和都相等, 都等于首末两项的和, 即

$$\underline{a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = a_i + a_{n+1-i} = \cdots}$$

(3) 下标成等差数列的项 $a_k, a_{k+m}, a_{k+2m}, \cdots$ 组成以 $\underline{md}$ 为公差的等差数列.

(4) 数列 $\{ta_n + \lambda\}$ (t, λ 是常数) 是公差为 $\underline{td}$ 的等差数列.

(5) 若数列 $\{b_n\}$ 为等差数列, 则数列 $\{ta_n \pm \lambda b_n\}$ (t, λ 是常数) 仍为等差数列.

6. 等差数列前 n 项和的性质

$$(1) \text{项数的“等和”性质: } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \underline{\frac{n(a_m + a_{n+1-m})}{2}}.$$

$$(2) \text{若等差数列共有 } 2n-1 \text{ 项, 则 } \underline{S_{2n-1} = (2n-1)a_n};$$

$$\text{若等差数列共有 } 2n \text{ 项, 则 } \underline{S_{2n} = n(a_n + a_{n+1})}.$$

(3)与项数有关的“奇偶”性质($S_{\text{奇}}$, $S_{\text{偶}}$ 分别表示所有奇数项的和与所有偶数项的和):

①若等差数列的项数为 $2n$, 则 $S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} = \underline{nd}$, $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$;

②若等差数列的项数为 $2n-1$, 则 $S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} = \underline{a_n}$, $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{n}{n+1}$ ($S_{\text{奇}} = \underline{na_n}$, $S_{\text{偶}} = \underline{(n-1)a_n}$).

(4)已知等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n , T_n , 则 $\frac{a_n}{b_n} = \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$, $\frac{a_n}{b_n} = \frac{2n-1}{2m-1} \cdot \frac{S_{2m-1}}{T_{2m-1}}$.

(5)“片段和”性质: 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 公差为 d , 前 k 项的和为 S_k , 则 S_k , $S_{2k} - S_k$, $S_{3k} - S_{2k}$, $\dots$, $S_{mk} - S_{(m-1)k}$, $\dots$ 构成公差为 $\underline{k^2d}$ 的等差数列.

(6)数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列, 首项为 a_1 , 公差为等差数列 $\{a_n\}$ 公差的一半.

7. 等差数列的判断方法

(1)定义法: $a_{n+1} - a_n = \underline{d}$ (常数) ($n \in N^*$) $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等差数列; $a_n - a_{n-1} = d$ (常数) ($n \geq 2$, $n \in N^*$) $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等差数列.

(2)等差中项法: $2a_{n+1} = \underline{a_n + a_{n+2}}$ ($n \in N^*$) $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等差数列.

(3)通项公式法: $a_n = \underline{kn+b}$ (k, b 为常数) $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等差数列.

(4)前 n 项和法: $S_n = \underline{An^2 + Bn}$ (A, B 为常数) $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等差数列.

4.3 等比数列

1. 等比数列的概念

一般地, 如果一个数列从第2项起, 每一项与它的前一项的比都等于同一个常数, 那么这个数列叫做等比数列, 这个常数叫做等比数列的公比, 公比通常用字母 q 表示(显然 $q \neq 0$).

2. 等比中项

a, G, b 成等比数列 $\Leftrightarrow G$ 是 a, b 的等比中项 $\Leftrightarrow G^2 = \underline{ab}$ ($ab \neq 0$).

3. 等比数列的通项公式

设等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公比为 q , 则这个等比数列的通项公式是 $a_n = \underline{a_1 q^{n-1}}$ (a_1 , $q \neq 0$).

4. 等比数列的前 n 项和公式

设等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公比为 q , 则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式为 $S_n = \begin{cases} na_1, q=1 \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q}, q \neq 1. \end{cases}$

5. 等比数列的性质

若数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 则

$$(1) a_n = a_m \underline{q^{n-m}} \quad (m, n \in N^*).$$

$$(2) \text{若 } m+n = p+q, \quad m, n, p, q \in N^*, \text{ 则 } a_m a_n = \underline{a_p a_q}.$$

特别地: ①若 $m+n=2r$, 则 $a_m a_n = \underline{a_r^2}$ ($m, n, r \in N^*$);

$$\textcircled{2} a_1 a_n = a_2 a_{n-1} = \cdots = a_i a_{n+1-i} \quad (n \in N^*, \quad n \geq 2, \quad i=1, 2, 3, \cdots, n).$$

$$(3) \text{若 } m, n, p \quad (m, n, p \in N^*) \text{ 成等差数列, 则 } \underline{a_m, a_n, a_p} \text{ 成等比数列.}$$

$$(4) \text{数列 } \{\lambda a_n\} \quad (\lambda \neq 0) \text{ 仍是公比为 } \underline{q} \text{ 的等比数列;}$$

数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是公比为 $\underline{\frac{1}{q}}$ 的等比数列;

数列 $\{|a_n|\}$ 是公比为 $\underline{|q|}$ 的等比数列;

若数列 $\{b_n\}$ 是公比为 q' 的等比数列, 则数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 是公比为 $\underline{q \cdot q'}$ 的等比数列.

(5) 在数列 $\{a_n\}$ 中, 每隔 k ($k \in N^*$)项取出一项, 按原来的顺序排列, 所得数列仍为等比数列, 且公比为 $\underline{q^{k+1}}$.

(6) 已知 $b > 0$ 且 $b \neq 1$, 如果数列 $\{a_n\}$ 是以 d 为公差的等差数列, 那么数列 $\{ba_n\}$ 是以 b^d 为公比的等比数列.

如果数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正且公比为 q 的等比数列, 那么数列 $\{\log_b a_n\}$ 是以 $\log_b q$ 为公差的等差数列.

6. 等比数列前项和的性质

$$(1) \text{当 } q=1 \text{ 时, } \frac{S_n}{S_m} = \underline{\frac{n}{m}}; \text{ 当 } q \neq \pm 1 \text{ 时, } \frac{S_n}{S_m} = \underline{\frac{1-q^n}{1-q^m}}.$$

$$(2) S_{n+m} = S_m + \underline{q^m S_n} = S_n + \underline{q^n S_m}.$$

$$(3) \text{设 } S_{\text{偶}} \text{ 与 } S_{\text{奇}} \text{ 分别是偶数项的和与奇数项的和. 若项数为 } 2n, \text{ 则 } \frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = \underline{q}; \text{ 若项数为 } 2n+1, \text{ 则 } \frac{S_{\text{奇}} - a_1}{S_{\text{偶}}} = \underline{q}.$$

$$\frac{S_{\text{奇}} - a_1}{S_{\text{偶}}} = \underline{q}.$$

$$(4) \text{当 } q \neq -1 \text{ 时, 连续 } m \text{ 项的和 (如 } S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}, \cdots) \text{ 仍组成等比数列, 比为 } q^m, m \geq 2).$$

7. 等比数列的判断方法

(1) 定义法: 如果数列 $\{a_n\}$ 满足关系式 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ ($q \neq 0$) ($n \in N^*$), 那么数列就是一个以 q 为公比的等比数列.

(2) 等比中项法: 如果数列 $\{a_n\}$ 满足关系式 $a_n^2 = \underline{a_{n-1}a_{n+1}}$ ($n \geq 2, n \in N^*, n \neq 0$), 那么数列 $\{a_n\}$ 就是一个等比数列.

(3) 通项公式法: 如果数列 $\{a_n\}$ 满足关系式 $a_n = k \cdot q^{n-1}$ ($k \neq 0, q \neq 0, n \in N^*$), 那么该数列 $\{a_n\}$ 是以 k 为首项, 以 q 为公比的等比数列.

(4) 前 n 项和法: 如果数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = Aq^n - A$ ($A \neq 0, q \neq 0$), 那么数列 $\{a_n\}$ 是一个等比数列.

4.4 求数列 $\{a_n\}$ 通项公式的方法

(1) 公式法: 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则 $a_n = a_1 + (n-1)d$;

若 $\{a_n\}$ 为等比数列, 则 $a_n = a_1 q^{n-1}$.

(2) 累加法: $a_{n+1} - a_n = f(n)$ ($f(n)$ 可求和) 型.

(3) 累积法: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n)$ ($f(n)$ 可求积) 型.

(4) 构造法: 即构造等差数列或等比数列求通项.

$$\textcircled{1} a_{n+1} = pa_n + q: a_{n+1} + x = p(a_n + x)$$

$$\textcircled{2} a_{n+1} = pa_n + q^n: a_{n+1} + xq^{n+1} = p(a_n + xq^n)$$

$$\textcircled{3} a_{n+1} = pa_n + qn + r: a_{n+1} + x(n+1) + y = p(a_n + xn + y)$$

4.5 数列求和的方法

(1) 裂项相消法: 常见的裂项类型与方法如下:

$$\textcircled{1} a_n = \frac{1}{n(n+t)} = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t} \right) \quad (t \neq 0);$$

$$\textcircled{2} a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}};$$

$$\textcircled{3} a_n = \log_a \frac{n+1}{n} = \log_a (n+1) - \log_a n;$$

$$\textcircled{4} a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right);$$

$$\textcircled{5} a_n = \frac{2^n}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} = \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1}.$$

(2) 错位相减法

设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 公差为 d ; 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 公比为 q ($q \neq 1$); 数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项和为 T_n . 则 T_n 的求解步骤如下.

①列出和式 $T_n = \underline{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n}.$

②两边同乘以公比 q : $qT_n = \underline{a_1b_1q + a_2b_2q + a_3b_3q + \cdots + a_nb_nq = a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_4 + \cdots + a_nb_{n+1}}.$

③两式相减(错位相减)并求和:

$$(1-q)T_n = a_1b_1 + (a_2b_2 - a_1b_2) + (a_3b_3 - a_2b_3) + \cdots + (a_nb_n - a_{n-1}b_n) - a_nb_{n+1}$$

$$= a_1b_1 + (a_2 - a_1)b_2 + (a_3 - a_2)b_3 + \cdots + (a_n - a_{n-1})b_n - a_nb_{n+1}$$

$$= a_1b_1 + d(b_2 + b_3 + \cdots + b_n) - a_nb_{n+1}$$

$$= \underline{a_1b_1 + d \times \frac{b_2(1-q^{n-1})}{1-q} - a_nb_{n+1}}.$$

④两边同除以 $(1-q)$ 即得数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

(3) 分组求和法

分组求和法适用于解决数列通项公式可以写成 $c_n = a_n + b_n$ 的形式的数列求和问题, 其中数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是等差数列或等比数列或可以直接求和的数列. 基本的解题步骤为:

①准确拆分, 根据通项公式的特征, 将其分解为可以直接求和的一些数列的和;

②分组求和, 分别求出各个数列的和;

③得出结论, 对拆分后每个数列的和进行求和, 解决原数列的求和问题.

第五章 一元函数的导数及其应用

1. 导数

(1)平均变化率:

我们把比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 叫做函数 $y = f(x)$ 从 x_0 到 $x_0 + \Delta x$ 的平均变化率.

(2)导数 (瞬时变化率):

如果当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 无限趋近于一个确定的值, 即 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 有极限, 则称 $y = f(x)$ 在

$x = x_0$ 处可导, 并把这个确定的值叫做 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数 (也称为瞬时变化率), 记作

$$f'(x) \text{ 或 } y'|_{x=x_0}, \text{ 即 } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

(3)导数的几何意义:

函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数就是曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率 k , 即

$$k = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

(4)常见函数的导数公式:

原函数	导函数
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

(5)导数的四则运算法则:

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, (g(x) \neq 0)$$

(6)复合函数的导数:

一般地, 对于由函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 复合而成的函数 $y = f(g(x))$, 它的导数与函数

$y = f(u)$, $u = g(x)$ 的导数间的关系为 $y'_x = y'_u \cdot u'_x$;

(7)导数的应用:

①利用导数求切线

注意: i. 所给点是切点吗? ii. 所求的是“在”还是“过”该点的切线?

A.求以曲线上的点 $(x_0, f(x_0))$ （已知 x_0 为具体值）为切点的切线方程:

i.求出函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$;

ii.求切线的斜率 $f'(x_0)$;

iii.写出切线方程 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ ，并化简.

B.求过某点 (a, b) 的切线方程:

i.设切点坐标 $P(x_0, y_0)$;

ii.建立斜率方程 $f'(x_0) = \frac{y_0 - b}{x_0 - a}$ 求出 x_0 ;

iii.求出斜率，代入并求得切线方程.

②利用导数判断函数单调性:

i. $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 是增函数;

ii. $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ 为减函数;

iii. $f'(x) \equiv 0 \Rightarrow f(x)$ 为常数.

③利用导数求极值:

i.求函数的定义域;

ii.求函数的导数 $f'(x)$;

iii.令 $f'(x)=0$ ，求出全部的根;

iv.列表;

v.判断得结论.

④利用导数最大值与最小值:

i.求函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 内的极值;

ii.将函数 $y = f(x)$ 的各极值与端点处的函数值 $f(a)$ ， $f(b)$ 比较，其中最大的一个是最大值，最小的一个是最小值.

【选择性必修三】

第六章 计数原理

6.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

1.分类加法计数原理：完成一件事有两类不同方案，在第1类方案中有 m 种不同的方法，在第2类方案中有 n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N = m + n$ 种不同的方法。

注意：两类不同方案中的方法互不相同

推广形式：

完成一件事有 k 类不同方案，在第1类方案中有 m_1 种不同的方法，在第2类方案中有 m_2 种不同的方法， $\dots$ ，

第 k 类方案有 m_k 那么完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_k$ 种不同的方法。

2.分步乘法计数原理：完成一件事需要两个步骤，做第1步有 m 种不同的方法；做第2步有 n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N = m \times n$ 种不同的方法。

注意：无论第1步采用哪种方法，与之对应的第2步都有相同的方法数。

推广形式：

完成一件事需要 k 个步骤，做第一步有 m_1 种不同的方法，做第2步有 m_2 种不同的方法， $\dots$ ，做第 k 步有

m_k 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N = m_1 \times m_2 \times m_3 \times \dots \times m_k$ 种不同的方法。

3. 两者辨析：分类加法计数原理每一类方案是独立存在的，通过任何一个方案都可以完成这件事，类似于“物理电路中的并联”；而分步乘法计数原理则是每一步骤是互相关联的，缺一不可，只有完成了所有的步骤，才可以完成这件事，类似于“物理电路中的串联”。但是每一步骤无论采取何种方法，下一步的方法数都是一样的。如果不一样，则不能直接用乘法原理。

4. 特殊题型

(1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ， $B = \{1, 2, 3\}$ ，则从集合 A 到集合 B 的函数共有多少种？

解析：从集合 A 到集合 B 的函数：则集合 A 的任何一个元素都要选择集合 B 的一个元素，所以 A 中每一个元素都有 3 种选择，共为 3^4 种函数。

(2) 2160 有多少个不同的正因数？

解析： $2160 = 2^4 \times 3^3 \times 5^1$ ，每一个因数都是由 2, 3, 5 构成的，所以只需要看每一个因数里面 2, 3, 5 的个数即可。所以正因数共有 $(4+1) \times (3+1) \times (2+1) = 60$ 个。

6.2 排列与组合

1.排列：一般地，从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素，并按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列。

2.全排列：特别地，我们把 n 个不同的元素全部取出的一个排列，叫做 n 个元素的一个全排列。

3.排列数：从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素的所有不同排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 A_n^m 表示。

$$4. \text{排列数公式: } A_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!} (m, n \in \mathbb{N}^*) \text{ 且 } m \leq n$$

5.阶乘：正整数 1 到 n 的连乘积，叫做 n 的阶乘，用 $n!$ 表示，特别地， $0!=1$

$$A_n^n = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1}{1} = n!$$

常用性质： $A_n^m = n A_{n-1}^{m-1}$

5.组合：一般地，从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素作为一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合。

6.组合数：从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素的所有不同组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，用符号 C_n^m 表示。

$$7. \text{组合数公式: } C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} (n, m \in \mathbb{N}^*, \text{ 且 } m \leq n)$$

规定： $C_n^0 = 1$

$$8. \text{常用性质: } C_n^m = C_n^{n-m} \quad C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m \quad C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_n^m \cdot C_m^k$$

6.3 二项式定理

$$1. \text{二项式定理: } (a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n, n \in \mathbb{N}^*$$

右边的多项式叫做 $(a+b)^n$ 的二项展开式，其中各项的系数 C_n^k ($k=0,1,2,\cdots,n$) 叫做二项式系数。式中的

$C_n^k a^{n-k} b^k$ 叫做二项展开式的通项，用 T_{k+1} 表示，即为展开式中的第 $k+1$ 项。

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k。$$

2. 二项式系数的性质

(1) 对称性：与首末两端“等距离”的两个二项式系数相等。由 $C_n^m = C_n^{n-m}$ 得到。

(2) 增减性与最大值： $k < \frac{n+1}{2}$ 时， C_n^k 随 k 的增大而增大；由对称性知，当 $k > \frac{n+1}{2}$ 时， C_n^k 随 k 的增大而减小。当 n 是偶数时，中间的一项 $C_n^{\frac{n}{2}}$ 取得最大值；当 n 是奇数时，中间的两项 $C_n^{\frac{n}{2}-1}$ 与 $C_n^{\frac{n}{2}+1}$ 相等，同时达到最大值。

(3) 二项式系数和： $(a+b)^n$ 的各二项式系数和 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$

特别地，奇数项二项式系数的和等于偶数项二项式系数的和

$$\text{即: } C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = \underline{C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots} = \underline{2^{n-1}}$$

(4) 一般地，求二项展开式的所有项系数之和，常采用赋值法，只需令 $x = \underline{1}$ 即可。

3. 特殊题型

(1) 在 $(1-x)^5 + (1-x)^6 + (1-x)^7 + (1-x)^8$ 的展开式中，含 x^3 项的系数为多少？

解析：将此看成等比数列，则 $(1-x)^5 + (1-x)^6 + (1-x)^7 + (1-x)^8 = \frac{(1-x)^5 - (1-x)^9}{x}$

则含 x^3 项的系数即为分子含 x^4 项的系数： $C_5^4 - C_9^4 = -121$

(2) 用二项式定理证明 $55^{55} + 9$ 能被 8 整除。（提示： $55^{55} + 9 = (56-1)^{55} + 9$ ）

解析： $55^{55} + 9 = (56-1)^{55} + 9 = (-1)^{55} + 9 + \sum_{i=1}^{55} C_{55}^i \times 56^i \times (-1)^{55-i}$

$$= 8 + \sum_{i=1}^{55} C_{55}^i \times 8^i \times 7^i (-1)^{55-i}$$

$$= 8 \times (1 + \sum_{i=1}^{55} C_{55}^i \times 8^{i-1} \times 7^i (-1)^{55-i})$$

所以能被 8 整除

第七章 随机变量及其分布

7.1 条件概率与全概率公式

一、条件概率

1. **条件概率**：一般地，设 A, B 为两个事件，且 $P(A) > 0$ ，称 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率，简称条件概率。其中， $P(B|A)$ 读作 A 发生的条件下 B 发生的概率。

性质：设 $P(A) > 0$ ，则

①任何事件的条件概率都在 0 和 1 之间，即 $0 \leq P(B|A) \leq 1$ ，且 $P(\Omega|A) = 1$

②如果 B 和 C 是两个互斥事件，则 $P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A)$

③设 $\bar{B}$ 与 B 互为对立事件，则 $P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A)$

2. 条件概率求法公式： $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{n(AB)}{n(A)}$

3. 乘法公式： $P(AB) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$

4. 若事件 A 与事件 B 相互独立，则 $P(B|A) = P(B)$

二、全概率公式

1. **全概率公式**：一般地，设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是一组两两互斥的事件， $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ ，且

$P(A_i) > 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$ ，则对任意的事件 $B \subseteq \Omega$ ，有 $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$

我们称上面的公式为全概率公式，全概率公式是概率论中最基本的公式之一。

2. **贝叶斯公式**：设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是一组两两互斥的事件， $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ ，且 $P(A_i) > 0$ ，

$i = 1, 2, 3, \dots, n$ ，则对任意的事件 $B \subseteq \Omega, P(B) > 0$ 有

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

7.2 离散型随机变量及其分布列

一、离散型随机变量

1. **随机变量**：一般地, 对于随机试验样本空间 Ω 中的每个样本点 ω , 都有唯一的实数 $X(\omega)$ 与之对应, 我们称 X 为随机变量. 随机变量常用 $X, Y, Z, \xi, \eta, \dots$ 表示.

2. **离散型随机变量**：可能取值为有限个或可以一一列举的随机变量, 我们称之为离散型随机变量. 通常用大写英文字母表示随机变量, 例如 X, Y, Z ; 用小写英文字母表示随机变量的取值, 例如 x, y, z .

二、离散型随机变量的分布列

1. **概率分布列**：一般地, 设离散型随机变量 X 的可能取值为 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, 我们称 X 取每一个值 x_i 的概率:

$$P(X = x_i) = p_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

为 X 的概率分布列, 简称分布列.

2. 几点说明:

(1) 表示方法:

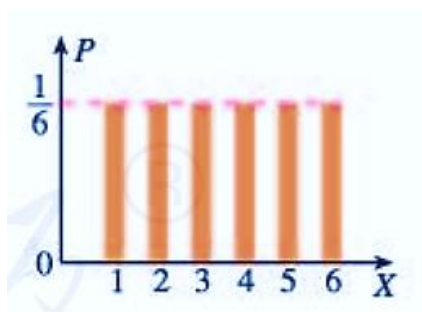
①**表格法** (分布列):

离散型随机变量 X 的概率分布列: (简称 X 的分布列)

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

②**解析式法**: $P(X = x_i) = p_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$

③**图像法** (条形统计图): 如: 掷骰子试验中掷出的点数 X 的分布列:



(2) 性质:

①离散型随机变量在某一范围内取值的概率等于它取这个范围内各个值的概率之和.

② $p_i \geq 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$, 且 $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

3. 两点分布

(1) **两点分布**: 若随机变量 X 的分布列具有下表的形式, 则称 X 服从两点分布, 并称 $p = P(X = 1)$

为成功概率.

X	0	1
P	$1-p$	p

(2) 性质:

①一般地, 在只有两个结果的随机试验中, 用 0 表示事件不成功, 1 表示事件成功, 即随机变量的取值只有 0 和 1 两个, 故又称为 0-1 分布.

②两点分布应用广泛, 如抽取的彩票是否中奖.

③试验结果只有两个可能性, 且其概率之和为 1.

7.3 离散型随机变量的数字特征

一、离散型随机变量的均值

1. 离散型随机变量的均值:

一般地, 若离散型随机变量 X 的分布列为

X	x_1	x_2	$\cdots$		x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$		p_n

则称: $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + p x_{22} + \cdots + x_n p_n$ 为随机变量 X 的均值或数学期望. 它反映了离散型随机变

量取值的平均水平.

2. 一般地, 设分布列: $P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, 3, \cdots, n$, 根据随机变量的定义, 有如下结论:

(1) $E(X + b) = E(X) + b$

(2) $E(aX) = aE(X)$

(3) $E(aX + b) = aE(X) + b$; 其中 a, b 是常数 (X 是随机变量)

二、离散型随机变量的方差

1. 离散型随机变量的方差:

设离散型随机变量 X 的分布列为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

考虑 X 所有可能取值 x_i 与 $E(X)$ 的偏差平方 $(x_i - E(X))^2 (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$, 我们用偏差平方关于取值概

率的加权平均, 来度量随机变量 X 取值与其均值 $E(X)$ 的偏离程度. 我们称

$$D(X) = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + \cdots + (x_n - E(X))^2 p_n = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i$$

为随机变量 X 的方差 (variance). 有时也记为 $\text{Var}(X)$, 并称 $\sqrt{D(X)}$ 为随机变量 X 的标准差 (standard deviation), 记为 $\sigma(X)$.

2. **方差 (标准差) 的意义:** 随机变量的方差和标准差都可以度量随机变量取值与其均值的偏离程度, 反映了随机变量取值的离散程度. 方差或标准差越小, 随机变量的取值越集中; 方差或标准差越大, 随机变量的取值越分散.

3. 在方差的计算中, 利用下面的结论经常可以使计算简化.

$$\begin{aligned} D(X) &= \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2E(X)x_i + (E(X))^2) p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - 2E(X) \sum_{i=1}^n x_i p_i + (E(X))^2 \sum_{i=1}^n p_i \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - (E(X))^2 \end{aligned}$$

4. (1) $D(X+b) = D(X)$. 即离散型随机变量 X 加上一个常数 b , 仅仅使 X 的值产生一个平移, 不改变 X 与其均值的离散程度, 方差保持不变

(2) $D(aX) = a^2 D(X)$. 即离散型随机变量 X 乘以一个常数 a , 其方差变为原方差的 a^2 倍

(3) 一般地, 可以证明结论成立: $D(aX+b) = a^2 D(X)$.

7.4 二项分布与超几何分布

一、二项分布

1. **伯努利试验:** 我们把只包含两个可能结果的试验叫做伯努利试验.

2. **n 重伯努利试验:** 我们将一个伯努利试验独立地重复进行 n 次所组成的随机实验成为 n 重伯努利试验.

3. n 重伯努利试验具有如下共同特征:

- (1) 同一个伯努利试验重复做 n 次;
- (2) 各次试验的结果相互独立.

4. **二项分布:** 一般地, 在 n 重伯努利试验中, 设每次实验中事件 A 发生的概率为 p ($0 < p < 1$), 用 X 表示事件 A 发生的次数, 则 X 的分布列为

$$P(X=k) = \underline{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}, k=0,1,2,\dots,n.$$

如果随机变量 X 的分布列具有上式的形式，则称随机变量 X 服从二项分布，记作 $X \sim \underline{B(n, p)}$

由二项式定理，容易得到 $\sum_{k=0}^n P(X=k) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \underline{[p + (1-p)]^n} = 1$

5. 几点性质：

(1) 若 X 服从两点分布，则 $E(X) = p$ ， $\underline{D(X) = p(1-p)}$

(2) 若 $X \sim B(n, p)$ ，则 $\underline{E(X) = np}$ ， $\underline{D(X) = np(1-p)}$

(3) 概率最大值：

记 $p_k = P(X=k)$ ，下面，我们利用分布列的表达式来研究 p_k 的增减变化及最大值。

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}{C_n^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}} = \frac{(n-k+1)p}{k(1-p)} = \frac{k(1-p) + (n+1)p - k}{k(1-p)} = 1 + \frac{(n+1)p - k}{k(1-p)}.$$

当 $k < (n+1)p$ 时， $p_k > p_{k-1}$ ， p_k 随 k 值的增加而增加；

当 $k > (n+1)p$ 时， $p_k < p_{k-1}$ ， p_k 随 k 值的增加而减小。

如果 $(n+1)p$ 为正整数，当 $k = \underline{(n+1)p}$ 时， $p_k = p_{k-1}$ ，此时这两项概率均为最大值。如果 $(n+1)p$ 非正整数，

而 k 取 $(n+1)p$ 的整数部分，则 p_k 是唯一的最大值，

二、超几何分布

1. **超几何分布**：一般地，假设一批产品共有 N 件，其中有 M 件次品，从 N 件产品中随机抽取 n 件（不放回），用 X 表示抽取的 n 件产品中的次品数，则 X 的分布列为

$$P(X=k) = \frac{\underline{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}}{\underline{C_N^n}}, k=m, m+1, m+2, \dots, r.$$

其中 $n, N, M \in N^*, M \leq N, n \leq N, m = \max\{0, n - N + M\}, r = \min\{n, M\}$

如果随机变量 X 的分布列具有上式的形式，那么称随机变量 X 服从超几何分布。

比如， $X=0,1,2,\dots,n$ 的超几何分布列表如下：

X	0	1		m
-----	---	---	--	-----

p	$\frac{C_M^0 C_{N-M}^{n-0}}{C_N^n}$	$\frac{C_M^1 C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	$\dots$	$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$
-----	-------------------------------------	-------------------------------------	---------	-------------------------------------

2. **超几何分布的期望**: 设随机变量 X 服从超几何分布, 则 X 可以解释为从包含 M 件次品的 N 件产品中, 不放回地随机抽取 n 件产品中的次品数. 令 $p = \frac{M}{N}$, 则 p 是 N 件产品的次品率, 而 $\frac{X}{n}$ 是抽取的 n 件产品的次品率, 我们猜想 $E\left(\frac{X}{n}\right) = p$, 即 $E(X) = np$.

实际上, 由随机变量均值的定义, 令 $m = \max\{0, n - N + M\}, r = \min\{n, M\}$, 有

$$E(X) = \sum_{k=m}^r k \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = M \sum_{k=m}^r \frac{C_{M-1}^{k-1} C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

因为 $\sum_{k=m}^r C_{M-1}^{k-1} C_{N-M}^{n-k} = C_{N-1}^{n-1}$, 所以

$$E(X) = \frac{M}{C_N^n} \sum_{k=m}^r C_{M-1}^{k-1} C_{N-M}^{n-k} = \frac{M C_{N-1}^{n-1}}{C_N^n} = \frac{nM}{N} = np.$$

3. 特点:

- ①超几何分布描述了由有限个物体中抽取 n 个物件, 成功抽出指定种类的物件的次数.
- ②抽取过程是不放回的.

4. 超几何分布与二项分布:

背景: 已知一批产品共有 N 件, 其中有 M 件次品, 从 N 件产品中随机抽取 n 件, 用 X 表示抽取的 n 件产品中的次品数, 求 X 的分布列.

(1) 有放回模型: $X \sim B(n, p)$, $p = \frac{M}{N}$. 且 $E(X) = np$

(2) 不放回模型: X 服从超几何分布, 且 $E(X) = np$

结论: 二项分布和超几何分布都可以描述随机抽取的 n 件产品中次品数 X 的分布规律, 并且二者的均值相同. 对于不放回抽样, 当 n 远远小于 N 时, 每抽取一次后, 对 N 的影响很小, 此时, 超几何分布可以用二项分布近似.

7.5 正态分布

1. **连续型随机变量**: 现实中, 除了前面已经研究过的离散型随机变量外, 还有大量问题中的随机变量不是离散型的, 它们的取值往往充满某个区间甚至整个实轴, 但取一点的概率为 0, 我们称这类随机变量为连

续型随机变量.

2. 正态曲线: 已知 $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in R$ 其中实数 $\mu \in R$, $\sigma > 0$ 为参数.

显然, 对任意的 $x \in R$, $f(x) > 0$, 它的图像在 x 轴的上方, 可以证明 x 轴和曲线之间的区域的面积为 1, 我们称 $f(x)$ 为正态密度函数, 称它的图像为正态分布密度曲线, 简称正态曲线.

3. 正态曲线的特点:

由 x 的密度函数及图象可以发现, 正态曲线还有以下特点:

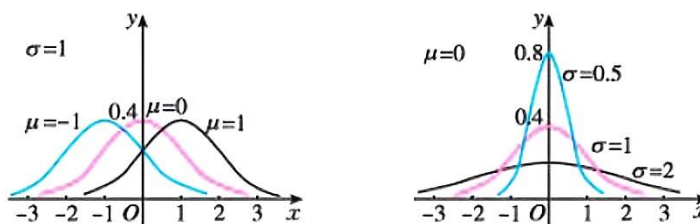
(1) 曲线是单峰的, 它关于直线 $x = \mu$ 对称;

(2) 曲线在 $x = \mu$ 处达到峰值 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;

(3) 当 $|x|$ 无限增大时, 曲线无限接近 x 轴.

4. 正态分布: 若随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$, 则称随机变量 X 服从正态分布, 记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 特别地, 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 称随机变量 X 服从标准正态分布.

5. 参数 μ 和 σ 对正态曲线形状的影响:

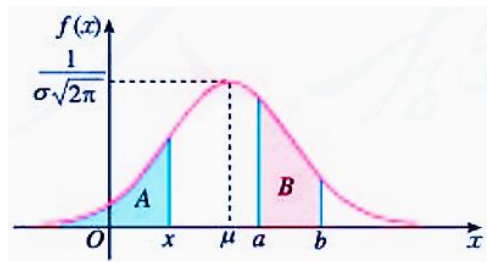


(1) 当 σ 固定时, 正态曲线的位置由 μ 确定, 且图像随 μ 的变化而沿 x 轴平移, 因此, 称 μ 为位置参数.

(2) 当 μ 固定时, 正态曲线的形状由 σ 确定, 峰值 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ 与 σ 成反比, σ 越小, 曲线越“瘦高”, σ 越大, 曲线越“矮胖”, 因此, 称 σ 为形状参数.

6. 正态分布的期望与方差: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$

7. 概率的几何意义:



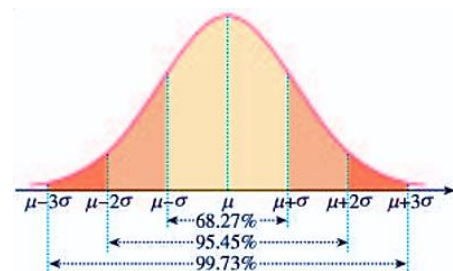
若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 如图所示, X 取值不超过 x 的概率 $P(X \leq x)$ 为图中区域 A 的面积, 而 $P(a \leq X \leq b)$ 为区域 B 的面积.

8. 正态总体在三个特殊区间内取值的概率:

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827,$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545,$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973.$$



9. 3σ 原则

由此看到, 尽管正态变量的取值范围是 $(-\infty, +\infty)$, 但在一次试验中, X 的取值几乎总是落在区间 $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ 内, 而在此区间以外取值的概率大约只有 0.0027, 通常认为这种情况几乎不可能发生.

在实际应用中, 通常认为服从于正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的随机变量 X 只取 $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ 中的值, 这在统计学中称为 3σ 原则.

第八章 成对数据的统计分布

8.1 成对数据的统计相关性

知识点一 相关关系

1. 相关关系的定义：两个变量有关系，但没有确切到可由其中一个去精确地决定另一个的程度，这种关系称为相关关系。

2. 相关关系的分类

(1)按变量间的增减性分为正相关和负相关。

①正相关：当一个变量的值增加时，另一个变量的相应值也呈现增加的趋势；

②负相关：当一个变量的值增加时，另一个变量的相应值呈现减少的趋势。

(2)按变量间是否有线性特征分为线性相关和非线性相关(曲线相关)。

①线性相关：如果两个变量的取值呈现正相关或负相关，而且散点落在一条直线附近，我们称这两个变量线性相关；

②非线性相关或曲线相关：如果两个变量具有相关性，但不是线性相关，我们称这两个变量非线性相关或曲线相关。

知识点二 相关关系的刻画

1. 散点图：为了直观描述成对样本数据的变化特征，把每对成对样本数据都用直角坐标系中的点表示出来，由这些点组成的统计图，叫做散点图。

2. 样本相关系数

(1)我们常用样本相关系数 r 来确切地反映成对样本数据 (x_i, y_i) 的相关程度，其中

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

(2)样本相关系数 r 的取值范围为 $[-1, 1]$ 。

①若 $r > 0$ 时，成对样本数据正相关；

②若 $r < 0$ 时，成对样本数据负相关；

③当 $|r|$ 越接近 1 时，成对样本数据的线性相关程度越强；

④当 $|r|$ 越接近 0 时，成对样本数据的线性相关程度越弱。

8.2 一元线性回归模型及其应用

知识点一 一元线性回归模型

称 $\begin{cases} Y = bx + a + e, \\ E(e) = 0, D(e) = \sigma^2 \end{cases}$ 为 Y 关于 x 的一元线性回归模型. 其中 Y 称为因变量或响应变量, x 称为自变量或解释变量, a 称为截距参数, b 称为斜率参数; e 是 Y 与 $bx+a$ 之间的随机误差, 如果 $e=0$, 那么 Y 与 x 之间的关系就可以用一元线性函数模型来描述.

知识点二 最小二乘法

将 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 称为 Y 关于 x 的经验回归方程, 也称经验回归函数或经验回归公式, 其图形称为经验回归直线, 这种求经验回归方程的方法叫做最小二乘法, 求得的 $\hat{b}$, $\hat{a}$ 叫做 b , a 的最小二乘估计, 其中

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

知识点三 残差与残差分析

1. 残差

对于响应变量 Y , 通过观测得到的数据称为观测值, 通过经验回归方程得到的 $\hat{y}$ 称为预测值, 观测值减去预测值称为残差.

2. 残差分析

残差是随机误差的估计结果, 通过对残差的分析可以判断模型刻画数据的效果, 以及判断原始数据中是否存在可疑数据等, 这方面工作称为残差分析.

知识点四 对模型刻画数据效果的分析

1. 残差图法

在残差图中, 如果残差比较均匀地集中在以横轴为对称轴的水平带状区域内, 则说明经验回归方程较好地刻画了两个变量的关系.

2. 残差平方和法

残差平方和 $\sum_{i=1}^n (v_i - y_i)^2$ 越小, 模型的拟合效果越好.

3. R^2 法

可以用 $R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$ 来比较两个模型的拟合效果, R^2 越大, 模型拟合效果越好, R^2 越小, 模型拟合效果越差.

8.3 列联表与独立性检验

知识点一 分类变量

为了表述方便，我们经常会使用一种特殊的随机变量，以区别不同的现象或性质，这类随机变量称为分类变量。分类变量的取值可以用实数表示。

知识点二 2×2 列联表

- 2×2 列联表给出了成对分类变量数据的交叉分类频数。
- 定义一对分类变量 X 和 Y ，我们整理数据如下表所示：

X	Y		合计
	$Y=0$	$Y=1$	
$X=0$	a	b	$a+b$
$X=1$	c	d	$c+d$
合计	$a+c$	$b+d$	$n=a+b+c+d$

像这种形式的数据统计表称为 2×2 列联表。

知识点三 独立性检验

- 定义：利用 χ^2 的取值推断分类变量 X 和 Y 是否独立的方法称为 χ^2 独立性检验，读作“卡方独立性检验”。简称独立性检验。

2.
$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n=a+b+c+d.$$

- 独立性检验解决实际问题的主要环节

- (1) 提出零假设 H_0 ： X 和 Y 相互独立，并给出在问题中的解释。
- (2) 根据抽样数据整理出 2×2 列联表，计算 χ^2 的值，并与临界值 x_α 比较。
- (3) 根据检验规则得出推断结论。
- (4) 在 X 和 Y 不独立的情况下，根据需要，通过比较相应的频率，分析 X 和 Y 间的影响规律。