

姓名：\_\_\_\_\_

学校：\_\_\_\_\_

分数：\_\_\_\_\_

绝密★启用前

## 2026 年 8 月公众号【浙江省高中数学】原创高三开学考

## 数学试卷

本试卷共 6 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、学校填写在试卷上。
2. 本试卷由公众号【浙江省高中数学】解析团队独家原创、审核，转载请标注来源微信公众号【浙江省高中数学】，如需将本公众号原创试卷用作开学考试，可联系微信：fengjielaoshi02 获取无水印 A3 版试卷。
3. 试卷的全解析及命题思路将于 2026 年 8 月 16 日发布在微信公众号【浙江省高中数学】。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x | x^2 - 3x \leq 4\}$ ， $B = \{x | |x - 2| \geq 1\}$ ，则  $A \cap B =$  ( )  
A.  $\mathbb{R}$                       B.  $(-\infty, 1] \cup [3, 4]$                       C.  $[-1, 1] \cup [3, 4]$                       D.  $[-1, 1] \cup [3, +\infty)$
2. 有一组样本数据 1, 2, 2, 2, 4, 4, 6，众数和 70 百分位数分别是 ( )  
A. 4, 4                      B. 2, 2                      C. 2, 6                      D. 2, 4
3. 已知直线  $a$  和平面  $\alpha$ ，则“ $a$  与  $\alpha$  内无数条直线平行”是“ $a \parallel \alpha$ ”的 ( )  
A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件                      D. 既不充分也不必要条件
4. 已知抛物线  $x^2 = 8y$  的焦点为  $F$ ，点  $A(n, 2)$  在抛物线上，则线段  $AF$  的长度为 ( )  
A. 3                      B. 4                      C. 5                      D. 6
5. 已知  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，满足  $5 \sin \theta (1 + \cos 2\theta) = 4 \sin 2\theta$ ，则  $\frac{\sin \theta - 1}{\cos \theta + 2} =$  ( )  
A.  $-\frac{1}{7}$                       B.  $\frac{1}{7}$                       C.  $\frac{4}{5}$                       D.  $-\frac{4}{5}$
6. 已知单位向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ ，且  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为  $\frac{\pi}{3}$ ，则当  $|\vec{c}| = \sqrt{3}$  时， $\vec{a} \cdot \vec{c}$  的取值范围为 ( )  
A.  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right]$                       B.  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$                       C.  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$                       D.  $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$

7. 用数字 0, 1, 2, 3（数字可重复）组成六位整数，求不含连续数字 1 的六位数共有（ ）个.

- A. 1707                      B. 2296                      C. 2459                      D. 2829

8. 定义在  $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  上的严格递增函数  $f(n)$  满足  $f(f(n)) = f(2n) + n^2$ ，则（ ）

- A.  $f(1) = 2$                       B.  $f(n) - n$  严格递增  
C.  $f(n) \geq (n+1)^2$                       D.  $f(n)$  一定不是多项式函数

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知  $\alpha \in (0, 2\pi)$ ，设点  $A(\sin \alpha, \cos \alpha)$  在椭圆  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  上，下面选项中正确的有（ ）

- A.  $\tan \alpha = 0$                       B. 点  $B(\cos \alpha, \sin \alpha)$  是椭圆的一个焦点  
C.  $\sin(\alpha - x)$  是奇函数                      D.  $\cos(\alpha - x)$  是奇函数

10. 已知  $O$  为坐标原点，点  $P$  是圆  $(x-1)^2 + y^2 = 4$  上任意一点， $Q$  是直线  $l: y = kx - k + 3$  上的定点，下面选项中正确的有（ ）

- A. 直线  $l$  所截弦长为  $2\sqrt{3}$  时， $k = \pm 2\sqrt{2}$   
B. 直线  $l$  与圆相离的充分必要条件是  $k^2 < \frac{5}{4}$   
C.  $\tan \angle OQP$  的最大值为  $\frac{16\sqrt{5}+3}{41}$   
D.  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$  的最大值为  $1+2\sqrt{10}$

11. 在边长为 2 的菱形  $ABCD$  中， $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$ ，将菱形  $ABCD$  沿对角线  $BD$  折成四面体  $A'BCD$ ，使得

$\angle A'BC = \frac{\pi}{2}$ ，则（ ）

- A.  $BD \perp A'C$   
B. 直线  $A'C$  与平面  $BCD$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$   
C. 点  $A'$  到平面  $BCD$  的距离为  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$   
D. 四面体  $A'BCD$  外接球的体积为  $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知虚数  $z \in \mathbb{C}$  且满足  $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$ ，则  $|z| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

13. 已知双曲线  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{13} = 1$  上点  $P$  到左焦点  $F'$  的距离为  $\frac{25}{2}$ ，则其到右焦点  $F$  的距离为\_\_\_\_\_.

14. 挂谷（Kakeya）猜想是几何测度论中的经典问题，中国数学家王虹与合作者成功证明了困扰数学界百年的三维挂谷猜想并获得 2026 年菲尔兹奖. 在二维情形下，我们简化其模型，注意到每一次平移和旋转图形（即一次“迭代”）都会去掉一部分“冗余面积”，记第  $n$  次迭代后剩余的冗余面积是  $a_n$ ，满足  $a_1 = 2\pi$ ，且对

任意正整数  $n$ ，有  $\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}} - \frac{2}{\sqrt{a_n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ，设第  $n$  次迭代中去掉的冗余面积为  $S_n = a_n - a_{n+1}$ ，则前 3 次迭代中

去掉的冗余面积之和是\_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分) 已知  $\triangle ABC$  为锐角三角形，角  $A, B, C$  所对的边分别是  $a, b, c$ ，且  $a^2 = bc + b^2$ .

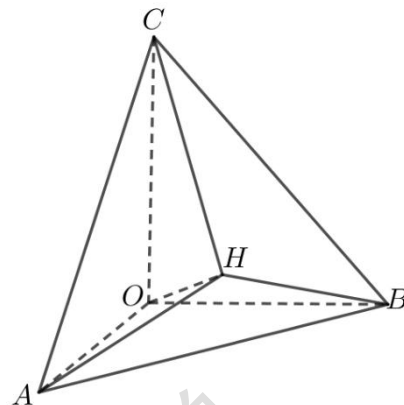
(1) 证明：  $A = 2B$ ；

(2) 求  $\frac{a+c}{b}$  的取值范围.

16. (本小题满分 15 分) 在三棱锥  $O-ABC$  中,  $OA$ 、 $OB$ 、 $OC$  两两垂直, 且  $OA=a$ ,  $OB=b$ ,  $OC=c$ , 点  $H$  为  $O$  在平面  $ABC$  的射影, 设  $OH=h$ .

(1) 求  $\frac{1}{h^2}$  的值 (用  $a$ ,  $b$ ,  $c$  表示);

(2) 若  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $c=3$ , 求二面角  $H-AO-B$  的平面角的余弦值.



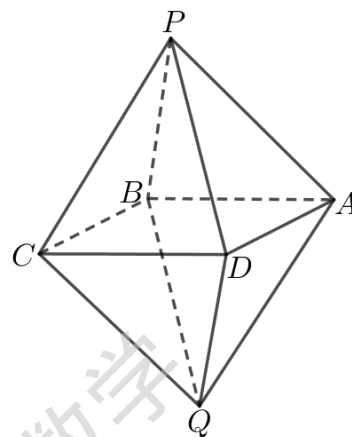
17.（本小题满分 15 分）如图，正八面体  $P-ABCD-Q$  上一只蚂蚁从顶点  $P$  出发，沿着棱爬行，每次等概率地爬行到相邻顶点中的一个. 记  $n$  次爬行后，落在点  $P, Q$  和底面顶点集合  $\{A, B, C, D\}$  的概率分别为

$p_n, q_n, r_n$ .

(1) 分别求出  $p_1, p_2, q_1, q_2$  的值；

(2) 求数列  $\{p_n\}$  的通项公式；

(3) 证明：当  $n > 1$  且为偶数时，落在  $P$  或  $Q$  的概率之和恒大于  $\frac{1}{3}$ .



18.（本小题满分 17 分）已知定义在  $(0, +\infty)$  上的  $f(x) = -x^t + tx + 1 - t (t \neq 0, t \in \mathbb{R})$  .

（1）讨论  $f(x)$  的单调性；

（2）设  $a > 0$  ,  $b > 0$  , 证明：  $a^b + b^a > 1$  ;

（3）证明：对任意正整数  $n$  , 均有  $\sum_{k=1}^n k^{\frac{1}{e^k}} < n+1 (k \in \mathbb{N}^*)$  .

微信公众号：浙江省高中数学

19. (本小题满分 17 分) 已知点  $B_1(-2,0), B_2(2,0)$  和圆  $G:(x-x_0)^2+y^2=r^2 (r>0)$ , 动点  $M$  满足直线  $MB_1$  和  $MB_2$  的斜率之积为  $-\frac{3}{4}$ , 动点  $M$  的轨迹为曲线  $\Gamma$ ,  $P, Q$  为曲线  $\Gamma$  上两点.

(1) 求曲线  $\Gamma$  的方程;

(2) 若  $x_0=0, r=1$ , 直线  $PQ$  与圆  $G$  相切, 求  $|PQ|$  的取值范围;

(3) 若  $x_0=1, 0<r<1$ , 点  $A(0,\sqrt{3})$ , 且  $AP, AQ$  都与圆  $G$  相切, 证明: 直线  $PQ$  过定点.

微信公众号：浙江省高中数学



扫码获取更多资料