

高三练习卷

数学参考答案与评分标准

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	D	A	D	C	B	B

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11
答案	AD	ABD	ABC

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 2 13. $\frac{2}{5}$ 14. $[1, e]$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

【解】(1) 因为 $a^2 > 3, a > 0, a \neq 1$ ，所以 $a > \sqrt{3}$ ，所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

$$\text{所以 } \begin{cases} 2x-2 < x \\ 2x-2 > 0 \\ x > 0 \end{cases}, \text{ 解之得 } 1 < x < 2, \text{ 所以解集为 } (1, 2). \quad \text{.....4 分}$$

(2) 因为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

$$\text{所以 } f(x)_{\max} = f(a^2) = 2, \quad f(x)_{\min} = f(3) = \log_a 3,$$

$$\text{即 } 2 - \log_a 3 = 1,$$

$$\text{所以 } a = 3. \quad \text{.....7 分}$$

$$\text{所以 } f(x) = \log_3 x,$$

$$\text{所以 } g(x) = f\left(\frac{x}{9}\right) \cdot f(3x) = \left[\log_3\left(\frac{x}{9}\right)\right] \left[\log_3(3x)\right] = (\log_3 x - \log_3 9)(\log_3 3 + \log_3 x),$$

.....9 分

$$\text{令 } \log_3 x = t, \text{ 因为 } x \in [1, 9], \text{ 所以 } t \in [0, 2],$$

$$\text{所以 } h(t) = (t-2)(1+t) = t^2 - t - 2 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4},$$

$$\text{所以 } h(t)_{\min} = h\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}, \quad h(t)_{\max} = h(2) = 0, \quad \cdots \cdots 11 \text{ 分}$$

$$\text{即 } \log_3 x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{3}, \quad \log_3 x = 2 \Rightarrow x = 9,$$

$$\text{所以当 } x = \sqrt{3} \text{ 时, 函数 } g(x) \text{ 有最小值 } -\frac{9}{4}, \text{ 当 } x = 9 \text{ 时, 函数 } g(x) \text{ 有最大值 } 0.$$

$\cdots \cdots 13 \text{ 分}$

注: 如果第一问分 $a > 1$ 和 $0 < a < 1$ 讨论求出 a 的值, 再解不等式, 要给相应求 a 的值的 3 分.

16. (15 分)

【解】(1) 证明: 因为 AA_1C_1C 为正方形,

所以 $AA_1 \parallel CC_1$, 又因为 $CC_1 \subset \text{平面 } C_1CB$, $AA_1 \not\subset \text{面 } C_1CB$,

所以 $AA_1 \parallel \text{平面 } C_1CB$,

又因为平面 $A_1AB \cap \text{平面 } C_1CB = l$, $AA_1 \subset \text{平面 } A_1AB$

所以 $l \parallel AA_1$. $\cdots \cdots 6 \text{ 分}$

$$(2) \text{ 设 } \triangle ABC \text{ 的边 } AC \text{ 上的高为 } 0 < h \leq 1, \text{ 则 } V_{C_1-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot CC_1 = \frac{2}{3} h,$$

当三棱锥 C_1-ABC 的体积最大时, $h=1$, 即 B 为 $\widehat{AC}$ 的中点.

法 1: 因为 B 为 $\widehat{AC}$ 的中点, 所以 $OB \perp OC$, 因为 $OO_1 \perp \text{面 } ABC$, $OB, OC \subset \text{面 } ABC$,

所以 $OO_1 \perp OC$, $OO_1 \perp OB$. 以 $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OO_1}$ 为 x, y, z 轴正方向, 建立如图所示坐标系. $\cdots \cdots 8 \text{ 分}$

因为 $OO_1 \perp OB$, $OB \perp OC$, $OO_1, AC \subset \text{面 } ACC_1$, $OO_1 \cap AC = O$, 所以

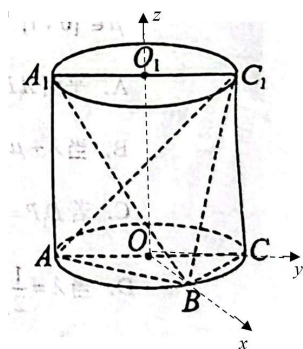
$OB \perp \text{面 } ACC_1$, 所以面 ACC_1 的法向量 $\vec{m} = (1, 0, 0)$. $\cdots \cdots 10 \text{ 分}$

设面 AC_1B 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$, $B(1, 0, 0), A(0, -1, 0)$,

$C_1(0, 1, 2), \overrightarrow{AB} = (1, 1, 0), \overrightarrow{AC_1} = (0, 2, 2)$

所以 $\begin{cases} x+y=0 \\ 2y+2z=0 \end{cases}$, 令 $x=1$, 则 $y=-1, z=1$, 所以 $\vec{n} = (1, -1, 1)$. $\cdots \cdots 13 \text{ 分}$

$$\text{设二面角 } C-AC_1-B \text{ 的平面角为 } \theta, |\cos \theta| = |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$



由图可知,二面角为锐角,所以二面角 $C-AC_1-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$15 分

法 2: 连接 OB , 作 $OM \perp AC_1$, 连接 BM8 分

因为 $OO_1 \perp OB$, $OB \perp OC$, $OO_1, AC \subset \text{面} ACC_1$, $OO_1 \cap AC = O$,

所以 $OB \perp \text{面} ACC_1$.

又因为 $AC_1 \subset \text{面} ACC_1$, 所以 $OB \perp AC_1$.

又因为 $OM \perp AC_1$, $OM, OB \subset \text{面} OBM$, $OM \cap OB = O$,

所以 $AC_1 \perp \text{面} OBM$.

因为 $BM \subset \text{面} OBM$,

所以 $AC_1 \perp BM$.

因为 $OM \perp AC_1$, $OM \subset \text{面} ACC_1$, $BM \subset \text{面} ABC_1$,

所以 $\angle OMB$ 为二面角 $C-AC_1-B$ 的平面角.12 分

在 $Rt\triangle OBM$ 中, $\angle BOM = 90^\circ$, $OB = 1$, $OM = \frac{1}{4}AC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $BM = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

所以 $\cos \angle OMB = \frac{OM}{BM} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以二面角 $C-AC_1-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$15 分

17. (15 分)

【解】(1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = x \ln x$, $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$f'(x) = \ln x + 1$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{e}$,

当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.2 分

所以 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{e}$ 处取极小值 $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$, 无极大值.3 分

(2) $f'(x) = a(\ln x + 1)$,

设切点为 (x_0, y_0) , 切线 $y = x - 1$ 的斜率为 1,

所以 $f'(x_0) = a(\ln x_0 + 1) = 1$ ①,

因为切点同时在曲线和切线上, 所以 $y_0 = ax_0 \ln x_0 = x_0 - 1$ ②,

由①②得, $\ln x_0 + 1 = x_0$ 6 分

设 $m(x) = \ln x - x + 1$, $m'(x) = \frac{1}{x} - 1$,

由 $x > 0$, 当 $0 < x < 1$ 时, $m'(x) > 0$ $m(x)$ 单调递增,

$x > 1$ 时, $m'(x) < 0$, $m(x)$ 单调递减,

又 $m(1) = 0$, 所以 $x = 1$ 是 $m(x) = \ln x - x + 1$ 的唯一零点.8 分

所以 $x_0 = 1$, 代入①得 $a = 1$, 切点坐标为 $(1, 0)$9 分

(3) 法 1: 令 $x \ln x = t$, $t' = \ln x + 1$, 令 $t' > 0$, 得 $x > \frac{1}{e}$,

令 $t' < 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{e}$, 所以 t 在 $(0, \frac{1}{e})$ 单调递减, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 单调递增

$(x \rightarrow +\infty, t \rightarrow +\infty)$, 所以 $t \in [-\frac{1}{e}, +\infty)$10 分

① $t \in [-\frac{1}{e}, 0)$ 时, $a < \frac{1}{t}$ 有解, $a < \left(\frac{1}{t}\right)_{\max}$, $a < -e$;12 分

② $t = 0$ 时, $0 > 1$, 舍;13 分

③ $t \in (0, +\infty)$ 时, $a > \frac{1}{t}$ 有解, $a > \left(\frac{1}{t}\right)_{\min}$, $a > 0$;14 分

综上: $a \in (-\infty, -e) \cup (0, +\infty)$15 分

法 2: 因为 $f(x) > 1$ 有解, 所以 $a \ln x - \frac{1}{x} > 0$ 有解.

记 $g(x) = a \ln x - \frac{1}{x}$, $g'(x) = \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{ax + 1}{x^2}$ 10 分

① $a > 0$ 时, $g'(x) > 0$ 恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

当 $x \rightarrow +\infty, g(x) \rightarrow +\infty$,

所以 $g(x) > 0$ 恒有解, 所以 $a > 0$11 分

② $a = 0$ 时, $g(x) = -\frac{1}{x}$, $g(x) > 0$ 无解, 舍12 分

③ $a < 0$ 时, $g(x)_{\max} > 0$

x	$\left(0, -\frac{1}{a}\right)$	$-\frac{1}{a}$	$\left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗	极大值	↘

所以 $g(x)_{\max} = g\left(-\frac{1}{a}\right) = a \ln\left(-\frac{1}{a}\right) + a > 0$, $\ln\left(-\frac{1}{a}\right) + 1 < 0$, $\ln\left(-\frac{1}{a}\right) < -1$,

所以 $a < -e$ 14 分

综上: $a \in (-\infty, -e) \cup (0, +\infty)$15 分

18. (17 分)

【解】(1) ① $n = 5$, $m = 3$ 时, 随机从编号 1~5 的 5 个小球中取出 3 个共有 $C_5^3 = 10$ 种情况,

X_3 的可能取值为 3, 4, 5,

$$P(X_3 = 3) = \frac{1}{10}, \quad P(X_3 = 4) = \frac{C_3^2}{C_5^3} = \frac{3}{10}, \quad P(X_3 = 5) = \frac{C_4^2}{C_5^3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \quad \text{.....3 分}$$

分布列如表所示

X	2	3	4
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

.....4 分

$$\textcircled{2} P(Y_3 = 1 | X_3 = 5) = \frac{n(X_3 = 5 \text{ 且 } Y_3 = 1)}{n(X_3 = 5)} = \frac{C_3^1}{C_4^2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{.....6 分}$$

(2) X_{n-1} 的可能取值为 $n-1$ 或 n7 分

$$P(X_{n-1} = n-1) = \frac{1}{C_n^{n-1}} = \frac{1}{n}, \quad \text{.....8 分}$$

$$P(X_{n-1}=n)=1-\frac{1}{n}, \quad \cdots \cdots 9 \text{ 分}$$

$$E(X_{n-1})=(n-1) \times \frac{1}{n}+n \times\left(1-\frac{1}{n}\right)=n-\frac{1}{n}, \quad \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

$$D\left(X_{n-1}\right)=\left(n-1-n+\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n}+\left(n-n+\frac{1}{n}\right)^2 \times\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2} . \quad \cdots \cdots 12 \text{ 分}$$

(3) 选取 m 个不同的元素, 有 C_n^m 种方法,

要满足 $X_m=k$, 则需取出元素 k , 其余 $(m-1)$ 个元素是从小于 k 的 $(k-1)$ 个元素中选出的,

$$\text{所以 } P\left(X_m=k\right)=\frac{C_{k-1}^{m-1}}{C_n^m}(k=m, m+1, \cdots, n), \quad \cdots \cdots 14 \text{ 分}$$

$$E\left(X_m\right)=\sum_{k=m}^n k \cdot P\left(X_m=k\right)=\frac{1}{C_n^m} \sum_{k=m}^n k \cdot C_{k-1}^{m-1}$$

$$\text{因为 } k \cdot C_{k-1}^{m-1}=\frac{k \cdot(k-1)!}{(m-1)!(k-m)!}=m \cdot \frac{k!}{m!(k-m)!}=m C_k^m, \quad \cdots \cdots 15 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } E\left(X_m\right)=\frac{1}{C_n^m} \sum_{k=m}^n m \cdot C_k^m=\frac{m}{C_n^m} \sum_{k=m}^n C_k^m=\frac{m}{C_n^m}\left(C_m^m+C_{m+1}^m+C_{m+2}^m+\cdots+C_n^m\right)$$

$$=\frac{m}{C_n^m}\left(C_{m+1}^{m+1}+C_{m+1}^m+C_{m+2}^m+\cdots+C_n^m\right) \quad \cdots \cdots 16 \text{ 分}$$

$$=\frac{m}{C_n^m}\left(C_{m+2}^{m+1}+C_{m+2}^m+\cdots+C_n^m\right)$$

$$=\cdots=\frac{m}{C_n^m} C_{n+1}^{m+1}=\frac{m(n+1)}{m+1} . \quad \cdots \cdots 17 \text{ 分}$$

19. (17 分)

【解】(1) 解: 由 $f(x)=\ln x$ 得, $f'(x)=\frac{1}{x}$.

$$\text{设 } p(x)=f(x)-f'(x)=\ln x-\frac{1}{x}, \quad x>0,$$

$$\text{当 } x>0 \text{ 时, } p'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0,$$

所以 $p(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.2 分

$$\text{又因为 } p(1)=\ln 1-\frac{1}{1}=-1<0, \quad p(e)=\ln e-\frac{1}{e}=1-\frac{1}{e}>0,$$

所以存在 $x_0 \in(1, e)$, 使得 $p\left(x_0\right)=0$, 即 $f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)$.

故函数 $f(x)=\ln x$ 具有性质 $P(1)$4 分

(2) 解: 由 $f(x) = x^3 + a$ 得, $f'(x) = 3x^2$,

因为函数 $f(x) = x^3 + a$ 具有性质 $P(-2)$,

所以存在实数 x_0 , 使得 $f(-2x_0) = -2f'(x_0)$,

即 $(-2x_0)^3 + a = -2(3x_0^2)$, 即 $a = 8x_0^3 - 6x_0^2$,6 分

即存在实数 x_0 , 使得 $a = 8x_0^3 - 6x_0^2$ 有三个实数根.

设 $h(x) = 8x^3 - 6x^2$, 则 $h'(x) = 24x^2 - 12x = 12x(2x - 1)$,

令 $h'(x) = 0$, 解得 $x = 0$ 或 $x = \frac{1}{2}$, 列表如下:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, +\infty)$
$h'(x)$	-	0	+	0	-
$h(x)$	$\nearrow$	极大值 0	$\searrow$	极小值 $-\frac{1}{2}$	$\nearrow$

因为函数 $f(x) = x^3 + a$ 具有性质 $P(-2)$ 时, x_0 的值恰有三个,

所以满足条件的 a 的取值范围是 $(-\frac{1}{2}, 0)$10 分

(3) 证明: 由 $f(x) = e^x + x$ 得, $f'(x) = e^x + 1$,

由 $f(tx) = tf'(x)$ 得, $e^{tx} + tx = t(e^x + 1)$,

设 $g(x) = e^{tx} - te^x + t(x - 1)$,11 分

先证充分性: 当 $t > 0$ 时, $g(1) = e^t - te$,

考虑函数 $y = e^x - xe$, 则 $y' = e^x - e$,

当 $0 < x < 1$ 时, $y' < 0$, 当 $x = 1$ 时, $y' = 0$, 当 $x > 1$ 时, $y' > 0$,

所以函数 $y = e^x - xe$ 在 $(0, 1)$ 上严格单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上严格单调递增,

在 $x = 1$ 时有极小值 0,

所以, 当 $t = 1$ 时, $g(1) = e^t - te = 0$, 函数 $f(x)$ 具有性质 $P(1)$,

当 $t > 0$ 且 $t \neq 1$ 时, $g(1) = e^t - te > e^1 - 1 \cdot e = 0$,

且当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $e^x \rightarrow 0, -e^x \rightarrow 0, t(x-1) \rightarrow -\infty$, 则 $g(x) \rightarrow -\infty$,

则存在 $x_0 \in (-\infty, 1)$ 满足 $g(x_0) = 0$, 即 $f(tx_0) = tf'(x_0)$ 成立,

所以函数 $y = f(x)$ 具有性质 $P(t)$14 分

再证必要性: 即证函数 $f(x) = e^x + x$ 具有性质 $P(t)$, 则 $t > 0$.

由 $g(x) = e^x - te^x + t(x-1)$ 得 $g'(x) = t(e^x - e^x + 1)$,

若 $t = 0$, 则 $g(x) = 1$, 与已知矛盾;

若 $t < 0$, 设 $h(x) = e^x - e^x + 1$, 则 $h'(x) = te^x - e^x < 0$,

即函数 $h(x)$ 是严格减函数,

所以函数 $g'(x) = t(e^x - e^x + 1)$ 是严格增函数,

又 $g'(0) = t(e^0 - e^0 + 1) = t < 0$, $g'(1) = t(e^1 - e + 1) > t(2 - e) > 0$,

则存在 $m \in (0, 1)$ 使得 $g'(m) = 0$, 即 $e^m - e^m + 1 = 0$,

当 $x \in (-\infty, m)$ 时, $g'(x) < 0$, 即函数 $g(x)$ 严格减函数,

当 $x \in (m, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, 即函数 $g(x)$ 严格增函数,

所以 $g(x) \geq g(m) = e^m - te^m + t(m-1) = e^m - 1 - te^m + t(m-1) = (1-t)e^m + t(m-1) - 1$,

需证 $e^m \geq m+1$,

令 $y = e^x - x - 1, x \in (0, 1)$, 则 $y' = e^x - 1 > 0$, $y = e^x - x - 1$ 在 $(0, 1)$ 单调递增,

所以 $y = e^x - x - 1 > e^0 - 1 = 0$,

所以 $g(x) \geq g(m) > (1-t)(m+1) + t(m-1) - 1 = m - 2t > 0$,

则不存在 $x_0 \in D$, 使得 $f(tx_0) = tf'(x_0)$ 成立, 与 $y = f(x)$ 具有性质 $P(t)$ 矛盾;

综上, 函数 $y = f(x)$ 具有性质 $P(t)$ 的充要条件为 $t > 0$17 分