



# 回归教材

研析教材中典型的探究问题、例题、习题

杭州学军中学数学组



**第一章 集合与常用逻辑用语、不等式 1**

教材宏观把控/1

教材探究思考/1

教材典题重温/2

**第二章 函数与基本初等函数 6**

教材宏观把控/6

教材探究思考/6

教材典题重温/8

**第三章 一元函数的导数及其应用 13**

教材宏观把控/13

教材探究思考/13

教材典题重温/14

**第四章 三角函数、解三角形 18**

教材宏观把控/18

教材探究思考/19

教材典题重温/20

**第五章 平面向量、复数 27**

教材宏观把控/27

教材探究思考/27

教材典题重温/28

**第六章 数列 34**

教材宏观把控/34

教材探究思考/34

教材典题重温/35

**第七章 立体几何与空间向量 42**

教材宏观把控/42

教材探究思考/43

教材典题重温/44

## 第八章 平面解析几何 51

教材宏观把控/51

教材探究思考/52

教材典题重温/53

## 第九章 统计与成对数据的统计分析 59

教材宏观把控/59

教材探究思考/59

教材典题重温/61

## 第十章 计数原理、概率、随机变量及其分布 66

教材宏观把控/66

教材探究思考/66

教材典题重温/68

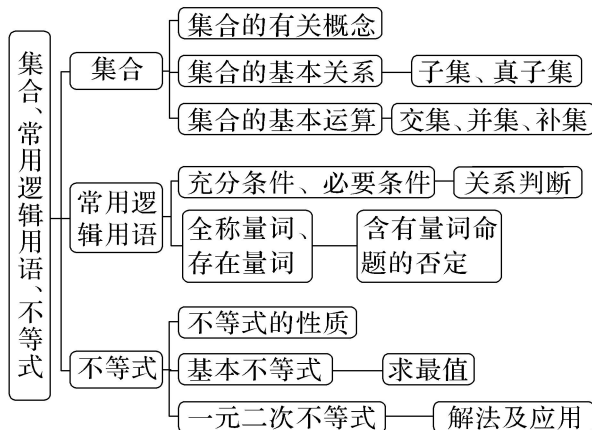
参考答案 73



# 集合与常用逻辑用语、不等式

教材宏观把控 系统知识、明确方向

## 宏观把控



## 命题方向

- (1)集合是高考的必考内容，一般以选择题的形式出现，试题较为简单，属于送分题，命题的热点为集合的基本运算，常结合一元二次不等式的解法进行考查。
- (2)高考对常用逻辑用语的考查涉及的知识点较广，主要以其他知识为背景考查充分条件、必要条件的判断，全称量词命题、存在量词命题的否定，题目难度中等或偏下，以选择题或填空题为主。
- (3)高考在不等式部分的命题点有：①不等式的性质及应用，不等式常与函数相结合；②不等式的解法，常与集合的基本运算相结合；③利用基本不等式求最值、证明不等式等.难度一般不大，常与其他知识相结合。

教材探究思考 挖掘内涵、探究本质

探究 1 (人教 A 版必修第一册 P<sub>11</sub>、P<sub>12</sub>)下列关系式成立吗？

- (1) $A \cup A = A$ ;
- (2) $A \cup \emptyset = A$ ;
- (3) $A \cap A = A$ ;
- (4) $A \cap \emptyset = \emptyset$ .

.....

.....

.....

探究 2 (人教 A 版必修第一册 P<sub>15</sub>)

对于有限集合  $A, B, C$ ，你能发现  $\text{card}(A \cup B \cup C)$ ,  $\text{card}(A)$ ,  $\text{card}(B)$ ,  $\text{card}(C)$ ,  $\text{card}(A \cap B)$ ,  $\text{card}(B \cap C)$ ,  $\text{card}(A \cap C)$ ,  $\text{card}(A \cap B \cap C)$  之间的关系吗？通过一个具体的例子，算一算。

.....

.....

.....

探究 3 (人教 A 版必修第一册 P<sub>18</sub>)例 1 中命题(1)给出了“四边形是平行四边形”的一个充分条件,即“四边形的两组对角分别相等”.这样的充分条件唯一吗?如果不唯一,那么你能再给出几个不同的充分条件吗?

.....

.....

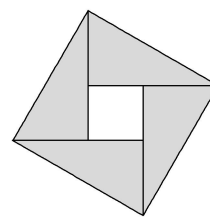
.....

.....

.....

.....

探究 4 (人教 A 版必修第一册 P<sub>39</sub>)如图是在北京召开的第 24 届国际数学家大会的会标,会标是根据中国古代数学家赵爽的弦图设计的,颜色的明暗使它看上去像一个风车,代表中国人民热情好客.你能在这个图中找出一些相等关系和不等关系吗?

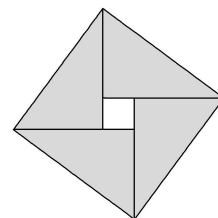


.....

.....

.....

**真题再现** (2021·浙江卷)我国古代数学家赵爽用弦图给出了勾股定理的证明.弦图是由四个全等的直角三角形和中间的一个小正方形拼成的一个大正方形(如图所示).若直角三角形直角边的长分别是 3, 4, 记大正方形的面积为  $S_1$ , 小正方形的面积为  $S_2$ , 则  $\frac{S_1}{S_2} =$  \_\_\_\_\_.

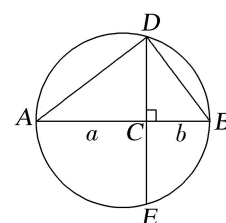


.....

.....

.....

探究 5 (人教 A 版必修第一册 P<sub>45</sub>)如图,  $AB$  是圆的直径, 点  $C$  是  $AB$  上一点,  $AC = a$ ,  $BC = b$ . 过点  $C$  作垂直于  $AB$  的弦  $DE$ , 连接  $AD$ ,  $BD$ . 你能利用这个图形, 得出基本不等式的几何解释吗?

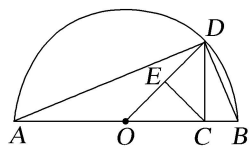


.....

.....

.....

**真题再现** (多选)(2022·苏州模考)《几何原本》中的几何代数法是以几何方法研究代数问题，这种方法是西方数学家处理问题的重要依据，通过这一原理，很多的代数公理或定理都能够通过图形实现证明，称之为无字证明.现有图形如图所示， $C$ 为线段 $AB$ 上的点，且 $AC=a$ ， $BC=b$ ， $O$ 为 $AB$ 的中点，以 $AB$ 为直径作半圆.过点 $C$ 作 $AB$ 的垂线交半圆于 $D$ ，连接 $OD$ ， $AD$ ， $BD$ ，过点 $C$ 作 $OD$ 的垂线，垂足为 $E$ .则利用该图形可以完成的证明为( )



A.  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

B.  $a^2 + b^2 \geq 2ab$

C.  $\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

D.  $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \frac{a+b}{2}$

**教材典题重温** 重温典题、追本溯源

**典题 1** (人教 A 版必修第一册 P<sub>9</sub> 习题 1.2T<sub>4</sub>) 在平面直角坐标系中，集合  $C = \{(x, y) | y = x\}$  表示直线  $y = x$ ，从这个角度看，集合  $D = \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 4y = 5 \end{cases} \right\}$  表示什么？集合  $C$ ， $D$  之间有什么关系？

.....

.....

.....

.....

**典题 2** (人教 A 版必修第一册 P<sub>9</sub> 习题 1.2T<sub>5</sub>)

- (1) 设  $a, b \in \mathbf{R}$ ， $P = \{1, a\}$ ， $Q = \{-1, -b\}$ ，若  $P = Q$ ，求  $a - b$  的值；
- (2) 已知集合  $A = \{x | 0 < x < a\}$ ， $B = \{x | 1 < x < 2\}$ ，若  $B \subseteq A$ ，求实数  $a$  的取值范围.

.....

.....

.....

.....

**典题 3** (人教 A 版必修第一册 P<sub>13</sub> 例 6) 设全集  $U = \{x | x \text{ 是三角形}\}$ ， $A = \{x | x \text{ 是锐角三角形}\}$ ， $B = \{x | x \text{ 是钝角三角形}\}$ ，求  $A \cap B$ ， $\complement_U(A \cup B)$ .

.....

.....

.....

.....

**真题再现** (2021·全国乙卷)已知全集  $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 集合  $M=\{1, 2\}$ ,  $N=\{3, 4\}$ , 则  $\complement_U(M \cup N)=$  ( )

- A.  $\{5\}$                       B.  $\{1, 2\}$   
 C.  $\{3, 4\}$                       D.  $\{1, 2, 3, 4\}$

**点评** 本题主要考查集合的并集与补集运算，与教材例题角度相同，只不过换了更容易理解的集合.

**典题 4** (人教 A 版必修第一册 P<sub>14</sub> 习题 1.3T<sub>1</sub>)集合  $A=\{x|2 \leq x < 4\}$ ,  $B=\{x|3x-7 \geq 8-2x\}$ , 求  $A \cup B, A \cap B$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**真题再现** (2021·全国甲卷)设集合  $M=\{x|0 < x < 4\}$ ,  $N=\{x | \frac{1}{3} \leq x \leq 5\}$ , 则  $M \cap N=$  ( )

- A.  $\{x | 0 < x \leq \frac{1}{3}\}$                       B.  $\{x | \frac{1}{3} \leq x < 4\}$   
 C.  $\{x|4 \leq x < 5\}$                       D.  $\{x|0 < x \leq 5\}$

**点评** 本题主要考查集合的交集运算，与教材习题的考查角度完全相同，对于此类问题一定要注意不等式中端点的取舍.

**典题 5** (人教 A 版必修第一册 P<sub>14</sub> 习题 1.3T<sub>5</sub>)设集合  $A=\{x|(x-3)(x-a)=0, a \in \mathbf{R}\}$ ,  $B=\{x|(x-4)(x-1)=0\}$ , 求  $A \cup B, A \cap B$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 6 (人教 A 版必修第一册 P<sub>14</sub> 习题 1.3T<sub>6</sub>) 已知全集  $U=A\cup B=\{x\in\mathbf{N}|0\leq x\leq 10\}$ ,  $A\cap(\complement_U B)=\{1, 3, 5, 7\}$ , 试求集合  $B$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 7 (人教 A 版必修第一册 P<sub>22</sub> 习题 1.4T<sub>2</sub>) 在下列各题中, 判断  $p$  是  $q$  的什么条件(请用“充分不必要条件”“必要不充分条件”“充要条件”“既不充分也不必要条件”回答):

- (1) $p$ : 三角形是等腰三角形,  $q$ : 三角形是等边三角形;
- (2) $p$ : 一元二次方程  $ax^2+bx+c=0$  有实数根,  $q$ :  $b^2-4ac\geq 0$ ;
- (3) $p$ :  $a\in P\cap Q$ ,  $q$ :  $a\in P$ ;
- (4) $p$ :  $a\in P\cup Q$ ,  $q$ :  $a\in P$ ;
- (5) $p$ :  $x>y$ ,  $q$ :  $x^2>y^2$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**真题再现** (2020·天津卷) 设  $a\in\mathbf{R}$ , 则“ $a>1$ ”是“ $a^2>a$ ”的( )

- A.充分不必要条件
- B.必要不充分条件
- C.充要条件
- D.既不充分也不必要条件

**点评** 本题主要考查利用充分、必要条件的意义判断命题间的充分、必要性, 与教材习题角度完全一致, 且难度小于教材习题.

**典题 8** (人教 A 版必修第一册 P<sub>23</sub> 习题 1.4T<sub>6</sub>) 设  $a, b, c$  分别是  $\triangle ABC$  的三条边, 且  $a \leq b \leq c$ . 我们知道, 如果  $\triangle ABC$  为直角三角形, 那么有  $a^2 + b^2 = c^2$  (勾股定理). 反过来, 如果  $a^2 + b^2 = c^2$ , 那么  $\triangle ABC$  为直角三角形 (勾股定理的逆定理). 由此可知,  $\triangle ABC$  为直角三角形的充要条件是  $a^2 + b^2 = c^2$ .

请利用边长  $a, b, c$  分别给出  $\triangle ABC$  为锐角三角形和钝角三角形的一个充要条件, 并证明.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**典题 9** (人教 A 版必修第一册 P<sub>31</sub> 例 5) 写出下列命题的否定, 并判断真假:

(1) 任意两个等边三角形都相似;

(2)  $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 = 0$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**典题 10** (人教 A 版必修第一册 P<sub>35</sub> 复习参考题 1T<sub>8</sub>) 已知集合  $A = \{(x, y) | 2x - y = 0\}$ ,  $B = \{(x, y) | 3x + y = 0\}$ ,  $C = \{(x, y) | 2x - y = 3\}$ , 求  $A \cap B$ ,  $A \cap C$ , 并解释它们的几何意义.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 11 (人教 A 版必修第一册 P<sub>46</sub> 例 3)

(1)用篱笆围一个面积为  $100 \text{ m}^2$  的矩形菜园，当这个矩形的边长为多少时，所用篱笆最短？最短篱笆的长度是多少？

(2)用一段长为  $36 \text{ m}$  的篱笆围成一个矩形菜园，当这个矩形的边长为多少时，菜园的面积最大？最大面积是多少？

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 12 (人教 A 版必修第一册 P<sub>46</sub> 练习 T<sub>2</sub>)已知  $x, y$  都是正数，且  $x \neq y$ ，求证：

(1)  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$ ; (2)  $\frac{2xy}{x+y} < \sqrt{xy}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**真题再现** (2021·全国乙卷)下列函数中最小值为 4 的是( )

- A.  $y = x^2 + 2x + 4$                       B.  $y = |\sin x| + \frac{4}{|\sin x|}$
- C.  $y = 2^x + 2^{2-x}$                         D.  $y = \ln x + \frac{4}{\ln x}$

**点评** 本题考查利用基本不等式求最值以及等号成立的条件，与教材习题非常类似。

**典题 13** (人教 A 版必修第一册 P<sub>58</sub> 复习参考题 2T<sub>5</sub>)若  $a, b > 0$ , 且  $ab = a + b + 3$ , 求  $ab$  的取值范围.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**真题再现** (多选)(2020·新高考全国 I 卷)已知  $a > 0, b > 0$ , 且  $a + b = 1$ , 则( )

- A.  $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$                       B.  $2^{a-b} > \frac{1}{2}$
- C.  $\log_2 a + \log_2 b \geq -2$               D.  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$

**点评** 本题与教材习题都是条件求最值问题, 都涉及到  $a + b$  与  $ab$  的转化及不等关系, 掌握基本不等式的应用是解题的关键.

**典题 14** (人教 A 版必修第一册 P<sub>58</sub> 复习参考题 2T<sub>10</sub>)两次购买同一种物品, 可以用两种不同的策略, 第一种是不考虑物品价格的升降, 每次购买这种物品的数量一定; 第二种是不考虑物品价格的升降, 每次购买这种物品所花的钱数一定. 哪种购物方式比较经济? 你能把所得结论作一些推广吗?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

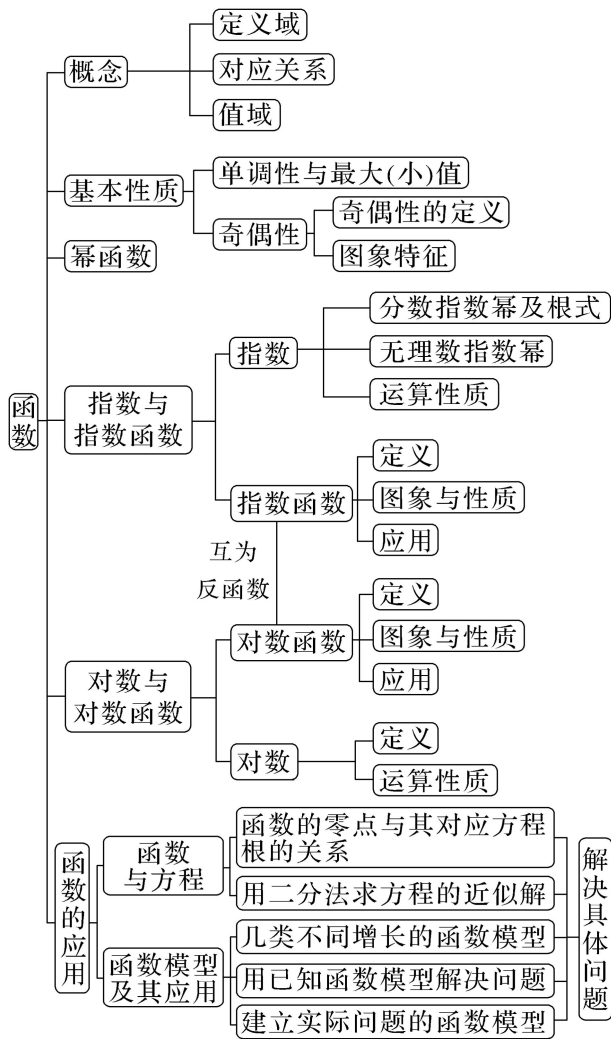
.....



# 函数与基本初等函数

教材宏观把控 系统知识、明确方向

## 宏观把控



## 命题方向

(1)函数是高中数学的主干内容，高考对本章考查的内容主要有：①结合函数的定义综合考查函数的基本性质；②结合一元一次不等式、一元二次不等式、指数与对数不等式考查函数的定义域；③考查用待定系数法、换元法等求解函数的解析式；④考查指数函数、对数函数、二次函数、幂函数的图象和性质；⑤结合函数的图象考查函数的性质、函数的零点与方程的根；⑥结合实际问题考查函数的应用。

(2)函数的基本性质与应用是高考的高频考点，以选择题或填空题为主，分值大约 10 分。

(3)本章内容一般不会出现单一知识点的考题，常结合函数的单调性、奇偶性、周期性命题，

或将函数的性质融入函数的图象进行考查，本章内容也可能与导数、不等式等结合命题.

**教材探究思考** 挖掘内涵、探究本质

**探究 1** (人教 A 版必修第一册 P<sub>77</sub>) (1) 设  $A$  是区间  $D$  上某些自变量的值组成的集合，而且  $\forall x_1, x_2 \in A$ ，当  $x_1 < x_2$  时，都有  $f(x_1) < f(x_2)$ ，我们能说函数  $f(x)$  在区间  $D$  上单调递增吗？你能举例说明吗？

(2) 函数的单调性是对定义域内某个区间而言的，你能举出在整个定义域内是单调递增的函数例子吗？你能举出在定义域内的某些区间上单调递增但在另一些区间上单调递减的函数例子吗？

.....

.....

.....

.....

.....

**探究 2** (人教 A 版必修第一册 P<sub>92</sub>) 探究函数  $y = x + \frac{1}{x}$  的图象与性质.

在初中，我们知道  $y = x$  是正比例函数， $y = \frac{1}{x}$  是反比例函数.学习了幂函数以后，我们知道它们都是幂函数.不同的函数通过加、减、乘、除等运算可以构成新的函数.那么，将这两个函数相加构成的函数有哪些性质？这些性质与这两个函数的性质有联系吗？

下面请同学们带着问题探究一下函数  $y = x + \frac{1}{x}$ .

1. 你认为可以从哪些方面研究这个函数？

.....

.....

.....

.....

.....

2. 你认为可以按照怎样的路径研究这个函数？

.....

.....

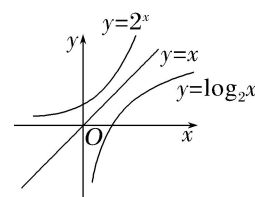
.....

.....

.....

探究 3 (人教 A 版必修第一册 P<sub>135</sub>)互为反函数的两个函数图象间的关系.

我们知道，指数函数  $y=a^x(a>0, \text{ 且 } a\neq 1)$  与对数函数  $y=\log_a x(a>0, \text{ 且 } a\neq 1)$  互为反函数. 它们的图象是否有关系？有什么关系呢？下面，请你运用所学的数学知识和计算工具，探索几个问题，亲自发现其中的奥秘吧！



1. 在同一直角坐标系中，画出指数函数  $y=2^x$  及其反函数  $y=\log_2 x$  的图象. 你能发现这两个函数的图象有什么对称关系吗？

.....

.....

.....

.....

.....

2. 取  $y=2^x$  图象上的几个点，如  $P_1\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ ,  $P_2(0, 1)$ ,  $P_3(1, 2)$ ,  $P_1, P_2, P_3$  关于直线  $y=x$  的对称点的坐标是什么？它们在  $y=\log_2 x$  的图象上吗？为什么？

.....

.....

.....

.....

.....

3. 如果点  $P_0(x_0, y_0)$  在函数  $y=2^x$  的图象上，那么  $P_0$  关于直线  $y=x$  的对称点在函数  $y=\log_2 x$  的图象上吗？为什么？

.....

.....

.....

.....

.....

4. 根据上述探究过程，你可以得到什么结论？

.....

.....

.....

.....

.....  
 5.上述结论对于指数函数  $y=a^x(a>0, \text{且 } a\neq 1)$ 及其反函数  $y=\log_a x(a>0, \text{且 } a\neq 1)$ 也成立吗？为什么？  
 .....

教材典题重温 重温典题、追本溯源

典题 1 (人教 A 版必修第一册 P<sub>66</sub> 例 3)下列函数中哪个与函数  $y=x$  是同一个函数？

(1) $y=(\sqrt{x})^2$ ; (2) $u=\sqrt[3]{v^3}$ ; (3) $y=\sqrt{x^2}$ ; (4) $m=\frac{n^2}{n}$ .

.....  
 .....

典题 2 (人教 A 版必修第一册 P<sub>73</sub> 习题 1.3T<sub>13</sub>)函数  $f(x)=[x]$ 的函数值表示不超过  $x$  的最大整数，例如， $[-3.5]=-4$ ， $[2.1]=2$ .当  $x\in(-2.5, 3]$ 时，写出函数  $f(x)$ 的解析式，并画出函数的图象.  
 .....

典题 3 (人教 A 版必修第一册 P<sub>81</sub> 例 5) 已知函数  $f(x) = \frac{2}{x-1}$  ( $x \in [2, 6]$ )，求函数的最大值和最小值.

典题 4 (人教 A 版必修第一册 P<sub>87</sub> 习题 3.2T<sub>12</sub>) 已知函数  $f(x)$  是偶函数，而且在  $(0, +\infty)$  上单调递减，判断  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递增还是单调递减，并证明你的判断.

**典题 5** (人教 A 版必修第一册 P<sub>87</sub> 习题 3.2T<sub>13</sub>) 我们知道，函数  $y=f(x)$  的图象关于坐标原点成中心对称图形的充要条件是函数  $y=f(x)$  为奇函数，有同学发现可以将其推广为：函数  $y=f(x)$  的图象关于点  $P(a, b)$  成中心对称图形的充要条件是函数  $y=f(x+a)-b$  为奇函数.

(1) 求函数  $f(x)=x^3-3x^2$  图象的对称中心；

(2) 类比上述推广结论，写出“函数  $y=f(x)$  的图象关于  $y$  轴成轴对称图形的充要条件是函数  $y=f(x)$  为偶函数”的一个推广结论.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**真题再现** (2021·全国乙卷) 设函数  $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ ，则下列函数中为奇函数的是( )

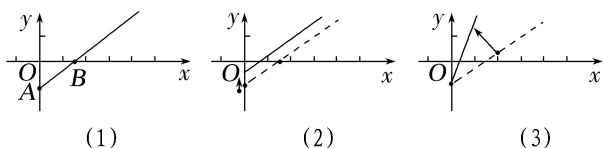
- A.  $f(x-1)-1$                   B.  $f(x-1)+1$   
 C.  $f(x+1)-1$                   D.  $f(x+1)+1$

**点评** 本题是教材习题结论的直接应用，如果利用结论解答该题更简单，解法如下： $f(x)=\frac{1-x}{1+x} = -1 + \frac{2}{1+x}$ ，则  $f(x)$  的图象关于点  $P(-1, -1)$  对称，故函数  $y=f(x-1)+1$  为奇函数.

**典题 6** (人教 A 版必修第一册 P<sub>96</sub> 习题 3.4T<sub>4</sub>) 图(1)是某条公共汽车线路收支差额  $y$  关于乘客量  $x$  的图象.

(1) 试说明图(1)上点  $A$ ，点  $B$  以及射线  $AB$  上的点的实际意义；

(2) 由于目前本条线路亏损，公司有关人员提出了两种扭亏为赢的建议，如图(2)(3)所示. 你能根据图象，说明这两种建议是什么吗？



.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 7 (人教 A 版必修第一册 P<sub>101</sub> 复习参考题 3T<sub>8</sub>)证明：

(1)若  $f(x)=ax+b$ ，则  $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ ;

(2)若  $g(x)=x^2+ax+b$ ，则  $g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 8 (人教 A 版必修第一册 P<sub>101</sub> 复习参考题 3T<sub>9</sub>)(1)已知奇函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调递减，那么它在  $[-b, -a]$  上单调递增还是单调递减？

(2)已知偶函数  $g(x)$  在  $[a, b]$  上单调递减，那么它在  $[-b, -a]$  上单调递增还是单调递减？

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 9 (人教 A 版必修第一册 P<sub>101</sub> 复习参考题 3T<sub>12</sub>)试讨论函数  $y=x-\frac{1}{x}$  的定义域、值域、单调性、奇偶性，并画出函数图象.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**典题 10** (人教 A 版必修第一册 P<sub>117</sub> 例 3)比较下列各题中两个值的大小：

- (1)  $1.7^{2.5}$ ,  $1.7^3$ ;     (2)  $0.8^{-\sqrt{2}}$ ,  $0.8^{-\sqrt{3}}$ ;     (3)  $1.7^{0.3}$ ,  $0.9^{3.1}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**真题再现** (2020·天津卷)设  $a=3^{0.7}$ ,  $b=\left(\frac{1}{3}\right)^{-0.8}$ ,  $c=\log_{0.7}0.8$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为(     )

- A.  $a < b < c$             B.  $b < a < c$   
 C.  $b < c < a$             D.  $c < a < b$

**点评** 教材例题体现了比较大小的两种常用方法：(1)利用函数的单调性；(2)借助于 0 或 1 作为中间数，而高考试题考查的也正是这两种方法.

**典题 11** (人教 A 版必修第一册 P<sub>120</sub> 习题 4.2T<sub>9</sub>)已知函数  $y=a\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}+b$  的图象过原点，且无限接近直线  $y=2$  但又不与该直线相交.

- (1)求该函数的解析式，并画出图象；(2)判断该函数的奇偶性和单调性.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**典题 12** (人教 A 版必修第一册 P<sub>125</sub> 例 5) 尽管目前人类还无法准确预报地震，但科学家通过研究，已经对地震有所了解，例如，地震时释放出的能量  $E$  (单位：焦耳) 与地震里氏震级  $M$  之间的关系为  $\lg E = 4.8 + 1.5M$ . 2011 年 3 月 11 日，日本东北部海域发生里氏 9.0 级地震，它所释放出来的能量是 2008 年 5 月 12 日我国汶川发生里氏 8.0 级地震的多少倍(精确到 1)?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**真题再现** (1)(2021·全国甲卷) 青少年视力是社会普遍关注的问题，视力情况可借助视力表测量，通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据，五分记录法的数据  $L$  和小数记录法的数据  $V$  满足  $L = 5 + \lg V$ . 已知某同学视力的五分记录法的数据为 4.9，则其视力的小数记录法的数据约为  $(\sqrt{10} \approx 1.259)$  ( )

- 数据约为  $(\sqrt{10} \approx 1.259)$  ( )
- A. 1.5      B. 1.2      C. 0.8      D. 0.6

(2)(2020·全国 III 卷) Logistic 模型是常用数学模型之一，可应用于流行病学领域. 有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数  $I(t)$  ( $t$  的单位：天) 的 Logistic 模型： $I(t) = \frac{K}{1 + e^{-0.23(t-53)}}$ ，其中  $K$  为最大确诊病例数. 当  $I(t^*) = 0.95K$  时，标志着已初步遏制疫情，则  $t^*$  约为  $(\ln 19 \approx 3)$  ( )

- 约为  $(\ln 19 \approx 3)$  ( )
- A. 60      B. 63      C. 66      D. 69

**点评** 本题与教材例题类似，主要考查两个方面知识：一是指数、对数的互化与运算；二是利用数学知识解决实际问题.

**典题 13** (人教 A 版必修第一册 P<sub>133</sub> 例 3) 比较下列各题中两个值的大小：

- (1)  $\log_2 3.4$ ,  $\log_2 8.5$ ; (2)  $\log_{0.3} 1.8$ ,  $\log_{0.3} 2.7$ ; (3)  $\log_a 5.1$ ,  $\log_a 5.9$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ).

.....

.....

.....

.....

.....

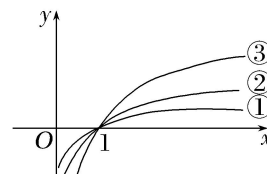
**真题再现** (2020·全国III卷) 设  $a = \log_3 2$ ,  $b = \log_5 3$ ,  $c = \frac{2}{3}$ , 则( )

A.  $a < c < b$                       B.  $a < b < c$

C.  $b < c < a$                       D.  $c < a < b$

**点评** 本题是教材习题的拓展，由于  $a$  和  $b$  的底数不同，故不能直接利用单调性比较大小，需变形后比较大小，而变形的过程中应用了函数的单调性.

**典题 14** (人教 A 版必修第一册 P<sub>140</sub> 习题 4.4T<sub>4</sub>) 函数  $y = \log_2 x$ ,  $y = \log_5 x$ ,  $y = \lg x$  的图象如图所示.



(1) 试说明哪个函数对应于哪个图象，并解释为什么；

(2) 以已有图象为基础，在同一直角坐标系中画出  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ ,  $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ ,  $y = \log_{\frac{1}{10}} x$  的图象；

(3) 从(2)的图中你发现了什么？

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**典题 15** (人教 A 版必修第一册 P<sub>156</sub> 习题 4.5T<sub>13</sub>) 有一道题“若函数  $f(x) = 24ax^2 + 4x - 1$  在区间  $(-1, 1)$  内恰有一个零点，求实数  $a$  的取值范围”，某同学给出了如下解答：

$$\text{由 } f(-1)f(1) = (24a - 5)(24a + 3) < 0,$$

$$\text{解得 } -\frac{1}{8} < a < \frac{5}{24}.$$

所以，实数  $a$  的取值范围是  $\left[-\frac{1}{8}, \frac{5}{24}\right)$ .

上述解答正确吗？若不正确，请说明理由，并给出正确的解答.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 16 (人教 A 版必修第一册 P<sub>161</sub> 复习参考题 4T<sub>11</sub>) 已知函数  $f(x)=\log_a(x+1)$ ,  $g(x)=\log_a(1-x)$  ( $a>0$ , 且  $a\neq 1$ ).

- (1) 求函数  $f(x)+g(x)$  的定义域;
- (2) 判断函数  $f(x)+g(x)$  的奇偶性, 并说明理由.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 17 (人教 A 版必修第一册 P<sub>161</sub> 复习参考题 4T<sub>12</sub>) 对于函数  $f(x)=a-\frac{2}{2^x+1}$  ( $a\in\mathbf{R}$ ).

- (1) 探索函数  $f(x)$  的单调性;
- (2) 是否存在实数  $a$  使函数  $f(x)$  为奇函数?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**真题再现** (2021·新高考 I 卷) 已知函数  $f(x)=x^3(a\cdot 2^x-2^{-x})$  是偶函数, 则  $a=$ \_\_\_\_\_.

**点评** 本题与教材习题考查角度完全相同, 都是已知函数的奇偶性求参数值, 此类问题的解法一般有两个: 一是定义法, 二是特殊值法.

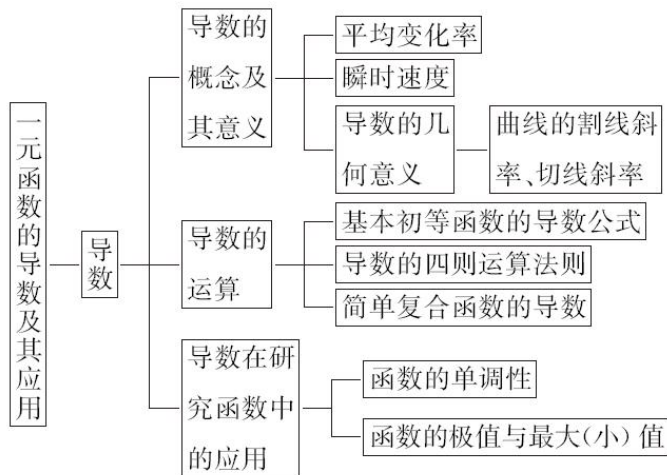




# 一元函数的导数及其应用

教材宏观把控 系统知识、明确方向

## 宏观把控



## 命题方向

- (1)本章内容是高考的热点，一般考查“两小一大”或“一小一大”，分值一般为 20 分，解答题一般作为压轴题出现，选择、填空题也有可能作为压轴小题出现，难度较大。
- (2)高考重点考查利用导数判断函数的图象、导数的几何意义、求曲线的切线方程、利用导数判断或证明函数的单调性、函数的极值和最值问题，或由以上考查内容为基础，考查利用导数证明不等式、解决恒成立问题及有解问题、函数的零点问题。

教材探究思考 挖掘内涵、探究本质

探究 1 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>74</sub>)画出函数  $y = \frac{1}{x}$  的图象，根据图象，描述它的变化情况，并求出曲线在点(1, 1)处的切线方程。

.....

.....

.....

探究 2 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>85</sub>)对于高台跳水问题，函数  $h(t)$  的单调性与  $h'(t)$  的正负有内在联系，那么，我们能否由  $h'(t)$  的正负来判断函数  $h(t)$  的单调性呢？

.....

.....

.....

探究 3 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>87</sub>)请同学们回顾一下函数单调性的定义，并思考在某个区间上单调的函数  $y=f(x)$  的平均变化率的几何意义与  $f'(x)$  的正负关系.

探究 4 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>88</sub>)研究对数函数  $y=\ln x$  与幂函数  $y=x^3$  在区间  $(0, +\infty)$  上增长快慢的情况.

探究 5 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>91</sub>)导数值为 0 的点一定是函数的极值点吗?

教材典题重温 重温典题、追本溯源

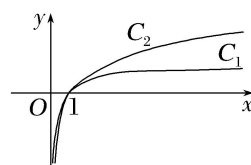
典题 1 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>81</sub> 习题 5.2T<sub>5</sub>)求曲线  $y=\frac{\sin x}{x}$  在点  $M(\pi, 0)$  处的切线方程.

**真题再现** (2021·全国甲卷)曲线  $y=\frac{2x-1}{x+2}$  在点  $(-1, -3)$  处的切线方程为\_\_\_\_\_.

点评 本题和教材习题非常类似，给出的函数都是分式函数，都属于简单的求切线方程问题.

典题 2 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>89</sub> 例 4)设  $x>0$ ,  $f(x)=\ln x$ ,  $g(x)=1$

$-\frac{1}{x}$ , 两个函数的图象如图所示.判断  $f(x)$ ,  $g(x)$  的图象与  $C_1$ ,  $C_2$  之间的对



应关系.

典题 3 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>95</sub> 例 7) 给定函数  $f(x) = (x+1)e^x$ .

- (1) 判断函数  $f(x)$  的单调性，并求出  $f(x)$  的极值；
- (2) 画出函数  $f(x)$  的大致图象；
- (3) 求出方程  $f(x) = a (a \in \mathbf{R})$  的解的个数.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 4 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>96</sub> 例 8) 某制造商制造并出售球形瓶装的某种饮料，瓶子的制造成本是  $0.8\pi r^2$  分，其中  $r$  (单位：cm) 是瓶子的半径. 已知每出售 1 mL 的饮料，制造商可获利 0.2 分，且制造商能制作的瓶子的最大半径为 6 cm.

- (1) 瓶子半径多大时，能使每瓶饮料的利润最大？
- (2) 瓶子半径多大时，每瓶饮料的利润最小？

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 5 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>94</sub> 练习 T<sub>2</sub>) 证明不等式：  $x - 1 \geq \ln x, x \in (0, +\infty)$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**典题 6** (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>97</sub> 习题 5.3T<sub>12</sub>) 利用函数的单调性，证明下列不等式，并通过函数图象直观验证.

(1)  $e^x > 1+x$ ,  $x \neq 0$ ; (2)  $\ln x < x < e^x$ ,  $x > 0$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**点评** 1.问题源于求曲线  $y=e^x$  在  $(0, 1)$  处的切线及曲线  $y=\ln x$  在  $(1, 0)$  处的切线，通过观察函数图象间的位置关系可得到以上结论，可构造函数  $f(x)=e^x-x-1$  与  $g(x)=x-\ln x-1$  对以上结论进行证明.

2.两题从本质上看是一致的，第(2)题可以看作第(1)题的推论，在第(1)题中，用“ $\ln x$ ”替换“ $x$ ”，立刻得到  $x > 1 + \ln x$  ( $x > 0$  且  $x \neq 1$ )，进而得到一组重要的不等式链： $e^x > x + 1 > x - 1 > \ln x$  ( $x > 0$  且  $x \neq 1$ ).

3.利用函数的图象，不难验证上述不等式链成立.

**真题再现** (1)(2021·全国乙卷) 设  $a=2\ln 1.01$ ,  $b=\ln 1.02$ ,  $c=\sqrt{1.04}-1$ , 则( )

- A.  $a < b < c$
- B.  $b < c < a$
- C.  $b < a < c$
- D.  $c < a < b$

(2)(2021·全国甲卷 T<sub>21</sub> 节选) 已知  $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ , 函数  $f(x) = \frac{x^a}{a^x}$  ( $x > 0$ ). 若曲线  $y=f(x)$  与直线  $y=1$  有且仅有两个交点，求  $a$  的取值范围.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**点评** 以上两个高考题的基本解法都利用构造函数解不等式，和教材习题的解法同出一脉，其中教材习题的两个不等式用处广泛，在甲卷 21 题的解答过程中已应用. 另外，这些不等式变式众多，这就需要我们独具一双慧眼，仔细观察，以发现它为我所用.

下面是几个关于  $\ln x$  的重要不等式：

$$(1) 1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1 (x > 0).$$

$$(2) \ln x \geq \frac{1}{2} \left[ x - \frac{1}{x} \right], 0 < x \leq 1; \ln x \leq \frac{1}{2} \left[ x - \frac{1}{x} \right], x \geq 1.$$

$$(3) \ln x \geq \frac{2(x-1)}{x+1}, x \geq 1; \ln x \leq \frac{2(x-1)}{x+1}, 0 < x \leq 1.$$

$$(4) \ln(x+1) \geq x - \frac{x^2}{2}, x \geq 0.$$

$$(5) \ln x \leq \sqrt{x-1}, x \geq 1.$$

$$(6) \sqrt{x_1 x_2} < \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2} (x_1 \neq x_2, x_1 > 0, x_2 > 0).$$

**典题 7** (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>87</sub> 练习 T<sub>2</sub>) 利用导数讨论二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  的单调区间.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**真题再现** (2021·全国乙卷节选) 已知函数  $f(x) = x^3 - x^2 + ax + 1$ . 讨论  $f(x)$  的单调性.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**点评** 本题是教材习题的深化的改编，第(1)问的难度比教材习题的难度要大，都是研究分类讨论求函数的单调性，解答时首先要求得导函数，然后分类讨论导函数的符号即可确定原函数的单调性.

**典题 8** (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>104</sub> 复习参考题 5T<sub>9</sub>) 已知函数  $f(x) = x(x-c)^2$  在  $x=2$  处有极大值，求  $c$  的值.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

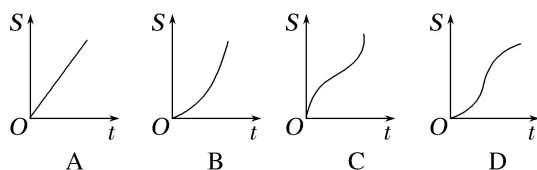
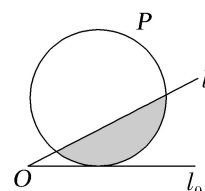
.....

**真题再现** (2021·全国乙卷) 设  $a \neq 0$ , 若  $x=a$  为函数  $f(x)=a(x-a)^2(x-b)$  的极大值点, 则( )

- A.  $a < b$     B.  $a > b$     C.  $ab < a^2$     D.  $ab > a^2$

**点评** 本题和教材习题考查的都是三次函数, 考查角度相同, 不同之处是高考试题在教材习题的基础上添加了一个参数, 解答本题要先考虑函数的零点情况, 注意零点左右附近函数值是否变号, 结合极大值点的性质, 对  $a$  进行分类讨论, 画出  $f(x)$  图象, 即可得到  $a, b$  所满足的关系, 由此确定正确选项.

**典题 9** (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>104</sub> 复习参考题 5T<sub>11</sub>) 如图, 直线  $l$  和圆  $\Gamma$ , 当  $l$  从  $l_0$  开始在平面上按逆时针方向绕点  $O$  匀速转动(转动角度不超过  $90^\circ$ ) 时, 它扫过的圆内阴影部分的面积  $S$  是时间  $t$  的函数. 这个函数的图象大致是 ( )



.....

.....

.....

**典题 10** (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>104</sub> 复习参考题 5T<sub>13</sub>) 已知曲线  $y=x+\ln x$  在点  $(1, 1)$  处的切线与曲线  $y=ax^2+(2a+3)x+1$  只有一个公共点, 求  $a$  的值.

.....

.....

.....

.....

.....

**真题再现** (2020·全国III卷)若直线  $l$  与曲线  $y=\sqrt{x}$  和圆  $x^2+y^2=\frac{1}{5}$  都相切，则  $l$  的方程为( )

A.  $y=2x+1$                       B.  $y=2x+\frac{1}{2}$

C.  $y=\frac{1}{2}x+1$                       D.  $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

**典题 11** (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>104</sub> 复习参考题 5T<sub>15</sub>)用半径为  $R$  的圆形铁皮剪出一个圆心角为  $\alpha$  的扇形，制成一个圆锥形容器.扇形的圆心角  $\alpha$  为多大时，容器的容积最大？

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**典题 12** (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>104</sub> 复习参考题 5T<sub>16</sub>)已知  $A, B$  两地的距离是 130 km. 根据交通法规，两地之间的公路车速应限制在 50~100 km/h.假设油价是 7 元/L，以  $x$  km/h 的速度行驶时，汽车的耗油率为  $\left(3+\frac{x^2}{360}\right)$  L/h，司机每小时的工资是 35 元.那么最经济的车速是多少？如果不考虑其他费用，这次行车的总费用是多少？

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**典题 13** (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>104</sub> 复习参考题 5T<sub>17</sub>)作函数  $y=\frac{e^x(2x-1)}{x-1}$  的大致图象.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 14 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>104</sub> 复习参考题 5T<sub>18</sub>) 已知函数  $f(x) = e^x - \ln(x+m)$ . 当  $m \leq 2$  时, 求证  $f(x) > 0$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 15 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>104</sub> 复习参考题 5T<sub>19</sub>) 已知函数  $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 若  $f(x)$  有两个零点, 求  $a$  的取值范围.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

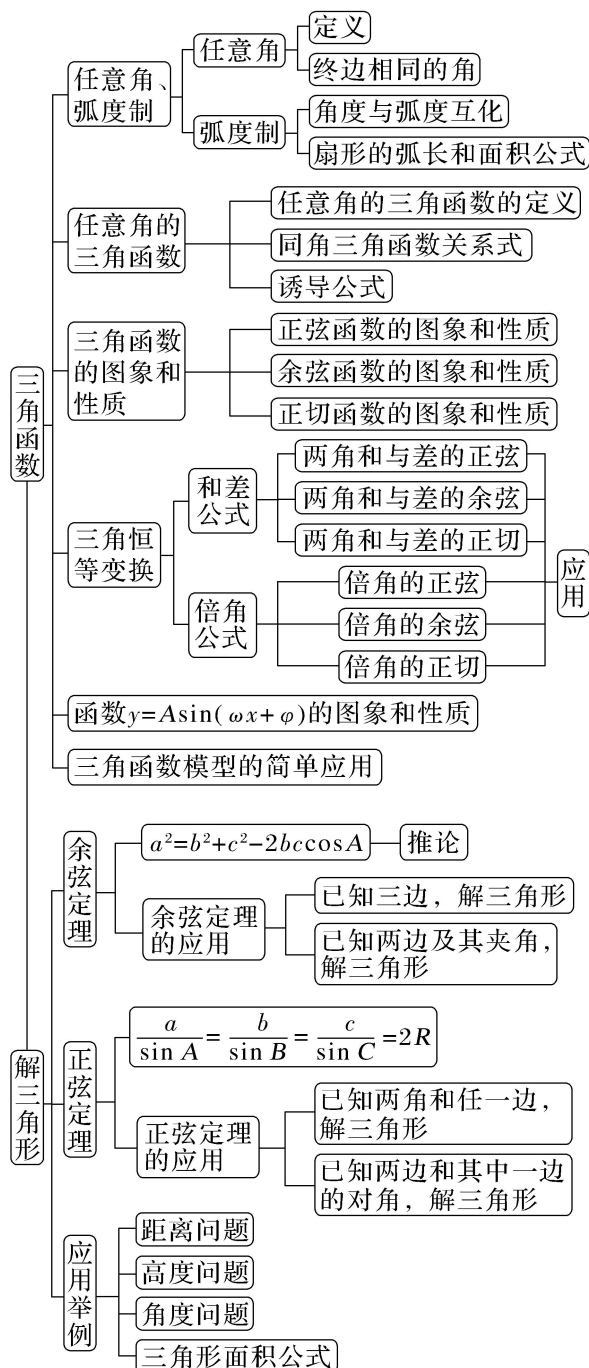
.....



# 三角函数、解三角形

教材宏观把控 系统知识、明确方向

## 宏观把控



## 命题方向

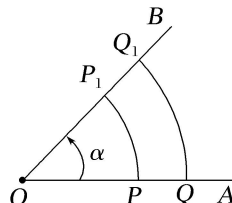
(1)从题型和题量上看，一般是两小(选择题或填空题)一大(解答题)，总的分值是 20 分左右，也有可能和其它内容综合命题；①高考试题中主要考查三角函数的图象及其变换、性质及其应用，以及正弦、余弦定理在解三角形中的应用，有时也以化简求值为背景考查三角恒等变换等问题；②在处理三角函数与解三角形有关问题时，熟记公式是解决此类问题的前提，同

时注意换元法在解决与三角函数性质有关问题中的应用.

(2)本章考查的主要内容有：①三角函数的定义、图象和性质；②利用三角函数公式进行三角恒等变换及化简、求值等；③函数  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  的图象变换、求解析式与性质应用；④以解三角形为载体考查正弦、余弦定理以及三角形面积公式的应用(如 2021 年新高考 I 卷第 19 题，是一种全新的题型，考查了学生探究问题的能力)；⑤以函数、不等式、向量为载体与三角函数有关的综合性问题仍要关注.同时需要注意数形结合思想和函数方程思想在解题中的应用.

**教材探究思考** 挖掘内涵、探究本质

**探究 1** (人教 A 版必修第一册 P<sub>172</sub>)如图，在射线  $OA$  上任取一点  $Q$ (不同于点  $O$ )， $OQ=r_1$ .在旋转过程中，点  $Q$  所形成的圆弧  $\widehat{QQ_1}$  的长为  $l_1$ ， $l_1$  与  $r_1$  的比值是多少？你能得出什么结论？



.....

---



---



---



---



---

**探究 2** (人教 A 版必修第一册 P<sub>203</sub>)函数  $y=A\sin(\omega x+\varphi), x \in \mathbf{R}$  及函数  $y=A\cos(\omega x+\varphi), x \in \mathbf{R}$  (其中  $A, \omega, \varphi$  为常数，且  $A \neq 0, \omega > 0$ ) 的周期仅与自变量的系数有关，那么，如何用自变量的系数表示上述函数的周期呢？

事实上，令  $z=\omega x+\varphi$ ，那么由  $x \in \mathbf{R}$  得  $z \in \mathbf{R}$ ，且函数  $y=A\sin z, z \in \mathbf{R}$  及函数  $y=A\cos z, z \in \mathbf{R}$  的周期都是  $2\pi$ .

因为  $z+2\pi=(\omega x+\varphi)+2\pi=\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi$ ,

所以自变量  $x$  增加  $\frac{2\pi}{\omega}$ ，函数值就重复出现；并且增加量小于  $\frac{2\pi}{\omega}$  时，函数值不会重复出现，即

$T=\frac{2\pi}{\omega}$  是使等式  $A\sin[\omega(x+T)+\varphi]=A\sin(\omega x+\varphi), A\cos[\omega(x+T)+\varphi]=A\cos(\omega x+\varphi)$  成立的最小

正数.从而，函数  $y=A\sin(\omega x+\varphi), x \in \mathbf{R}$  及函数  $y=A\cos(\omega x+\varphi), x \in \mathbf{R}$  的周期  $T=\frac{2\pi}{\omega}$ .

根据这个结论，我们可以由这类函数的解析式直接写出函数的周期.

想一想：上述求函数  $y=A\sin(\omega x+\varphi), x \in \mathbf{R}$  及函数  $y=A\cos(\omega x+\varphi), x \in \mathbf{R}$  周期的方法是否能推广到求一般周期函数的周期？即命题“如果函数  $y=f(x)$  的周期是  $T$ ，那么函数  $y=f(\omega x)(\omega > 0)$  的周期是  $\frac{T}{\omega}$  是否成立？

.....

---



---



---



---



---

探究 3 (人教 A 版必修第一册 P<sub>207</sub>)你能求出函数  $y = \sin\left(-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$ ,  $x \in [-2\pi, 2\pi]$  的单调递增区间吗?

.....

.....

.....

探究 4 (人教 A 版必修第一册 P<sub>219</sub>) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ . 那么对于任意角  $\alpha$ , 此等式成立吗? 若成立, 你会用几种方法予以证明?

.....

.....

.....

探究 5 (人教 A 版必修第一册 P<sub>236</sub>)你能总结一下从正弦函数图象出发, 通过图象变换得到  $y = A\sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0$ ) 的图象的过程与方法吗?

.....

.....

.....

**教材典题重温**      重温典题、追本溯源

典题 1 (人教 A 版必修第一册 P<sub>176</sub> 习题 5.1T<sub>12</sub>)已知相互啮合的两个齿轮, 大轮有 48 齿, 小轮有 20 齿.

- (1) 当大轮转动一周时, 求小轮转动的角度;
- (2) 如果大轮的转速为 180 r/min(转/分), 小轮的半径为 10.5 cm, 那么小轮周上一点每 1 s 转过的弧长是多少?

.....

.....

.....

.....

.....

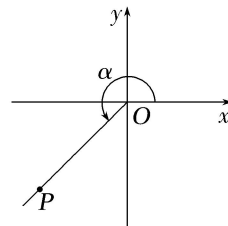
.....

.....

.....

.....

典题 2 (人教 A 版必修第一册 P<sub>179</sub> 例 2) 如图，设  $\alpha$  是一个任意角，它的终边上任意一点  $P$  (不与原点  $O$  重合) 的坐标为  $(x, y)$ ，点  $P$  与原点的距离为  $r$ 。求证： $\sin \alpha = \frac{y}{r}$ ， $\cos \alpha = \frac{x}{r}$ ， $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ 。



.....

.....

.....

.....

.....

---



---



---



---

典题 3 (人教 A 版必修第一册 P<sub>183</sub> 例 7) 求证  $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$ 。

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 4 (人教 A 版必修第一册 P<sub>186</sub> 习题 5.2T<sub>16</sub>) 化简  $\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}}$ ，其中  $\alpha$  为第二象限角。

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 5 (人教 A 版必修第一册 P<sub>186</sub> 习题 5.2T<sub>17</sub>)从本节的例 7 可以看出,  $\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$  就是

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  的一个变形.你能利用同角三角函数的基本关系推导出更多的关系式吗?

.....

.....

.....

.....

.....

典题 6 (人教 A 版必修第一册 P<sub>186</sub> 习题 5.2T<sub>18</sub>)(1)分别计算  $\sin^4 \frac{\pi}{3} - \cos^4 \frac{\pi}{3}$  和  $\sin^2 \frac{\pi}{3} - \cos^2 \frac{\pi}{3}$  的值,

你有什么发现?

(2)任取一个  $\alpha$  的值, 分别计算  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$ ,  $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ , 你又有什么发现?

(3)证明:  $\forall x \in \mathbf{R}, \sin^2 x - \cos^2 x = \sin^4 x - \cos^4 x$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 7 (人教 A 版必修第一册 P<sub>193</sub> 例 4)化简  $\frac{\sin (2\pi-\alpha) \cos (\pi+\alpha) \cos \left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) \cos \left(\frac{11\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos (\pi-\alpha) \sin (3\pi-\alpha) \sin (-\pi-\alpha) \sin \left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 8 (人教 A 版必修第一册 P<sub>193</sub> 例 5) 已知  $\sin(53^\circ - \alpha) = \frac{1}{5}$ , 且  $-270^\circ < \alpha < -90^\circ$ , 求  $\sin(37^\circ + \alpha)$  的值.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 9 (人教 A 版必修第一册 P<sub>195</sub> 习题 5.3T<sub>9</sub>) 化简下列各式, 其中  $n \in \mathbf{Z}$ :

(1)  $\sin\left[\frac{n\pi}{2} + \alpha\right]$ ; (2)  $\cos\left[\frac{n\pi}{2} - \alpha\right]$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 10 (人教 A 版必修第一册 P<sub>206</sub> 例 4) 不通过求值, 比较下列各组数的大小:

(1)  $\sin\left[-\frac{\pi}{18}\right]$  与  $\sin\left[-\frac{\pi}{10}\right]$ ; (2)  $\cos\left[-\frac{23\pi}{5}\right]$  与  $\cos\left[-\frac{17\pi}{4}\right]$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 11 (人教 A 版必修第一册 P<sub>206</sub> 例 5) 求函数  $y = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$ ,  $x \in [-2\pi, 2\pi]$  的单调递增区间.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 12 (人教 A 版必修第一册 P<sub>207</sub> 练习 T<sub>5</sub>) 求函数  $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $x \in [0, \pi]$  的单调递减区间.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**真题再现** (2021·新高考 I 卷) 下列区间中, 函数  $f(x) = 7\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$  单调递增的区间是( )

- A.  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$                       B.  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$   
 C.  $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$                       D.  $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

**点评** 本题和教材习题都是求三角函数的单调区间, 解决此类问题, 首先化简成  $y = A\sin(\omega x + \varphi)$  形式, 再求  $y = A\sin(\omega x + \varphi)$  的单调区间, 只需把  $\omega x + \varphi$  看作一个整体代入  $y = \sin x$  的相应单调区间内即可, 注意要先把  $\omega$  化为正数.

典题 13 (人教 A 版必修第一册 P<sub>212</sub> 例 6) 求函数  $y = \tan\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$  的定义域、周期及单调区间.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**典题 14** (人教 A 版必修第一册 P<sub>214</sub> 习题 5.4T<sub>11</sub>)根据正弦函数、余弦函数的图象，写出使下列不等式成立的  $x$  的取值集合：

(1)  $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} (x \in \mathbf{R})$ ; (2)  $\sqrt{2} + 2\cos x \geq 0 (x \in \mathbf{R})$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**典题 15** (人教 A 版必修第一册 P<sub>214</sub> 习题 5.4T<sub>16</sub>)已知函数  $f(x) = \frac{1}{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

(1)求  $f(x)$  的最小正周期; (2)求  $f(x)$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$  上的最大值和最小值.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**典题 16** (人教 A 版必修第一册 P<sub>214</sub> 习题 5.4T<sub>19</sub>)容易知道，正弦函数  $y = \sin x$  是奇函数，正弦曲线关于原点对称，即原点是正弦曲线的对称中心.除原点外，正弦曲线还有其他对称中心吗？如果有，那么对称中心的坐标是什么？另外，正弦曲线是轴对称图形吗？如果是，那么对称轴的方程是什么？你能用已经学过的正弦函数性质解释上述现象吗？对余弦函数和正切函数，讨论上述同样的问题.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 17 (人教 A 版必修第一册 P<sub>222</sub> 例 6)在  $\triangle ABC$  中,  $\cos A = \frac{4}{5}$ ,  $\tan B = 2$ , 求  $\tan(2A+2B)$  的值.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 18 (人教 A 版必修第一册 P<sub>225</sub> 例 8)求证: (1) $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$ ;

(2) $\sin \theta + \sin \varphi = 2\sin \frac{\theta + \varphi}{2} \cos \frac{\theta - \varphi}{2}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 19 (人教 A 必修第一册 P<sub>227</sub> 例 9)求下列函数的周期, 最大值和最小值:

(1) $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ ; (2) $y = 3\sin x + 4\cos x$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

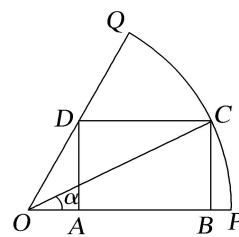
.....

.....

.....

.....

典题 20 (人教 A 版必修第一册 P<sub>227</sub> 例 10) 如图，在扇形  $OPQ$  中，半径  $OP = 1$ ，圆心角  $\angle POQ = \frac{\pi}{3}$ ， $C$  是扇形弧上的动点，矩形  $ABCD$  内接于扇形，记  $\angle POC = \alpha$ ，求当角  $\alpha$  取何值时，矩形  $ABCD$  的面积最大？并求出这个最大面积。



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 21 (人教 A 版必修第一册 P<sub>230</sub> 习题 5.5T<sub>16</sub>) 是否存在锐角  $\alpha, \beta$ ，使  $\alpha + 2\beta = \frac{2\pi}{3}$ ， $\tan \frac{\alpha}{2} \tan \beta = 2 - \sqrt{3}$  同时成立？若存在，求出  $\alpha, \beta$  的度数；若不存在，请说明理由。

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 22 (人教 A 版必修第一册 P<sub>230</sub> 习题 5.5T<sub>17</sub>) (1) 求函数  $f(x) = \sin\left[\frac{\pi}{3} + 4x\right] + \sin\left[4x - \frac{\pi}{6}\right]$  的周期和单调递增区间；

(2) 求函数  $f(x) = a \sin x + b \cos x (a^2 + b^2 \neq 0)$  的最大值和最小值。

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 23 (人教 A 版必修第一册 P<sub>230</sub> 习题 5.5T<sub>18</sub>)观察以下各等式：

$$\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ = \frac{3}{4},$$

$$\sin^2 20^\circ + \cos^2 50^\circ + \sin 20^\circ \cos 50^\circ = \frac{3}{4},$$

$$\sin^2 15^\circ + \cos^2 45^\circ + \sin 15^\circ \cos 45^\circ = \frac{3}{4}.$$

分析上述各式的共同特点，写出能反映一般规律的等式，并对等式的正确性作出证明.

猜想： $\sin^2 \alpha + \cos^2(\alpha + 30^\circ) + \sin \alpha \cos(\alpha + 30^\circ) = \frac{3}{4}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 24 (人教 A 版必修第一册 P<sub>238</sub> 例 2)摩天轮是一种大型转轮状的机械建筑设施，游客坐在摩天轮的座舱里慢慢地往上转，可以从高处俯瞰四周景色.如图，某摩天轮最高点距离地面高度为 120 m，转盘直径为 110 m，设置有 48 个座舱，开启后按逆时针方向匀速旋转，游客在座舱转到距离地面最近的位置进舱，转一周大约需要 30 min.



- (1)游客甲坐上摩天轮的座舱，开始转动  $t$  min 后距离地面的高度为  $H$  m，求在转动一周的过程中， $H$  关于  $t$  的函数解析式；
- (2)求游客甲在开始转动 5 min 后距离地面的高度；
- (3)若甲、乙两人分别坐在两个相邻的座舱里，在运行一周的过程中，求两人距离地面的高度差  $h$ (单位：m)关于  $t$  的函数解析式，并求高度差的最大值(精确到 0.1).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 25 (人教 A 版必修第一册 P<sub>239</sub> 练习 T<sub>3</sub>) 函数  $y = \frac{2}{3} \sin \left[ \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4} \right]$  的图象与正弦曲线有什么关系?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

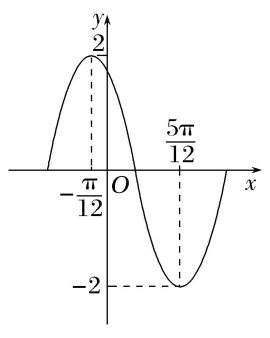
.....

真题再现 (2021·全国乙卷) 把函数  $y=f(x)$  图象上所有点的横坐标缩短到原来的  $\frac{1}{2}$  倍, 纵坐标不变, 再把所得曲线向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度, 得到函数  $y = \sin \left[ x - \frac{\pi}{4} \right]$  的图象, 则  $f(x) = ( \quad )$

- A.  $\sin \left[ \frac{x}{2} - \frac{7\pi}{12} \right]$       B.  $\sin \left[ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} \right]$   
 C.  $\sin \left[ 2x - \frac{7\pi}{12} \right]$       D.  $\sin \left[ 2x + \frac{\pi}{12} \right]$

点评 本题和教材习题考查角度相同, 都属于三角函数图象的变换, 解决此类问题的关键是熟练掌握其变换规则.

典题 26 (人教 A 版必修第一册 P<sub>241</sub> 习题 5.6T<sub>4</sub>) 函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, 0 < \varphi < \pi)$  在一个周期内的图象如图所示, 此函数的解析式为\_\_\_\_\_.



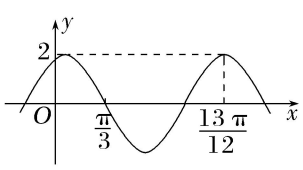
.....

.....

.....

.....

真题再现 (2021·全国甲卷) 已知函数  $f(x) = 2 \cos(\omega x + \varphi) \left( \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2} \right)$  的部分图象如图所示, 则  $f \left( \frac{\pi}{2} \right) =$ \_\_\_\_\_.

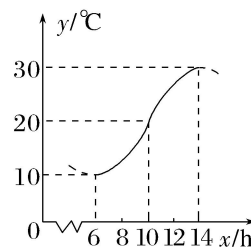


点评 本题和教材习题高度相似, 已知  $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0)$  的部分图象求其解析式时,  $A$  比较容易看图得出, 困难的是求待定系数  $\omega$  和  $\varphi$ , 常用如下两种方法:

(1)由 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 即可求出 $\omega$ ；确定 $\varphi$ 时，若能求出离原点最近的右侧图象上升(或下降)的“零点”横坐标 $x_0$ ，则令 $\omega x_0 + \varphi = 0$ (或 $\omega x_0 + \varphi = \pi$ )，即可求出 $\varphi$ .

(2)代入点的坐标，利用一些已知点(最高点、最低点或“零点”)坐标代入解析式，再结合图形解出 $\omega$ 和 $\varphi$ ，若对 $A$ ， $\omega$ 的符号或对 $\varphi$ 的范围有要求，则可用诱导公式变换使其符合要求.

**典题 27** (人教 A 版必修第一册 P<sub>245</sub> 例 1)如图，某地一天从 6~14 时的温度变化曲线近似满足函数  $y = A\sin(\omega x + \varphi) + b$ .



(1)求这一天 6~14 时的最大温差；

(2)写出这段曲线的函数解析式.

---

---

---

---

---

---

---

---

**典题 28** (人教 A 版必修第二册 P<sub>47</sub> 例 8)在 $\triangle ABC$ 中，已知 $B = 30^\circ$ ， $b = \sqrt{2}$ ， $c = 2$ ，解这个三角形.

---

---

---

---

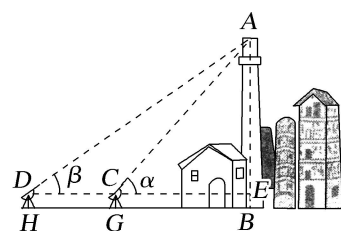
---

---

---

---

**典题 29** (人教 A 版必修第二册 P<sub>50</sub> 例 10)如图， $AB$  是底部  $B$  不可到达的一座建筑物， $A$  为建筑物的最高点.设计一种测量建筑物高度  $AB$  的方法，并求出建筑物的高度.




---

---

---

---

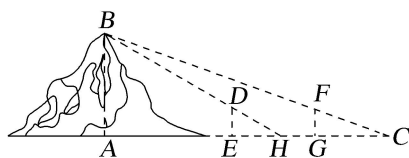
---

---

---

---

**真题再现** (2021·全国乙卷)魏晋时期刘徽撰写的《海岛算经》是关于测量的数学著作，其中第一题是测量海岛的高.如图，点  $E, H, G$  在水平线  $AC$  上， $DE$  和  $FG$  是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度，称为“表高”， $EG$  称为“表距”， $GC$  和  $EH$  都称为“表目距”， $GC$  与  $EH$  的差称为“表目距的差”，则海岛的高  $AB=(\quad)$



- A.  $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表高}$       B.  $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表高}$   
 C.  $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表距}$       D.  $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表距}$

**点评** 本题和教材的例题考查的角度都是求物体的高度，应用的是简单的三角函数的知识，而没有用到正弦定理和余弦定理，都侧重于考查数学知识在实际问题中的应用.

**典题 30** (人教 A 版必修第二册 P<sub>54</sub> 习题 6.4T<sub>22</sub>)已知  $a, b, c$  分别为  $\triangle ABC$  三个内角  $A, B, C$  的对边，且  $a \cos C + \sqrt{3} a \sin C - b - c = 0$ .

(1)求  $A$ ; (2)若  $a=2$ ，则  $\triangle ABC$  的面积为  $\sqrt{3}$ ，求  $b, c$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**真题再现** (2021·新高考 II 卷)在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  所对的边长分别为  $a, b, c$ ， $b=a+1$ ， $c=a+2$ .

- (1)若  $2 \sin C = 3 \sin A$ ，求  $\triangle ABC$  的面积；  
 (2)是否存在正整数  $a$ ，使得  $\triangle ABC$  为钝角三角形？若存在，求出  $a$  的值；若不存在，说明理由.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

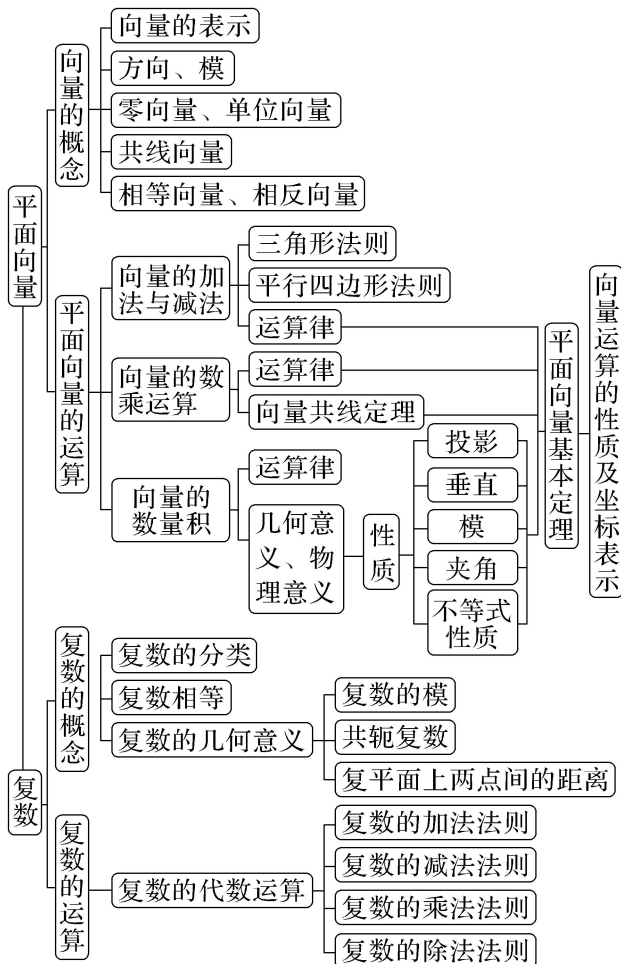
**点评** 本题和教材习题的考查角度、考查方式一样，都是给出含有三角形的边、角关系的三角函数式，结合三角恒等变换求解，事实上这类问题是高考试题中解三角形问题的典型的题型.



# 平面向量、复数

教材宏观把控 系统知识、明确方向

## 宏观把控



## 命题方向

(1)高考对平面向量与复数的考查较为稳定，都是一个选择或填空题，复数试题为容易题，向量的难度为中档或偏下。①在高考试题中以平面向量的线性运算、平面向量的数量积为主要考查点，考查学生对平面向量的基本知识和基本解题方法的掌握情况。②在处理与平面向量有关的问题时，注意坐标法和基底法在解题中的应用。重点考查的学科核心素养为数学运算和逻辑推理。

(2)向量的考查内容为：①向量的概念与线性运算，②以平面向量基本定理为核心的向量的坐标表示、向量的坐标运算，③以平面向量的数量积运算为载体，考查向量的夹角、模以及垂直的充要条件的应用。

(3)复数考查的内容主要集中在：①复数的相关概念、几何意义，②复数的四则运算，一般为除法运算。

教材探究思考 挖掘内涵、探究本质

探究 1 (人教 A 版必修第二册 P<sub>8</sub>)向量加法的平行四边形法则与三角形法则一致吗？为什么？

探究 2 (人教 A 版必修第二册 P<sub>9</sub>) (1) 如果向量  $a, b$  共线，它们的加法与数的加法有什么关系？你能作出向量  $a+b$  吗？

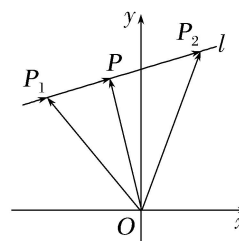
(2) 结合例 1，探索  $|a+b|, |a|, |b|$  之间的关系。

.....

.....

.....

探究 3 (人教 A 版必修第二册 P<sub>33</sub>) 如图，线段  $P_1P_2$  的端点  $P_1, P_2$  的坐标分别是  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ，点  $P$  是直线  $P_1P_2$  上的一点。当  $\vec{P_1P} = \lambda \vec{PP_2}$  时，点  $P$  的坐标是什么？



.....

.....

.....

探究 4 (人教 A 版必修第二册 P<sub>69</sub>) 复数集  $C$  与实数集  $R$  之间有什么关系？

.....

.....

.....

探究 5 (人教 A 版必修第二册 P<sub>72</sub>) 若  $z_1, z_2$  是共轭复数，那么在复平面内它们所对应的点有怎样的关系？

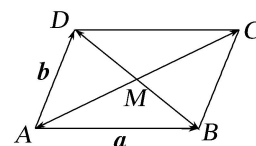
.....

.....

.....

**教材典题重温** 重温典题、追本溯源

典题 1 (人教 A 版必修第二册 P<sub>14</sub> 例 6) 如图， $\square ABCD$  的两条对角线相交于点  $M$ ，且  $\vec{AB} = a, \vec{AD} = b$ ，用  $a, b$  表示  $\vec{MA}, \vec{MB}, \vec{MC}$  和  $\vec{MD}$ 。



.....

.....

.....

.....

.....

典题 2 (人教 A 版必修第二册 P<sub>16</sub> 例 8) 已知  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  是两个不共线的向量, 向量  $\mathbf{b}-t\mathbf{a}$ ,  $\frac{1}{2}\mathbf{a}-\frac{3}{2}\mathbf{b}$  共线, 求实数  $t$  的值.

.....

.....

.....

.....

.....

典题 3 (人教 A 版必修第二册 P<sub>21</sub> 例 12) 已知  $|\mathbf{a}|=6$ ,  $|\mathbf{b}|=4$ ,  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角为  $60^\circ$ , 求  $(\mathbf{a}+2\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-3\mathbf{b})$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 4 (人教 A 版必修第二册 P<sub>21</sub> 例 13) 已知  $|\mathbf{a}|=3$ ,  $|\mathbf{b}|=4$ , 且  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  不共线. 当  $k$  为何值时, 向量  $\mathbf{a}+k\mathbf{b}$  与  $\mathbf{a}-k\mathbf{b}$  互相垂直?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 5 (人教 A 版必修第二册 P<sub>22</sub> 练习 T<sub>3</sub>) 求证:  $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2-(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2=4\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 6 (人教 A 版必修第二册 P<sub>24</sub> 习题 6.2T<sub>18</sub>) 已知  $|\mathbf{a}|=4$ ,  $|\mathbf{b}|=3$ , 且  $(2\mathbf{a}-3\mathbf{b})\cdot(2\mathbf{a}+\mathbf{b})=61$ , 求  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角  $\theta$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 7 (人教 A 版必修第二册 P<sub>24</sub> 习题 6.2T<sub>21</sub>) 已知  $\triangle ABC$  的外接圆圆心为  $O$ , 且  $2\vec{AO}=\vec{AB}+\vec{AC}$ ,  $|\vec{OA}|=|\vec{AB}|$ , 则向量  $\vec{BA}$  在向量  $\vec{BC}$  上的投影向量为( )

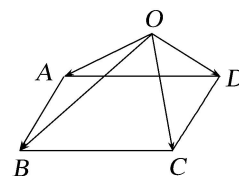
- A.  $\frac{1}{4}\vec{BC}$                       B.  $\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{BC}$
- C.  $-\frac{1}{4}\vec{BC}$                       D.  $-\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{BC}$

.....

.....

.....

典题 8 (人教 A 版必修第二册 P<sub>24</sub> 习题 6.2T<sub>22</sub>) 如图,  $O$  是平行四边形  $ABCD$  外一点, 用  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$  表示  $\vec{OD}$ .



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 9 (人教 A 版必修第二册 P<sub>24</sub> 习题 6.2T<sub>23</sub>) 已知  $O$  为四边形  $ABCD$  所在平面内一点, 且向量

$\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD}$  满足等式  $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}$ .

(1) 作出满足条件的四边形  $ABCD$ .

(2) 四边形  $ABCD$  有什么特点? 请证明你的猜想.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

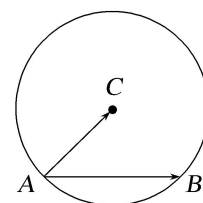
.....

.....

.....

典题 10 (人教 A 版必修第二册 P<sub>24</sub> 习题 6.2T<sub>24</sub>) 如图, 在  $\odot C$  中, 是不是只需

知道  $\odot C$  的半径或弦  $AB$  的长度, 就可以求出  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  的值?



.....

.....

.....

.....

.....

.....

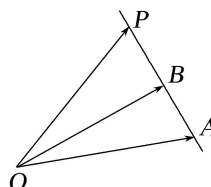
.....

.....

.....

.....

典题 11 (人教 A 版必修第二册 P<sub>26</sub> 例 1) 如图,  $\vec{OA}, \vec{OB}$  不共线, 且  $\vec{AP} = t\vec{AB} (t \in \mathbf{R})$ , 用  $\vec{OA}, \vec{OB}$  表示  $\vec{OP}$ . 观察  $\vec{OP} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}$ , 你有什么发现?



.....

.....

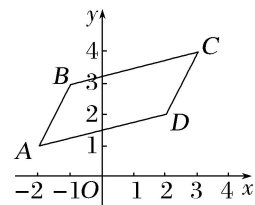
.....

.....

.....

.....

典题 12 (人教 A 版必修第二册 P<sub>30</sub> 例 5) 如图，已知  $\square ABCD$  的三个顶点  $A$ ， $B$ ， $C$  的坐标分别是  $(-2, 1)$ ， $(-1, 3)$ ， $(3, 4)$ ，求顶点  $D$  的坐标.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 13 (人教 A 版必修第二册 P<sub>31</sub> 例 7) 已知  $\mathbf{a}=(4, 2)$ ， $\mathbf{b}=(6, y)$ ，且  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ ，求  $y$ .

.....

.....

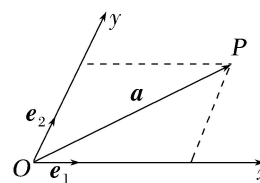
.....

.....

.....

**真题再现** (2021·全国乙卷) 已知向量  $\mathbf{a}=(2, 5)$ ， $\mathbf{b}=(\lambda, 4)$ ，若  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ ，则  $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$ .

典题 14 (人教 A 版必修第二册 P<sub>37</sub> 习题 6.3T<sub>15</sub>) 如图，设  $Ox$ ， $Oy$  是平面内相交成  $60^\circ$  角的两条数轴， $\mathbf{e}_1$ ， $\mathbf{e}_2$  分别是与  $x$  轴、 $y$  轴正方向同向的单位向量. 若向量  $\vec{OP} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ ，则把有序数对  $(x, y)$  叫做向量  $\vec{OP}$  在坐标系  $xOy$  中的坐标. 设  $\vec{OP} = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ .



- (1) 计算  $|\vec{OP}|$  的大小；
- (2) 根据平面向量基本定理判断，本题中对向量坐标的规定是否合理.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 15 (人教 A 版必修第二册 P<sub>37</sub> 习题 6.3T<sub>16</sub>)用向量方法证明：对于任意的  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ ，恒有不等式  $(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$ 。

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 16 (人教 A 版必修第二册 P<sub>40</sub> 例 3)在日常生活中，我们有这样的经验：两个人共提一个旅行包，两个拉力夹角越大越费力；在单杠上做引体向上运动，两臂的夹角越小越省力，你能从数学的角度解释这种现象吗？

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 17 (人教 A 版必修第二册 P<sub>52</sub> 习题 6.4T<sub>1</sub>)若非零向量  $\vec{AB}$  与  $\vec{AC}$  满足  $\left[ \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} \right] \cdot \vec{BC} = 0$ ，且

$$\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} \cdot \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} = \frac{1}{2}$$

，则  $\triangle ABC$  为( )

- A. 三边均不相等的三角形
- B. 直角三角形
- C. 底边和腰不相等的等腰三角形
- D. 等边三角形

.....

.....

.....

典题 18 (人教 A 版必修第二册 P<sub>52</sub> 习题 6.4T<sub>2</sub>) 已知  $O, N, P$  在  $\triangle ABC$  所在平面内, 满足  $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}|$ ,  $\vec{NA} + \vec{NB} + \vec{NC} = \mathbf{0}$ , 且  $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = \vec{PB} \cdot \vec{PC} = \vec{PC} \cdot \vec{PA}$ , 则点  $O, N, P$  依次是  $\triangle ABC$  的( )

- A.重心, 外心, 垂心                      B.重心, 外心, 内心  
C.外心, 重心, 垂心                      D.外心, 重心, 内心

.....  
.....  
.....

典题 19 (人教 A 版必修第二册 P<sub>60</sub> 复习参考题 6T<sub>8</sub>) 已知向量  $\mathbf{a} = (1, 0)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 1)$ . 当  $\lambda$  为何值时,  $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$  与  $\mathbf{a}$  垂直?

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

**真题再现** (2021·全国乙卷) 已知向量  $\mathbf{a} = (1, 3)$ ,  $\mathbf{b} = (3, 4)$ , 若  $(\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$ , 则  $\lambda =$  \_\_\_\_\_.

**点评** 教材习题和高考题高度类似, 都是根据向量垂直的充要条件求参数, 其一般方法为根据平面向量数量积的坐标表示以及向量的线性运算列出方程, 即可解出.

典题 20 (人教 A 版必修第二册 P<sub>61</sub> 复习参考题 6T<sub>13(5)</sub>) 已知等边三角形  $ABC$  的边长为 1,  $\vec{BC} = \mathbf{a}$ ,  $\vec{CA} = \mathbf{b}$ ,  $\vec{AB} = \mathbf{c}$ , 那么  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} =$  ( )

- A.3              B.-3              C. $\frac{3}{2}$               D. $-\frac{3}{2}$

.....  
.....  
.....

**真题再现** (2021·新高考 II 卷)已知向量  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ ,  $|\mathbf{a}| = 1$ ,  $|\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 2$ , 则  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} =$  \_\_\_\_\_.

**点评** 本题和教材习题考查的都是数量积的基本运算, 并且在形式上完全相同, 不同之处是高考试题没有给出各向量的夹角, 需要通过平方进行转化. 而事实上, 教材习题中的条件也是满足  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ , 也就是说教材习题的解法可以按照高考题的解法进行, 看起来, 在学习教材时, 对习题进行深刻的挖掘还是很有必要的.

**典题 21** (人教 A 版必修第二册 P<sub>61</sub> 复习参考题 6T<sub>13(6)</sub>)若平面向量  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  两两的夹角相等, 且  $|\mathbf{a}| = 1$ ,  $|\mathbf{b}| = 1$ ,  $|\mathbf{c}| = 3$ , 则  $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}| = ( \quad )$

- A.2                      B.5  
C.2 或 5                D. $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{5}$

**真题再现** (2021·全国甲卷)若向量  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  满足  $|\mathbf{a}| = 3$ ,  $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 5$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1$ , 则  $|\mathbf{b}| =$  \_\_\_\_\_.

**点评** 高考题和教材习题考查的都是求向量的模, 一般方法就是根据题目条件, 利用  $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$  的平方得出答案.

**典题 22** (人教 A 版必修第二册 P<sub>61</sub> 复习参考题 6T<sub>14</sub>)已知  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  为非零向量, 证明下列结论, 并解释其几何意义.

(1)  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ ; (2) 若  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{d}$ , 则  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| \Leftrightarrow \mathbf{c} \perp \mathbf{d}$ .

**典题 23** (人教 A 版必修第二册 P<sub>69</sub> 例 1)当实数  $m$  取什么值时, 复数  $z = m + 1 + (m - 1)i$  是下列数?

(1)实数; (2)虚数; (3)纯虚数.

典题 24 (人教 A 版必修第二册 P<sub>73</sub> 习题 7.1T<sub>3</sub>)求适合下列方程的实数  $x$  与  $y$  的值：

(1) $(3x+2y)+(5x-y)i=17-2i$ ; (2) $(x+y-3)+(x-4)i=0$ .

.....

.....

.....

**真题再现** (2021·浙江卷)已知  $a \in \mathbf{R}$ ,  $(1+ai)i=3+i$ ( $i$  为虚数单位), 则  $a=(\quad)$

- A. -1      B. 1      C. -3      D. 3

**点评** 本题和教材习题考查角度完全一致, 都是利用复数相等的条件求参数值, 且其难度小于教材习题的难度.

典题 25 (人教 A 版必修第二册 P<sub>79</sub> 例 5)计算 $(1+2i) \div (3-4i)$ .

.....

.....

.....

**真题再现** (2021·天津卷) $i$  是虚数单位, 复数  $\frac{9+2i}{2+i} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**点评** 本题和教材例题考查的角度完全相同, 都是简单的复数除法运算.

典题 26 (人教 A 版必修第二册 P<sub>79</sub> 例 6)在复数范围内解下列方程.

(1) $x^2+2=0$ ;

(2) $ax^2+bx+c=0$ , 其中  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , 且  $a \neq 0, \Delta = b^2 - 4ac < 0$ .

.....

.....

.....

典题 27 (人教 A 版必修第二册 P<sub>95</sub> 复习参考题 7T<sub>8</sub>)(1)求  $i^1, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8$  的值;

(2)由(1)推测  $i^n(n \in \mathbf{N}^*)$  的值有什么变化规律, 并把这个规律用式子表示出来.

.....

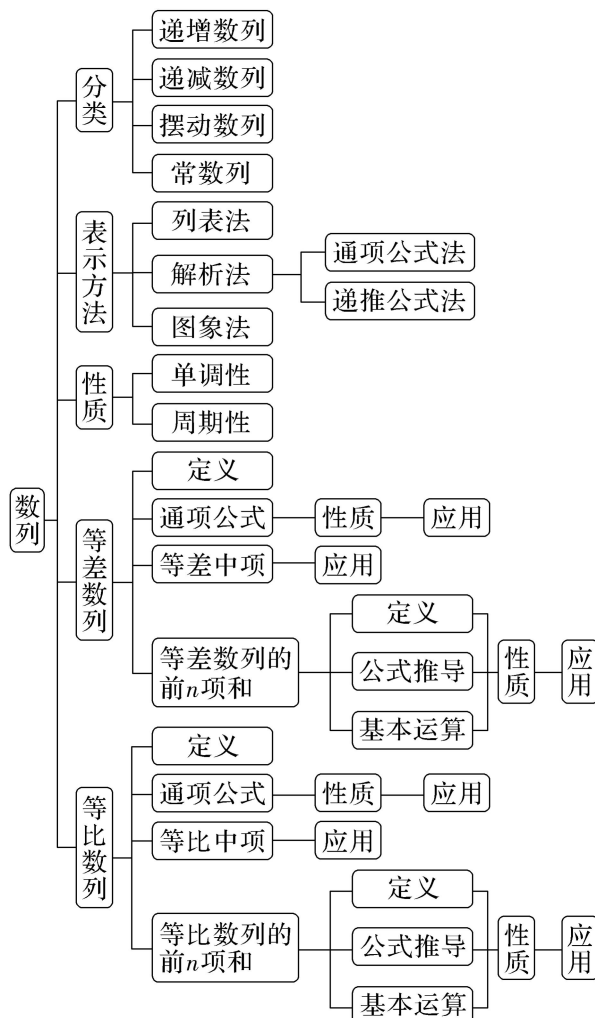
.....

.....



教材宏观把控 系统知识、明确方向

## 宏观把控



## 命题方向

(1)本章高考试题难度以中档为主，题型一般为一小(选择题或填空题)一大(解答题)，总分值约为 17 分.①在高考试题中多以等差数列、等比数列的基本量运算为载体，以数列递推关系形式出现，考查数列求和及数列最值等综合问题.②在处理等差、等比数列基本量运算，递推关系求通项，数列求和等问题时，常用公式法.③本章重点考查的学科核心素养为数学运算和逻辑推理.

(2)考查内容也较为稳定，主要是以下几个方面：①以等差、等比数列基本量的运算为载体，考查等差数列、等比数列的概念、性质、通项公式的求解与应用；②考查数列求和的综合问题，涉及数列的最值及解决方法；③考查数学文化、实际应用为背景的数列问题.

教材探究思考 挖掘内涵、探究本质

探究 1 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>14</sub>)观察等差数列的通项公式，你认为它与我们熟悉的哪一类函数有关？

.....

.....

.....

探究 2 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>22</sub>)已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n = pn^2 + qn + r$ ，其中  $p, q, r$  为常数，且  $p \neq 0$ 。观察数列  $\{a_n\}$  的特点，研究它是一个怎样的数列，并证明你的结论。

.....

.....

.....

探究 3 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>24</sub>)已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，若  $a_1 = 10$ ，当  $d = -3.5$  时， $S_n$  有最大值吗？考虑更一般的等差数列前  $n$  项和的最大值问题。

.....

.....

.....

探究 4 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>32</sub>)已知  $b > 0$  且  $b \neq 1$ ，如果数列  $\{a_n\}$  是等差数列，那么数列  $\{ba_n\}$  是否一定是等比数列？如果数列  $\{a_n\}$  是各项均为正的等比数列，那么数列  $\{\log_b a_n\}$  是否一定是等差数列？

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**典题 1** (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>9</sub> 习题 4.1T<sub>7</sub>) 已知函数  $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x} (x \in \mathbf{R})$ , 设数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = f(n) (n \in \mathbf{N}^*)$ .

(1) 求证  $a_n \geq \frac{1}{2}$ . (2)  $\{a_n\}$  是递增数列还是递减数列? 为什么?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**典题 2** (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>16</sub> 例 3) 某公司购置了一台价值为 220 万元的设备, 随着设备在使用过程中老化, 其价值会逐年减少. 经验表明, 每经过一年其价值就会减少  $d$  ( $d$  为正常数) 万元. 已知这台设备的使用年限为 10 年, 超过 10 年, 它的价值将低于购进价值的 5%, 设备将报废. 请确定  $d$  的取值范围.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



**典题 5** (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>18</sub> 练习 T<sub>5</sub>) 已知一个无穷等差数列  $\{a_n\}$  的首项为  $a_1$ ，公差为  $d$ .

(1) 将数列中的前  $m$  项去掉，其余各项组成一个新的数列，这个新数列是等差数列吗？如果是，它的首项和公差分别是多少？

(2) 取出数列中的所有奇数项，组成一个新的数列，这个新数列是等差数列吗？如果是，它的首项和公差分别是多少？

(3) 取出数列中所有序号为 7 的倍数的项，组成一个新的数列，它是等差数列吗？你能根据得到的结论作出一个猜想吗？

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**典题 6** (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>21</sub> 例 6) 已知数列  $\{a_n\}$  是等差数列.

(1) 若  $a_1=7$ ,  $a_{50}=101$ , 求  $S_{50}$ ;

(2) 若  $a_1=2$ ,  $a_2=\frac{5}{2}$ , 求  $S_{10}$ ;

(3) 若  $a_1=\frac{1}{2}$ ,  $d=-\frac{1}{6}$ ,  $S_n=-5$ , 求  $n$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 7 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>21</sub> 例 7) 已知一个等差数列  $\{a_n\}$  前 10 项的和是 310, 前 20 项的和是 1 220. 由这些条件能确定这个等差数列的首项和公差吗?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 8 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>23</sub> 练习 T<sub>4</sub>) 在等差数列  $\{a_n\}$  中, 若  $S_{15} = 5(a_2 + a_6 + a_k)$ , 求  $k$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 9 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>23</sub> 练习 T<sub>5</sub>) 已知一个等差数列的项数为奇数, 其中所有奇数项的和为 290, 所有偶数项的和为 261. 求此数列中间一项的值以及项数.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 10 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>23</sub> 例 9) 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，若  $a_1 = 10$ ，公差  $d = -2$ ，则  $S_n$  是否存在最大值？若存在，求  $S_n$  的最大值及取得最大值时  $n$  的值；若不存在，请说明理由.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 11 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>24</sub> 练习 T<sub>5</sub>) 已知数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = \frac{n-2}{2n-15}$ ，前  $n$  项和为  $S_n$ ，求  $S_n$  取得最小值时  $n$  的值.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 12 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>24</sub> 习题 4.2T<sub>2</sub>) 已知  $\{a_n\}$  为等差数列， $a_1 + a_3 + a_5 = 105$ ， $a_2 + a_4 + a_6 = 99$ . 求  $a_{20}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**真题再现** (2020·全国 I 卷) 设  $\{a_n\}$  是等比数列, 且  $a_1+a_2+a_3=1$ ,  $a_2+a_3+a_4=2$ , 则  $a_6+a_7+a_8=( )$

- A.12                      B.24                      C.30                      D.32

**点评** 本题在所给条件的形式上与教材习题很类似, 只是把等差数列改为了等比数列, 解题的难点和关键点分别是求公差、公比.

**典题 13** (人教 A 版选择性必修第二册 P25 习题 4.2T7) 已知  $S_n$  是等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和.

(1) 证明  $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$  是等差数列;

(2) 设  $T_n$  为数列  $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$  的前  $n$  项和, 若  $S_4=12$ ,  $S_8=40$ , 求  $T_n$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**典题 14** (人教 A 版选择性必修第二册 P25 习题 4.2T8) 已知两个等差数列 2, 6, 10, ..., 190 及 2, 8, 14, ..., 200, 将这两个等差数列的公共项按从小到大的顺序组成一个新数列. 求这个新数列的各项之和.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**真题再现** (2020·新高考全国 I 卷)将数列  $\{2n-1\}$  与  $\{3n-2\}$  的公共项从小到大排列得到数列  $\{a_n\}$ ，则  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为\_\_\_\_\_.

**点评** 本题和教材习题考查角度完全相同，由于不用判断求和数列的项数，所以其难度要小于教材习题，解决此类问题的关键是清楚新组合的数列的公差是两个数列公差的最小公倍数.

**典题 15** (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>25</sub> 习题 4.2T<sub>10</sub>)已知等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ ，求

证  $\frac{a_m - a_n}{m - n} = d$ . 你能从直线的斜率角度来解释这个结果吗？

.....

.....

.....

.....

.....

.....

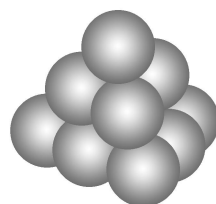
.....

.....

.....

.....

**典题 16** (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>26</sub> 习题 4.2T<sub>12</sub>)如图的形状出现在南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法·商功》中，后人称为“三角垛”。“三角垛”的最上层有 1 个球，第二层有 3 个球，第三层有 6 个球……设各层球数构成一个数列  $\{a_n\}$ .



- (1)写出数列  $\{a_n\}$  的一个递推公式；
- (2)根据(1)中的递推公式，写出数列  $\{a_n\}$  的一个通项公式.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 17 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>30</sub> 例 2) 已知等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ ，试用  $\{a_n\}$  的第  $m$  项  $a_m$  表示  $a_n$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 18 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>31</sub> 例 4) 用 10 000 元购买某个理财产品一年.

(1) 若以月利率 0.400% 的复利计息，12 个月能获得多少利息(精确到 1 元)?

(2) 若以季度复利计息，存 4 个季度，则当每季度利率为多少时，按季结算的利息不少于按月结算的利息(精确到  $10^{-5}$ )?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 19 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>34</sub> 练习 T<sub>5</sub>) 已知数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = \frac{n^3}{3^n}$ , 求使  $a_n$  取得最大值时的  $n$  的值.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 20 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>35</sub> 例 7) 已知数列  $\{a_n\}$  是等比数列.

(1) 若  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $q = \frac{1}{2}$ , 求  $S_8$ ;

(2) 若  $a_1 = 27$ ,  $a_9 = \frac{1}{243}$ ,  $q < 0$ , 求  $S_8$ ;

(3) 若  $a_1 = 8$ ,  $q = \frac{1}{2}$ ,  $S_n = \frac{31}{2}$ , 求  $n$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 21 (人教 A 版选择性必修第二册 P<sub>36</sub> 例 8) 已知等比数列  $\{a_n\}$  的首项为  $-1$ , 前  $n$  项和为  $S_n$ . 若  $\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{31}{32}$ , 求公比  $q$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....







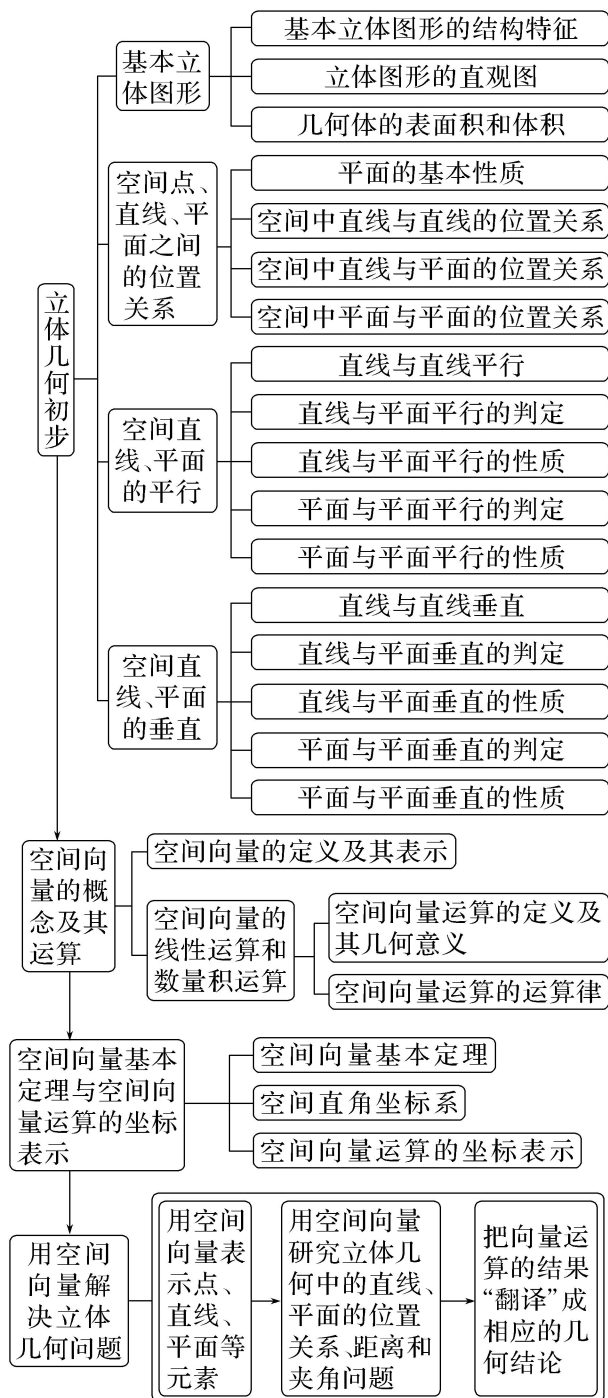




# 立体几何与空间向量

教材宏观把控 系统知识、明确方向

## 宏观把控



## 命题方向

(1)空间向量与立体几何是高考的热点，难度以中档或偏难为主，题型涵盖选择，填空和解答题，其中解答题必考，总分值大约 22 分。

①从近几年高考情况来看，本章内容在客观题中主要考查空间几何体的表面积、体积以

及与球相关的问题，如 2021 年新高考 I 卷第 12 题借助于空间几何体为载体，考查了周长、体积的求解及线线垂直、线面垂直的探求、空间向量法在解决立体几何位置关系的应用，属于难度较大的试题.②在解答题中主要考查线、面位置关系的证明及空间角的计算，如 2021 年新高考 I 卷第 20 题第(1)问考查了证明线线垂直的方法，第(2)问考查了线面角、体积的求解，建系是解题的关键.可以用试点法解决，坐标原点可以是顶点、底面边上的一点或垂心、重心，要根据空间几何体的结构特征确定，并且建系后，要能求出有关点的坐标，难度不大，但需要计算细心，防止得分不全的情况.③本章重点考查的核心素养为逻辑推理、直观想象和数学运算.

(2)空间向量与立体几何考查的主要内容有：①以空间几何体或与球的切、接为背景考查几何体的结构特征、表面积、体积、球的性质等；②以空间几何体为载体考查空间线、面位置关系的证明以及空间角和距离的计算；③以空间向量为辅助工具解决空间角的计算与线、面位置关系的证明.

**教材探究思考** 挖掘内涵、探究本质

**探究 1** (人教 A 版必修第二册 P<sub>102</sub>)圆柱可以由矩形旋转得到，圆锥可以由直角三角形旋转得到.圆台是否也可以由平面图形旋转得到？如果可以，由什么平面图形旋转得到？如何旋转？

.....

.....

.....

**探究 2** (人教 A 版必修第二册 P<sub>117</sub>)圆柱、圆锥、圆台的体积公式之间有什么关系？结合棱柱、棱锥、棱台的体积公式，你能将它们统一成柱体、锥体、台体的体积公式吗？柱体、锥体、台体的体积公式之间又有怎样的关系？

.....

.....

.....

.....

**探究 3** (人教 A 版必修第二册 P<sub>151</sub>)两条相交直线可以确定一个平面，两条平行直线也可以确定一个平面，那么定理“如果一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直，那么该直线与此平面垂直”中的“两条相交直线”可以改为“两条平行直线”吗？你能从向量的角度解释原因吗？如果改为“无数条直线”呢？

.....

.....

.....



教材典题重温 重温典题、追本溯源

典题 1 (人教 A 版必修第二册 P<sub>116</sub> 练习 T<sub>4</sub>)求证：直三棱柱的任意两个侧面的面积和大于第三个侧面的面积.

.....

.....

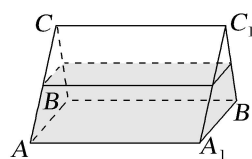
.....

.....

.....

.....

典题 2 (人教 A 版必修第二册 P<sub>120</sub> 习题 8.3T<sub>3</sub>)如图，一个三棱柱形容器中盛有水，侧棱  $AA_1=8$ .若侧面  $AA_1B_1B$  水平放置时，水面恰好过  $AC, BC, A_1C_1, B_1C_1$  的中点.那么当底面  $ABC$  水平放置时，水面高为多少？



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

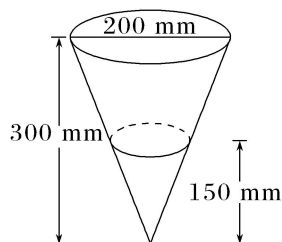
.....

.....

**真题再现** (2021·北京卷)对 24 小时内降水在平地上的积水厚度(mm)进行如下定义：

0~10	10~25	25~50	50~100
小雨	中雨	大雨	暴雨

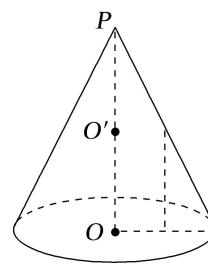
小明用一个圆锥形容器接了 24 小时的雨水，则这一天的雨水属于哪个等级( )



- A.小雨      B.中雨      C.大雨      D.暴雨

点评 本题与教材习题的解题思路完全一样，都是利用变换两类几何体的体积相等求水面的高度.

典题 3 (人教 A 版必修第二册 P<sub>120</sub> 习题 8.3T<sub>4</sub>)如图,圆锥  $PO$  的底面直径和高均是  $a$ , 过  $PO$  的中点  $O'$  作平行于底面的截面, 以该截面为底面挖去一个圆柱, 求剩下几何体的表面积和体积.



.....

.....

---



---



---



---



---



---



---

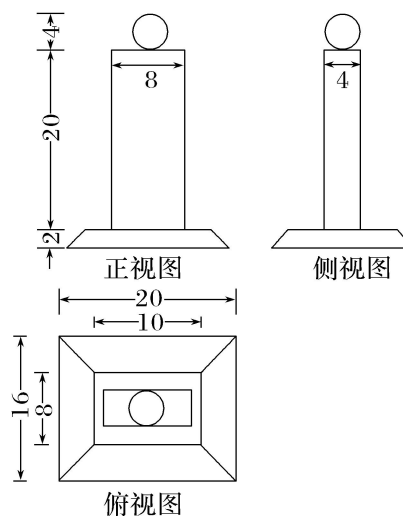


---



---

典题 4 (人教 A 版必修第二册 P<sub>120</sub> 习题 8.3T<sub>9</sub>)如图是一个奖杯的三视图, 试根据奖杯的三视图计算它的表面积和体积.(可用计算工具, 尺寸如图, 单位: cm,  $\pi$  取 3.14, 结果取整数.)



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

---



---



---



---



---



---



---



---



---

点评 千万不要认为三视图不在高考的范围内, 此内容在初中学过, 在教材中也出现了, 高考试题中出现了正常.

典题 5 (人教 A 版必修第二册 P<sub>137</sub> 例 2) 求证：空间四边形相邻两边中点的连线平行于经过另外两边的平面.

.....

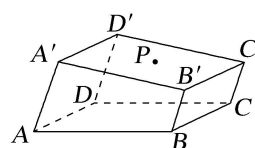
.....

.....

.....

.....

典题 6 (人教 A 版必修第二册 P<sub>138</sub> 例 3) 如图所示的一块木料中，棱  $BC$  平行于面  $A'C'$ .



(1) 要经过面  $A'C'$  内的一点  $P$  和棱  $BC$  将木料锯开，在木料表面应该怎样画线？

(2) 所画的线与平面  $AC$  是什么位置关系？

.....

.....

.....

.....

.....

.....

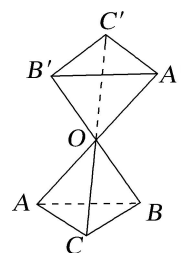
.....

.....

.....

.....

典题 7 (人教 A 版必修第二册 P<sub>144</sub> 习题 8.5T<sub>8</sub>) 如图，直线  $AA'$ ， $BB'$ ， $CC'$  相交于点  $O$ ， $AO=A'O$ ， $BO=B'O$ ， $CO=C'O$ ，求证：平面  $ABC \parallel$  平面  $A'B'C'$ .



.....

.....

.....

.....

.....

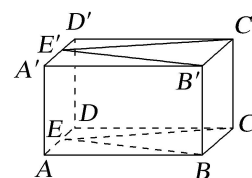
.....

.....

.....

.....

典题 8 (人教 A 版必修第二册 P<sub>144</sub> 习题 8.5T<sub>9</sub>) 如图,  $E, E'$  分别为长方体  $ABCD-A'B'C'D'$  的棱  $AD, A'D'$  的中点, 求证:  $\angle BEC = \angle B'E'C'$ .



.....

---



---

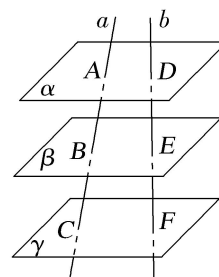


---



---

典题 9 (人教 A 版必修第二册 P<sub>144</sub> 习题 8.5T<sub>13</sub>) 如图,  $\alpha // \beta // \gamma$ , 直线  $a$  与  $b$  分别交  $\alpha, \beta, \gamma$  于点  $A, B, C$  和点  $D, E, F$ , 求证:  $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ .



.....

---



---



---



---

典题 10 (人教 A 版必修第二册 P<sub>145</sub> 习题 8.5T<sub>15</sub>) 如图, 透明塑料制成的长方体容器  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  内灌进一些水, 固定容器底面一边  $BC$  于地面上, 再将容器倾斜. 随着倾斜度的不同, 有下面五个命题:

- (1) 有水的部分始终呈棱柱形; (2) 没有水的部分始终呈棱柱形; (3) 水面  $EFGH$  所在四边形的面积为定值; (4) 棱  $A_1D_1$  始终与水面所在平面平行; (5) 当容器倾斜如图(3)所示时,  $BE \cdot BF$  是定值. 其中所有正确命题的序号是\_\_\_\_\_，为什么?

.....

---



---



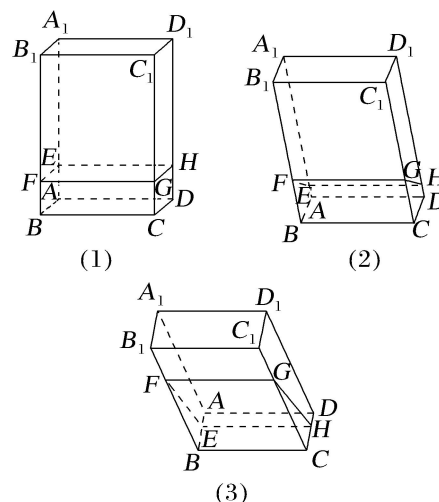
---



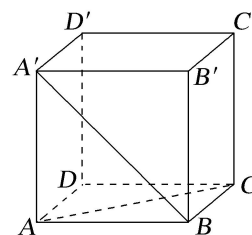
---



---



典题 11 (人教 A 版必修第二册 P<sub>147</sub> 例 1)如图，已知正方体  $ABCD-A'B'C'D'$ .



- (1)哪些棱所在的直线与直线  $AA'$  垂直?
- (2)求直线  $BA'$  与  $CC'$  所成的角的大小.
- (3)求直线  $BA'$  与  $AC$  所成的角的大小.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

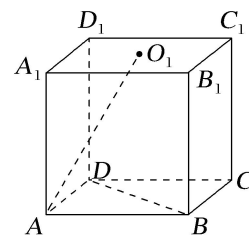
.....

**真题再现** (2021·全国乙卷)在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $P$  为  $B_1D_1$  的中点, 则直线  $PB$  与  $AD_1$  所成的角为( )

- A.  $\frac{\pi}{2}$       B.  $\frac{\pi}{3}$       C.  $\frac{\pi}{4}$       D.  $\frac{\pi}{6}$

**点评** 本题和教材例题类似, 无论是问题的载体, 还是考查角度、解题方法完全一样. 其实就是在教材例题的基础上稍微换了一条直线而已.

典题 12 (人教 A 版必修第二册 P<sub>147</sub> 例 2)如图, 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $O_1$  为底面  $A_1B_1C_1D_1$  的中心. 求证:  $AO_1 \perp BD$ .



.....

.....

.....

.....

.....

.....

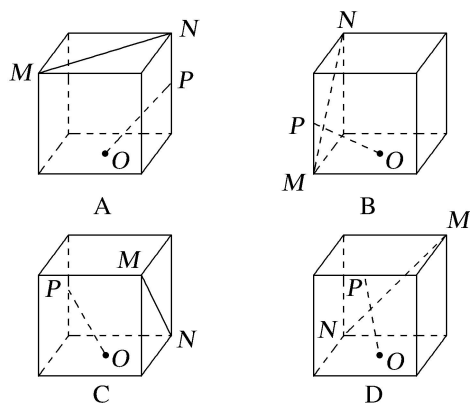
.....

.....

.....

.....

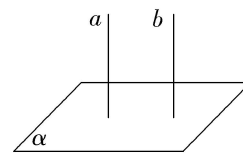
**真题再现** (多选)(2021·新高考 II 卷)如图，在正方体中， $O$  为底面的中心， $P$  为所在棱的中点， $M, N$  为正方体的顶点，则满足  $MN \perp OP$  的是( )



**点评** 本题和教材例题类似，考查角度都是证明线线垂直，其方法都是通过线面垂直或利用空间向量解决问题.

**典题 13** (人教 A 版必修第二册 P<sub>151</sub> 例 3)求证：如果两条平行直线中的一条直线垂直于一个平面，那么另一条直线也垂直于这个平面.

已知：如图， $a \parallel b$ ， $a \perp \alpha$ ，求证： $b \perp \alpha$ .



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**典题 14** (人教 A 版必修第二册 P<sub>152</sub> 练习 T<sub>4</sub>)过  $\triangle ABC$  所在平面  $\alpha$  外一点  $P$  作  $PO \perp \alpha$ . 垂足为  $O$ . 连接  $PA, PB, PC$ .

- (1)若  $PA=PB=PC$ ，则点  $O$  是  $\triangle ABC$  的\_\_\_\_\_心.
- (2)若  $PA=PB=PC$ ， $\angle C=90^\circ$ ，则点  $O$  是  $AB$  边的\_\_\_\_\_点.
- (3)若  $PA \perp PB, PB \perp PC, PC \perp PA$ ，垂足都为  $P$ ，则点  $O$  是  $\triangle ABC$  的\_\_\_\_\_心.

.....

.....

.....

.....

.....

典题 15 (人教 A 版必修第二册 P<sub>154</sub> 例 6) 推导棱台的体积公式  $V_{\text{棱台}} = \frac{1}{3}h(S' + \sqrt{S'S} + S)$ .

其中  $S'$ ,  $S$  分别是棱台的上、下底面面积,  $h$  是高.

.....

.....

.....

.....

.....

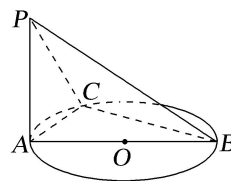
.....

**真题再现** (2021·新高考 II 卷) 正四棱台的上、下底面的边长分别为 2, 4, 侧棱长为 2, 则其体积为( )

- A.  $20 + 12\sqrt{3}$                       B.  $28\sqrt{2}$
- C.  $\frac{56}{3}$                                       D.  $\frac{28\sqrt{2}}{3}$

**点评** 本题是教材例题所推导的公式的具体应用, 可由四棱台的几何特征算出该几何体的高及上下底面面积, 再由棱台的体积公式即可得解.

典题 16 (人教 A 版必修第二册 P<sub>158</sub> 例 18) 如图,  $AB$  是  $\odot O$  的直径,  $PA$  垂直于  $\odot O$  所在的平面,  $C$  是圆周上不同于  $A, B$  的任意一点, 求证: 平面  $PAC \perp$  平面  $PBC$ .



.....

.....

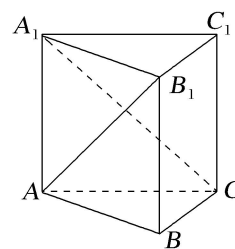
.....

.....

.....

.....

典题 17 (人教 A 版必修第二册 P<sub>164</sub> 习题 8.6T<sub>19</sub>) 如图, 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AA_1 = AB$ , 求证:  $A_1C \perp AB_1$ .



.....

.....

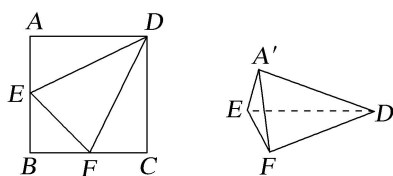
.....

.....

.....



典题 20 (人教 A 版必修第二册 P<sub>170</sub> 复习参考题 8T<sub>10</sub>)如图，在边长为 2 的正方形  $ABCD$  中，点  $E$  是  $AB$  的中点，点  $F$  是  $BC$  的中点，将  $\triangle AED$ ， $\triangle BEF$ ， $\triangle DCF$  分别沿  $DE$ ， $EF$ ， $DF$  折起，使  $A$ ， $B$ ， $C$  三点重合于点  $A'$ 。



(1)求证： $A'D \perp EF$ ；(2)求三棱锥  $A'-EFD$  的体积。

.....

.....

.....

.....

.....

.....

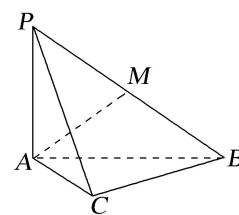
.....

.....

.....

.....

典题 21 (人教 A 版必修第二册 P<sub>170</sub> 复习参考题 8T<sub>13</sub>)如图，在三棱锥  $P-ABC$  中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $PA \perp$  底面  $ABC$ 。



(1)求证：平面  $PAC \perp$  平面  $PBC$ ；  
 (2)若  $AC=BC=PA$ ， $M$  是  $PB$  的中点，求  $AM$  与平面  $PBC$  所成角的正切值。

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

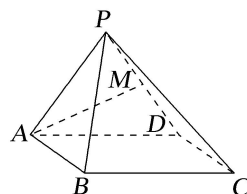
.....

.....

.....

典题 22 (人教 A 版必修第二册 P<sub>170</sub> 复习参考题 8T<sub>14</sub>)如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  为正方形，侧面  $PAD$  是正三角形，侧面  $PAD \perp$  底面  $ABCD$ ， $M$  是  $PD$  的中点.

(1)求证： $AM \perp$  平面  $PCD$ ；(2)求侧面  $PBC$  与底面  $ABCD$  所成二面角的余弦值.



.....

.....

.....

.....

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



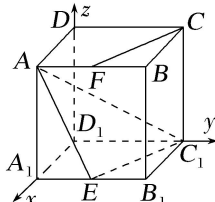
---



---

典题 23 (人教 A 版选择性必修第一册 P<sub>34</sub> 例 6)如图，在棱长为 1 的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $E$  为线段  $A_1B_1$  的中点， $F$  为线段  $AB$  的中点.

(1)求点  $B$  到直线  $AC_1$  的距离；(2)求直线  $FC$  到平面  $AEC_1$  的距离.



.....

.....

.....

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



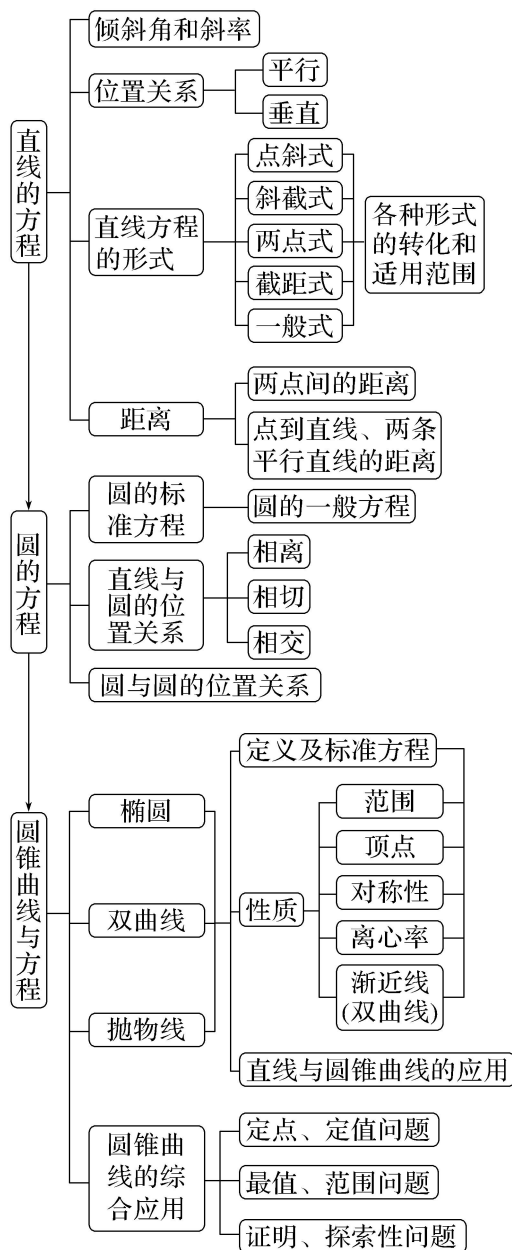




# 平面解析几何

教材宏观把控 系统知识、明确方向

## 宏观把控



## 命题方向

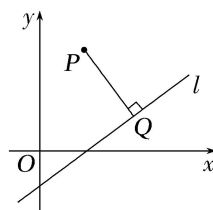
解析几何是高中数学的重要内容.高考主要考查直线与圆、椭圆、抛物线、双曲线的定义、标准方程和简单的几何性质.其中直线与圆、直线与圆锥曲线的位置关系是考查重点.估计在高考中解析几何试题基本保持为两道选择题、一道填空题和一道解答题(或一道选择题一道填空题和一道解答题)分值为 27 分(或 22 分).

常见命题方向:

- (1)圆的方程主要考查定义和性质;
- (2)圆锥曲线(椭圆、抛物线、双曲线)主要是曲线的定义、标准方程、性质(焦点、离心



探究 3 (人教 A 版选择性必修第一册 P<sub>74</sub>)如图, 已知点  $P(x_0, y_0)$ , 直线  $l: Ax+By+C=0$ , 如何求点  $P$  到直线  $l$  的距离?



.....

.....

---



---

探究 4 (人教 A 版选择性必修第一册 P<sub>75</sub>)我们知道, 向量是解决距离、角度问题的有力工具.能否用向量方法求点到直线的距离?

.....

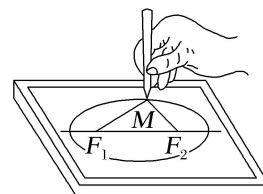
.....

探究 5 (人教 A 版选择性必修第一册 P<sub>86</sub>)方程  $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$  中的  $D, E, F$  满足什么条件时, 这个方程表示圆?

.....

.....

探究 6 (人教 A 版选择性必修第一册 P<sub>105</sub>)取一条定长的细绳, 把它的两端都固定在图板的同一点, 套上铅笔, 拉紧绳子, 移动笔尖, 这时笔尖(动点)画出的轨迹是一个圆.如果把细绳的两端拉开一段距离, 分别固定在图板的两点  $F_1, F_2$ (如图), 套上铅笔, 拉紧绳子, 移动笔尖, 画出的轨迹是什么曲线?



在这一过程中, 移动的笔尖(动点)满足的几何条件是什么?

.....

.....

.....

探究 7 (人教 A 版选择性必修第一册 P<sub>110</sub>)观察椭圆的形状, 可以发现椭圆既是轴对称图形, 又是中心对称图形, 如何利用方程说明椭圆的对称性?

.....

.....

探究 8 (人教 A 版选择性必修第一册 P<sub>119</sub>) 类比求椭圆标准方程的过程，我们如何建立适当的坐标系，得出双曲线的方程？

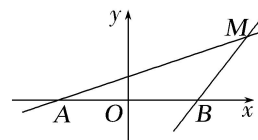
.....

.....

.....

.....

探究 9 (人教 A 版选择性必修第一册 P<sub>121</sub>) 如图，点  $A, B$  的坐标分别是  $(-5, 0), (5, 0)$ ，直线  $AM, BM$  相交于点  $M$ ，且它们斜率之积是  $\frac{4}{9}$ ，试求点  $M$  的轨迹方程，并由点  $M$  的轨迹方程判断轨迹的形状，



与它们的斜率之积是  $-\frac{4}{9}$  比较，你有什么发现？

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**教材典题重温**      重温典题、追本溯源

典题 1 (人教 A 版选择性必修第一册 P<sub>58</sub>T<sub>8</sub>) 经过点  $P(0, -1)$  作直线  $l$ ，若直线  $l$  与连接  $A(1, -2), B(2, 1)$  两点的线段总有公共点，求直线  $l$  的倾斜角  $\alpha$  与斜率  $k$  的取值范围，并说明理由.

.....

.....

.....

典题 2 (人教 A 版选择性必修第一册 P<sub>63</sub> 例 4) 已知  $\triangle ABC$  的三个顶点  $A(-5, 0), B(3, -3), C(0, 2)$ ，求边  $BC$  所在直线的方程，以及这条边上的中线  $AM$  所在直线的方程.

.....

.....

.....

典题 3 (人教 A 版选择性必修第一册 P<sub>73</sub> 例 4)用坐标法证明：平行四边形两条对角线的平方和等于两条邻边的平方和的两倍.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 4 (人教 A 版选择性必修第一册 P<sub>77</sub> 例 6)已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别是  $A(1, 3), B(3, 1), C(-1, 0)$ , 求 $\triangle ABC$ 的面积.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

典题 5 (人教 A 版选择性必修第一册 P<sub>79</sub>T<sub>10</sub>)已知 $\triangle ABC$ 的顶点  $A(5, 1)$ , 边  $AB$  上的中线  $CM$  所在直线方程为  $2x - y - 5 = 0$ , 边  $AC$  上的高  $BH$  所在直线方程为  $x - 2y - 5 = 0$ .求: (1)顶点  $C$  的坐标; (2)直线  $BC$  的方程.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**典题 6** (人教 A 版选择性必修第一册 P<sub>89</sub>T<sub>10</sub>) 在平面直角坐标系中，如果点  $P$  的坐标  $(x, y)$

满足  $\begin{cases} x = a + r \cos \theta, \\ y = b + r \sin \theta, \end{cases}$  其中  $\theta$  为参数. 证明：点  $P$  的轨迹是圆心为  $(a, b)$ ，半径为  $r$  的圆.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**典题 7** (人教 A 版选择性必修第一册 P<sub>91</sub> 例 1) 已知直线  $l: 3x + y - 6 = 0$  和圆心为  $C$  的圆  $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$ ，判断直线  $l$  与圆  $C$  的位置关系；如果相交，求直线  $l$  被圆  $C$  所截得的弦长.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

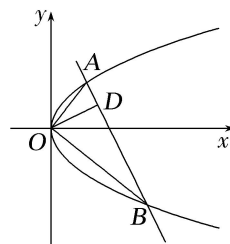
.....







典题 15 (人教 A 版选择性必修第一册 P<sub>146</sub>T<sub>10</sub>)如图，已知直线与抛物线  $y^2=2px(p>0)$  交于  $A, B$  两点，且  $OA \perp OB$ ， $OD \perp AB$  交于点  $D$ ，点  $D$  的坐标为  $(2, 1)$ ，求  $p$  的值。



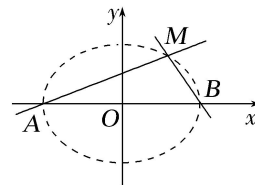
典题 16 (人教 A 版选择性必修第一册 P<sub>103</sub>T<sub>19</sub>)一条光线从点  $A(-2, 3)$  射出，经  $x$  轴反射后，与圆  $C: (x-3)^2+(y-2)^2=1$  相切，求反射后光线所在直线的方程。

**真题再现** (2015·山东卷)一条光线从点  $(-2, -3)$  射出，经  $y$  轴反射后与圆  $(x+3)^2+(y-2)^2=1$  相切，则反射光线所在直线的斜率为( )

- A.  $-\frac{5}{3}$  或  $-\frac{3}{5}$                       B.  $-\frac{3}{2}$  或  $-\frac{2}{3}$   
 C.  $-\frac{5}{4}$  或  $-\frac{4}{5}$                       D.  $-\frac{4}{3}$  或  $-\frac{3}{4}$

**点评** 本题考查了反射光线的性质，直线与圆相切的性质、点到直线的距离公式、点斜式、对称点，与课本习题命题角度类似，属于改编题。

典题 17 (人教 A 版选择性必修第一册 P<sub>108</sub>例 3)如图，设  $A, B$  两点的坐标分别为  $(-5, 0), (5, 0)$ . 直线  $AM, BM$  相交于点  $M$ ，且它们的斜率之积是  $-\frac{4}{9}$ ，求点  $M$  的轨迹方程。









**真题再现** (多选)(2020·新高考全国 I 卷)已知曲线  $C: mx^2+ny^2=1$ . ( )

A.若  $m>n>0$ , 则  $C$  是椭圆, 其焦点在  $y$  轴上

B.若  $m=n>0$ , 则  $C$  是圆, 其半径为  $\sqrt{n}$

C.若  $mn<0$ , 则  $C$  是双曲线, 其渐近线方程为  $y=\pm\sqrt{-\frac{m}{n}}x$

D.若  $m=0, n>0$ , 则  $C$  是两条直线

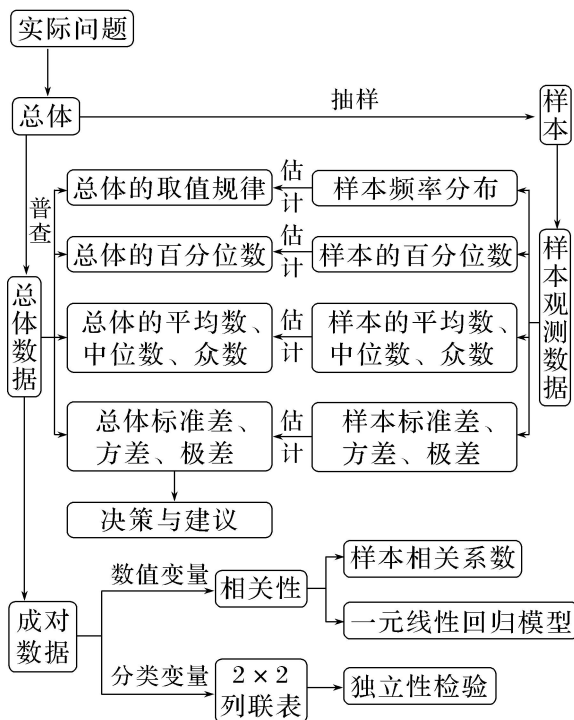
**点评** 本题考查圆锥曲线方程的定义, 根据所给条件, 逐一分析对应的方程形式, 结合椭圆、圆、双曲线方程的定义进行判断, 与课本习题命题角度类似, 属于改编题.



# 统计与成对数据的统计分析

教材宏观把控 系统知识、明确方向

## 宏观把控



## 命题方向

统计与成对数据的统计分析作为高考的必考内容，在 2023 年的高考中预计仍会以“一小一大”的格局呈现。

(1) 小题一般比较简单，出现在选择题或填空题中比较靠前的位置，命题角度主要有：统计数据的分析，多以统计图表(折线图或柱状图)的形式提供数据，进行数据的特征分析，如均值、方差、最值点及趋势分析等。

(2) 解答题属于中档以上题目，题目涉及两个以上的知识模块，具有一定的综合性。命题角度主要有三个方面：一是统计图表与分布列的综合；二是统计数据的数字特征与回归分析、独立性检验等的综合，此类问题计算量较大，注重数据的分析与应用；三是统计图表与函数内容的结合，包括函数解析式的求解与应用等，这有可能重新成为命题的热点。

教材探究思考 挖掘内涵、探究本质

探究 1 (人教 A 版必修第二册 P<sub>174</sub>) 假设口袋中有红色和白色共有 1 000 个小球，除颜色外，小球的大小、质地完全相同。你能通过抽样调查的方法估计袋中红球所占的比例吗？

.....

.....

.....

**探究 2** (人教 A 版必修第二册 P<sub>178</sub>) 小明想考察一下简单随机抽样的估计效果. 他从树人中学医务室得到了高一年级学生身高的所有数据, 计算出整个年级学生的平均身高为 165.0 cm. 然后, 小明用简单随机抽样的方法, 从这些数据中抽取了样本量为 50 和 100 的样本各 10 个, 分别计算出样本平均数, 如下表所示. 从小明多次抽样所得的结果中, 你有什么发现?

	抽样序号									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
样本量为 50 的平均数	165.2	162.8	164.4	164.4	165.6	164.8	165.3	164.7	165.7	165.0
样本量为 100 的平均数	164.4	165.0	164.7	164.9	164.6	164.9	165.1	165.2	165.1	165.2

.....

.....

.....

.....

.....

**探究 3** (人教 A 版必修第二册 P<sub>183</sub>) 与考察简单随机抽样估计效果类似, 小明也想通过多次抽样考察一下分层随机抽样的估计效果. 他用比例分配的分层随机抽样方法, 从高一年级的学生中抽取了 10 个样本量为 50 的样本, 计算出样本平均数如下表所示. 与上一小节“探究”中相同样本量的简单随机抽样的结果比较, 小明有了一个重要的发现. 你是否也有所发现?

	抽样序号									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
男生样本的平均数	170.0	170.7	169.8	171.7	172.7	171.9	171.6	170.6	172.6	170.9
女生样本的平均数	162.2	160.3	159.7	158.1	161.1	158.4	159.7	160.0	160.6	160.2
总样本的平均数	165.8	165.1	164.3	164.3	166.4	164.6	165.2	164.9	166.1	165.1

.....

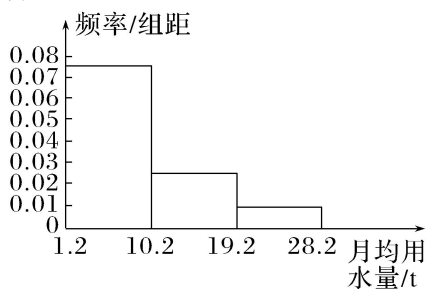
.....

.....

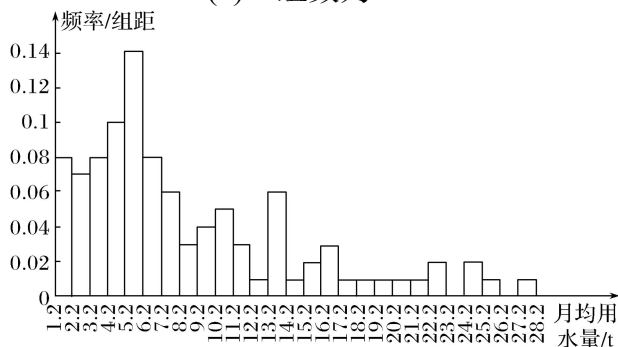
.....

.....

探究 4 (人教 A 版必修第二册 P<sub>196</sub>) 分别以 3 和 27 为组数，对数据进行等距分组，画出 100 户居民用户月均用水量的频率分布直方图. 观察图形，你发现不同的组数对于直方图呈现数据分布规律有什么影响？



(1) “组数为 3”



(2) “组数为 27”

.....

.....

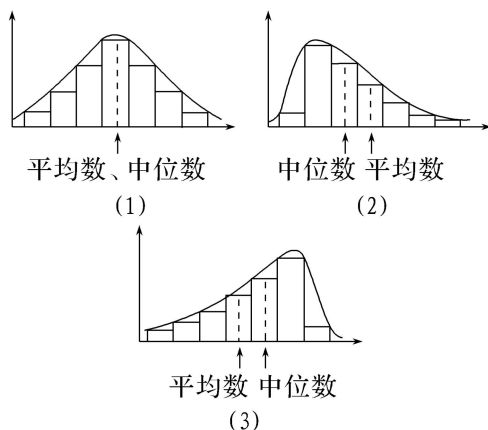
.....

.....

.....

.....

探究 5 (人教 A 版必修第二册 P<sub>204</sub>) 平均数和中位数都描述了数据的集中趋势，它们的大小关系和数据分布的形态有关. 在图中的三种分布形态中，平均数和中位数的大小存在什么关系？



.....

.....

.....

.....

探究 6 (人教 A 版选择性必修第三册 P<sub>94</sub>)在对人体的脂肪含量和年龄之间关系的研究中, 科研人员获得了一些年龄和脂肪含量的简单随机样本数据, 如表所示. 表中每个编号下的年龄和脂肪含量数据都是对同一个体的观测结果, 它们构成了成对数据.

编号	1	2	3	4	5	6	7
年龄/岁	23	27	39	41	45	49	50
脂肪含量/%	9.5	17.8	21.2	25.9	27.5	26.3	28.2
编号	8	9	10	11	12	13	14
年龄/岁	53	54	56	57	58	60	61
脂肪含量/%	29.6	30.2	31.4	30.8	33.5	35.2	34.6

根据以上数据, 你能推断人体的脂肪含量与年龄之间存在怎样的关系吗?

.....

.....

.....

.....

.....

**教材典题重温**      重温典题、追本溯源

典题 1 (人教 A 版必修第二册 P<sub>180</sub>T<sub>1</sub>)为了合理调配电力资源, 某市欲了解全市 50 000 户居民的日用电量. 若通过简单随机抽样从中抽取了 300 户进行调查, 得到其日用电量的平均数为 5.5 kW·h, 则可以推测全市居民用户日用电量的平均数(      )

- A. 一定为 5.5 kW·h
- B. 高于 5.5 kW·h
- C. 低于 5.5 kW·h
- D. 约为 5.5 kW·h

.....

.....

.....

典题 2 (人教 A 版必修第二册 P<sub>184</sub>T<sub>1</sub>)数据  $x_1, x_2, \dots, x_m$  的平均数为  $\bar{x}$ , 数据  $y_1, y_2, \dots, y_n$  的平均数为  $\bar{y}$ , 证明:

$$\frac{\sum_{i=1}^m x_i + \sum_{i=1}^n y_i}{m+n} = \frac{m}{m+n} \bar{x} + \frac{n}{m+n} \bar{y}.$$

.....

.....

.....

.....

.....

**典题 3** (人教 A 版必修第二册 P<sub>188</sub>T<sub>6</sub>) 数据  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的平均数为  $\bar{x}$ , 数据  $y_1, y_2, \dots, y_n$  的平均数为  $\bar{y}$ ,  $a, b$  为常数. 如果满足  $y_1 = ax_1 + b, y_2 = ax_2 + b, \dots, y_n = ax_n + b$ . 证明:  
 $\bar{y} = a\bar{x} + b$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**典题 4** (人教 A 版必修第二册 P<sub>215</sub>T<sub>4</sub>) 数据  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的方差和标准差分别为  $s_x^2, s_x$ , 数据  $y_1, y_2, \dots, y_n$  的方差和标准差分别为  $s_y^2, s_y$ , 若  $y_1 = ax_1 + b, y_2 = ax_2 + b, \dots, y_n = ax_n + b$  成立,  $a, b$  为常数, 证明:  $s_y^2 = a^2 s_x^2, s_y = |a| s_x$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

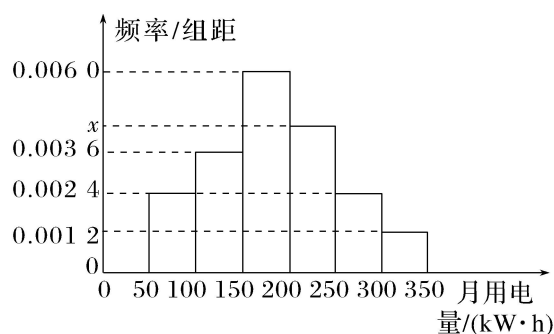
.....

**真题再现** (多选)(2021·新高考 I 卷) 有一组样本数据  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 由这组数据得到新样本数据  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , 其中  $y_i = x_i + c (i = 1, 2, \dots, n)$ ,  $c$  为非零常数, 则( )

- A. 两组样本数据的样本平均数相同
- B. 两组样本数据的样本中位数相同
- C. 两组样本数据的样本标准差相同
- D. 两组样本数据的样本极差相同

**点评** 本题考查平均数、中位数、标准差、极差的定义等基础知识, 基础题与课本题相似度极高.

**典题 5** (人教 A 版必修第二册 P<sub>197</sub>T<sub>1</sub>)从某小区抽取 100 户居民用户进行月用电量调查，发现他们的用电量都在 50~350 kW·h 之间，进行适当分组后(每组为左闭右开的区间)，画出频率分布直方图如图所示.



(1)直方图中  $x$  的值为\_\_\_\_\_;

(2)在被调查的用户中，用电量落在区间 $[100, 250)$ 内的户数为\_\_\_\_\_.

.....

.....

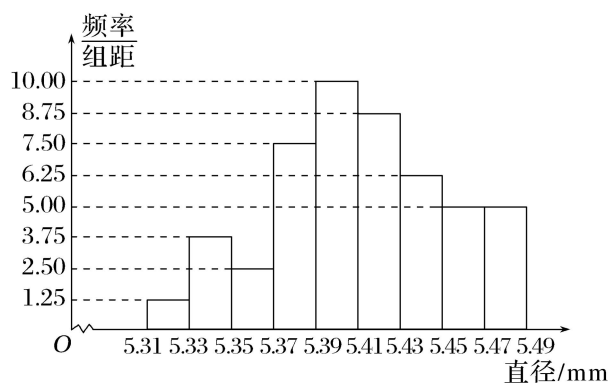
.....

.....

.....

.....

**真题再现** (2020·天津卷)从一批零件中抽取 80 个，测量其直径(单位：mm)，将所得数据分为 9 组： $[5.31, 5.33)$ ， $[5.33, 5.35)$ ， $\dots$ ， $[5.45, 5.47)$ ， $[5.47, 5.49]$ ，并整理得到如下频率分布直方图，则在被抽取的零件中，直径落在区间 $[5.43, 5.47)$ 内的个数为( )



- A.10    B.18    C.20    D.36

**点评** 本题考查了频率分布直方图，属于基础题，与上面课本中习题相似度高.





**典题 9** (人教 A 版必修第二册 P<sub>215</sub>T<sub>3</sub>) 在去年的足球联赛上，一队每场比赛平均失球数是 1.5，全年比赛失球个数的标准差为 1.1；二队每场比赛平均失球数是 2.1，全年失球个数的标准差是 0.4. 你认为下列说法中哪一种是正确的，为什么？

- (1) 平均说来一队比二队防守技术好；
- (2) 二队比一队技术水平更稳定；
- (3) 一队有时表现很差，有时表现又非常好；
- (4) 二队很少不失球.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**典题 10** (人教 A 版必修第二册 P<sub>222</sub>T<sub>2</sub>) 四名同学各掷骰子 5 次，分别记录每次骰子出现的点数. 根据四名同学的统计结果，可以判断出一定没有出现点数 6 的是( )

- A. 平均数 3，中位数为 2
- B. 中位数为 3，众数为 2
- C. 平均数为 2，方差为 2.4
- D. 中位数为 3，方差为 2.8

.....

.....

.....

**真题再现** (2019·新课标 II) 演讲比赛共有 9 位评委分别给出某选手的原始评分，评定该选手的成绩时，从 9 个原始评分中去掉 1 个最高分、1 个最低分，得到 7 个有效评分. 7 个有效评分与 9 个原始评分相比，不变的数字特征是( )

- A. 中位数
- B. 平均数
- C. 方差
- D. 极差

**点评** 本题考查数据的数字特征，关键是掌握数据的平均数，中位数，方差，极差的定义以及计算方法，与课本中习题考点一致，属于基础题.







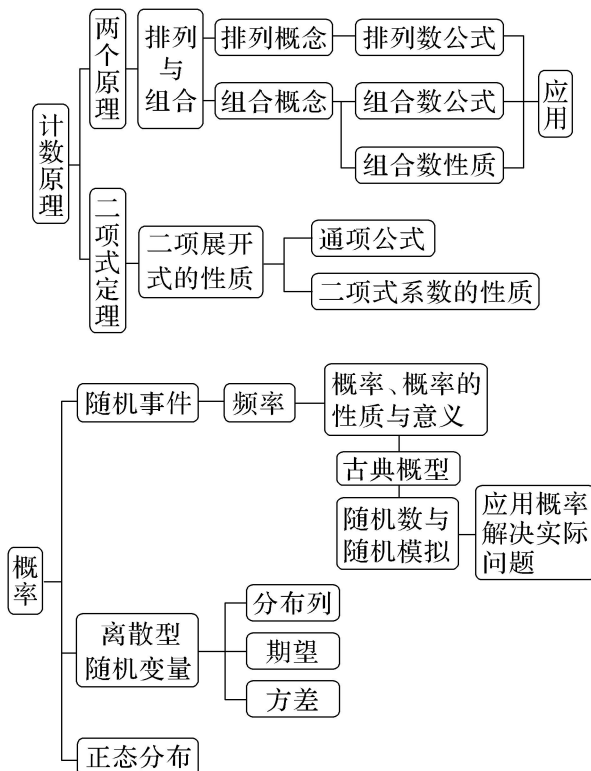




# 计数原理、概率、随机变量及其分布

教材宏观把控 系统知识、明确方向

## 宏观把控



## 命题方向

计数原理作为高考的必考内容，在 2023 年的高考中预计仍会以“一小(选择题或填空题)”的格局呈现. 小题考查方向主要体现在以下两方面：一是以分类加法计数原理和分步乘法计数原理为基础的排列组合问题，要理解分类和分步的思想；二是以二项式定理为主体的问题，主要考查二项展开式的通项公式，求特定项的系数、参数的值、系数和等.

概率作为高考的必考内容. 选择、填空常考查古典概型，时而考查对立事件、相互独立事件、概率及独立重复试验的概率；解答题常以频率分布直方图、折线图为载体考查随机变量的分布列及期望、方差，考查数据处理能力、应用意识与创新能力.

教材探究思考 挖掘内涵、探究本质

### 探究 1 (人教 A 版选择性必修第三册 P<sub>3</sub>)

(1) 如果完成一件事有三类不同方案，在第 1 类方案中有  $m_1$  种不同的方法，在第 2 类方

案中有  $m_2$  种不同的方法，在第 3 类方案中有  $m_3$  种不同的方法，那么完成这件事共有多少种不同的方法？

(2)如果完成一件事情有  $n$  类不同方案，在每一类中都有若干种不同的方法，那么应当如何计数呢？

.....

.....

.....

.....

.....

**探究 2 (人教 A 版选择性必修第三册 P<sub>5</sub>)**

(1)如果完成一件事需要三个步骤，做第 1 步有  $m_1$  种不同的方法，做第 2 步有  $m_2$  种不同的方法，做第 3 步有  $m_3$  种不同的方法，那么完成这件事共有多少种不同的方法？

(2)如果完成一件事情需要  $n$  个步骤，做每一步都有若干种不同的方法，那么应当如何计数呢？

.....

.....

.....

.....

.....

**探究 3 (人教 A 版选择性必修第三册 P<sub>17</sub>)**从  $n$  个不同元素中取出  $m$  个元素的排列数  $A_n^m(m \leq n)$  是多少？

.....

.....

.....

.....

.....

**探究 4 (人教 A 版选择性必修第三册 P<sub>23</sub>)**前面已经提到，组合和排列有关系，我们能否利用这种关系，由排列数  $A_n^m$  来求组合数  $C_n^m$  呢？

.....

.....

.....

.....

.....

探究 5 (人教 A 版选择性必修第三册 P<sub>29</sub>)我们知道,  $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ,  $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ .

(1)观察以上展开式, 分析其运算过程, 你能发现什么规律?

(2)根据你发现的规律, 你能写出 $(a+b)^4$ 的展开式吗?

(3)进一步地, 你能写出 $(a+b)^n$ 的展开式吗?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

探究 6 (人教 A 版必修第二册 P<sub>239</sub>)设事件  $A$  与事件  $B$  互斥, 和事件  $A \cup B$  的概率与事件  $A, B$  的概率之间具有怎样的关系?

.....

.....

.....

探究 7 (人教 A 版必修第二册 P<sub>246</sub>)下面两个随机试验各定义了一对随机事件  $A$  和  $B$ , 你觉得事件  $A$  发生与否会影响事件  $B$  发生的概率吗?

试验 1: 分别抛掷两枚质地均匀的硬币,  $A$  = “第一枚硬币正面朝上”,  $B$  = “第二枚硬币反面朝上”.

试验 2: 一个袋子中装有标号分别是 1, 2, 3, 4 的 4 个球, 除标号外没有其他差异. 采用有放回方式从袋中依次任意摸出两球. 设  $A$  = “第一次摸到球的标号小于 3”,  $B$  = “第二次摸到球的标号小于 3”.

分别计算  $P(A), P(B), P(AB)$ , 你有什么发现?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**探究 8** (人教 A 版必修第二册 P<sub>247</sub>) 互为对立的两个事件是非常特殊的一种事件关系. 如果事件  $A$  与事件  $B$  相互独立, 那么它们的对立事件是否也相互独立? 以有放回摸球试验为例, 分别验证  $A$  与  $\bar{B}$ ,  $\bar{A}$  与  $\bar{B}$ ,  $\bar{A}$  与  $B$  是否独立, 你有什么发现?

.....

.....

.....

.....

.....

**探究 9** (人教 A 版选择性必修第三册 P<sub>56</sub>) 考察下列随机试验及其引入的变量:

试验 1: 从 100 个电子元件(至少含 3 个以上次品)中随机抽取三个进行检验, 变量  $X$  表示三个元件中的次品数;

试验 2: 抛掷一枚硬币直到出现正面为止, 变量  $Y$  表示需要的抛掷次数.

这两个随机试验的样本空间各是什么? 各个样本点与变量的值是如何对应的? 变量  $X$ ,  $Y$  有哪些共同的特征?

.....

.....

.....

.....

.....

**探究 10** (人教 A 版选择性必修第三册 P<sub>64</sub>) 如果  $X$  是一个离散型随机变量, 将  $X$  进行平移或伸缩后, 其均值会怎样变化? 即  $E(X+b)$  和  $E(aX)$  (其中  $a, b$  为常数) 分别与  $E(X)$  有怎样的关系?

.....

.....

.....

.....

**探究 11** (人教 A 版选择性必修第三册 P<sub>69</sub>) 离散型随机变量  $X$  加上一个常数, 方差会有怎样的变化? 离散型随机变量  $X$  乘以一个常数, 方差又有怎样的变化? 它们和期望的性质有什么不同?

.....

.....

.....

探究 12 (人教 A 版选择性必修第三册 P<sub>72</sub>)某飞碟运动员每次射击中靶的概率为 0.8，连续 3 次射击，中靶次数  $X$  的概率分布列是怎样的？

.....

.....

.....

.....

.....

探究 13 (人教 A 版选择性必修第三册 P<sub>76</sub>)假设随机变量  $X$  服从二项分布  $B(n, p)$ ，那么  $X$  的均值和方差各是什么？

.....

.....

.....

.....

.....

**教材典题重温**      重温典题、追本溯源

典题 1 (人教 A 版选择性必修第三册 P<sub>12</sub>T<sub>11</sub>、T<sub>12</sub>)(1)在国庆长假期间，要从 7 人中选若干人在 7 天假期值班(每天只需 1 人值班)，不出现同一人连续值班 2 天，有多少种可能的安排方法？

(2)2 160 有多少个不同的正因数？

.....

.....

.....

.....

.....

典题 2 (人教 A 版选择性必修第三册 P<sub>16</sub>例 2)(1)一张餐桌上有 5 盘不同的菜，甲、乙、丙 3 名同学每人从中各取 1 盘菜，共有多少种不同的取法？

(2)学校食堂的一个窗口共卖 5 种菜，甲、乙、丙 3 名同学每人从中选一种，共有多少种不同的选法？

.....

.....

.....

.....

.....

**典题 3** (人教 A 版选择性必修第三册 P<sub>19</sub> 例 4) 用 0~9 这 10 个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

.....

.....

.....

.....

**典题 4** (人教 A 版选择性必修第三册 P<sub>27</sub>T<sub>12</sub>)(1) 从 0, 2, 4, 6 中任取 3 个数字，从 1, 3, 5 中任取 2 个数字，一共可以组成多少个没有重复数字的五位数？

(2) 由数字 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 可以组成多少个没有重复数字，并且比 5 000 000 大的正整数？

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**真题再现** (2018·浙江卷) 从 1, 3, 5, 7, 9 中任取 2 个数字，从 0, 2, 4, 6 中任取 2 个数字，一共可以组成\_\_\_\_\_个没有重复数字的四位数(用数字作答).

**点评** 本题考查排列组合及简单的计数问题，先选后排是解决问题的关键，且此题命题角度与课本习题类似，属于改编题.

**典题 5** (人教 A 版选择性必修第三册 P<sub>38</sub>T<sub>5</sub>)(1) 求  $(1-2x)^5(1+3x)^4$  的展开式按  $x$  的升幂排列的第 3 项；

(2) 求  $\left[9x + \frac{1}{3\sqrt{x}}\right]^{18}$  的展开式的常数项；

(3) 求  $(1+x+x^2)(1-x)^{10}$  的展开式中  $x^4$  的系数；

(4) 求  $(x^2+x+y)^5$  的展开式中  $x^5y^2$  的系数.

.....

.....

.....

.....

**真题再现** (1)(2019·全国III卷) $(1+2x^2)(1+x)^4$ 的展开式中 $x^3$ 的系数为( )

- A.12    B.16    C.-10    D.10

(2)(2020·全国III卷) $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中常数项是\_\_\_\_\_ (用数字作答).

(3)(2020·全国I卷) $\left(x+\frac{y^2}{x}\right)(x+y)^5$ 的展开式中 $x^3y^3$ 的系数为( )

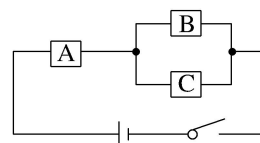
- A.5    B.10    C.15    D.20

**点评** 以上三题考查二项式定理的应用、二项式展开式的通项公式及二项式系数的性质，命题角度与课本习题类似.

**典题 6** (人教 A 版必修第二册 P<sub>228</sub> 例 4)如图，一个电路中有 A，B，C 三个电器元件，每个元件可能正常，也可能失效.把这个电路是否为通路看成是一个随机现象，观察这个电路中各元件是否正常.

(1)写出试验的样本空间；

(2)用集合表示下列事件： $M$  = “恰好两个元件正常”； $N$  = “电路是通路”； $T$  = “电路是断路”.



.....  
 .....  
 .....

.....  
 .....  
 .....

**典题 7** (人教 A 版必修第二册 P<sub>248</sub> 例 1)一个袋子中有标号分别为 1，2，3，4 的 4 个球，除标号外没有其他差异.采用不放回方式从中任意摸球两次.设事件  $A$  = “第一次摸出球的标号小于 3”，事件  $B$  = “第二次摸出球的标号小于 3”，那么事件  $A$  与事件  $B$  是否相互独立？

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

**真题再现** (2021·新高考 I 卷)有 6 个相同的球，分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6，从中有放回地随机取两次，每次取 1 个球.甲表示事件“第一次取出的球的数字是 1”，乙表示事件“第二次取出的球的数字是 2”，丙表示事件“两次取出的球的数字之和是 8”，丁表示事件“两次取出的球的数字之和是 7”，则( )

- A.甲与丙相互独立                      B.甲与丁相互独立  
C.乙与丙相互独立                      D.丙与丁相互独立

**点评** 本题考查相互独立事件的应用,判断是否独立事件的方法是检验  $P(AB)=P(A)P(B)$  是否成立,与课本例题命题角度类似.

**典题 8** (人教 A 版选择性必修第三册 P<sub>61</sub>T<sub>5</sub>)老师要从 10 篇课文中随机抽 3 篇不同的课文让同学背诵,规定至少要背出其中 2 篇才能及格.某位同学只能背诵其中的 6 篇,求:

- (1)抽到他能背诵的课文的数量的分布列;  
(2)他能及格的概率.

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

**典题 9** (人教 A 版选择性必修第三册 P<sub>61</sub>T<sub>6</sub>)某种资格证考试,每位考生一年内最多有 3 次考试机会.一旦某次考试通过,便可领取资格证书,不再参加以后的考试,否则就继续参加考试,直到用完 3 次机会.李明决定参加考试,如果他每次参加考试通过的概率依次为 0.6, 0.7, 0.8, 且每次考试是否通过相互独立,试求:

- (1)李明在一年内参加考试次数  $X$  的分布列;  
(2)李明在一年内领到资格证书的概率.

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....







典题 12 (人教 A 版选择性必修第三册 P<sub>74</sub> 例 2) 如图是一块高尔顿板的示意图. 在一块木板上钉着若干排相互平行但相互错开的圆柱形小木钉, 小木钉之间留有适当的空隙作为通道, 前面挡有一块玻璃. 将小球从顶端放入, 小球下落的过程中, 每次碰到小木钉后都等可能地向左或向右落下, 最后落入底部的格子中. 格子从左到右分别编号为 0, 1, 2, …, 10, 用  $X$  表示小球最后落入格子的号码, 求  $X$  的分布列.

.....

.....

.....

.....

.....

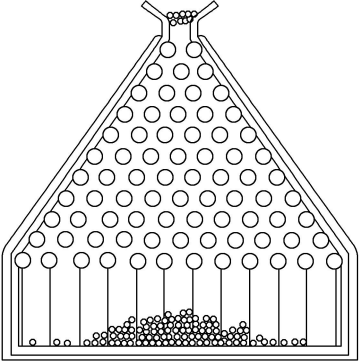
.....

.....

.....

.....

.....



\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



**典题 15** (人教 A 版选择性必修第三册 P<sub>91</sub>T<sub>12</sub>)某城市高中数学会考，假设考试成绩服从正态分布  $N(75, 8^2)$ .如果按照 16%，34%，34%，16%的比例将考试成绩分为 A，B，C，D 四个等级，试确定各等级的分数线(精确到 1).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**典题 16** (人教 A 版选择性必修第三册 P<sub>91</sub>T<sub>10</sub>)甲、乙、丙三人相互做传球训练，第 1 次由甲将球传出，每次传球时，传球者都等可能地将球传给另外两个人中的任何一人.求  $n$  次传球后球在甲手中的概率.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

