微信公众号：浙江省高中数学　　视频号/ B站：高中数学冯杰（老师）

高中数学

2026

回归教材

研析教材中典型的探究问题、例题、习题

（答案）

杭州学军中学数学组

QQ教师群：1021991384　　QQ学生群：564755774

参考答案

第一章　集合与常用逻辑用语、不等式

教材探究思考

探究1　提示：都成立.其推广结论为：$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B$，以此为条件的试题很多，解题时注意集合 A 是否为空集.

探究2　提示：$\mathrm{card}(A\cup B\cup C)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(B\cap C)-\mathrm{card}(A\cap C)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C)$.

探究3　提示：不唯一.常见的充分条件还有：

(1)四边形的两组对边分别相等；

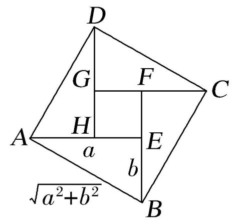
(2)四边形的两组对边分别平行；

(3)四边形的一组对边平行且相等；

(4)四边形的两条对角线互相平分.

以上是判断一个四边形为平行四边形的充分条件，在立体几何中证明线、面的位置关系时经常用到.

探究4　提示：将图中的“风车”抽象成如图，在正方形 $ABCD$ 中有4个全等的直角三角形.设每个直角三角形的两条直角边的长分别为 a，$b(a\neq b)$，那么正方形的边长为$\sqrt{a^2+b^2}$，则4个直角三角形的面积和为 $2ab$，正方形的面积为 a^2+b^2，由于正方形 $ABCD$ 的面积大于4个直角三角形的面积和，即可得到不等式 $a^2+b^2>2ab$.



当直角三角形变为等腰直角三角形，即 $a=b$ 时，正方形 $EFGH$ 缩为一个点，这时有 $a^2+b^2=2ab$，

综上，对任意的 a，$b\in\mathbf{R}$，都有 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

真题再现　25　[由题意，可得大正方形的边长 $a=\sqrt{3^2+4^2}=5$，则其面积 $S_1=5^2=25$，小正方形的面积 $S_2=25-4\times\left(\frac{1}{2}\times 3\times 4\right)=1$，从而$\frac{S_1}{S_2}=\frac{25}{1}=25$.]

探究5　提示：易证$\triangle ACD\backsim\triangle DCB$，因而 $CD=\sqrt{ab}$，由于 CD 小于或等于圆的半径，用不等式表示为$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$，显然，当且仅当点 C 与圆心重合，即当 $a=b$ 时，等号成立.

真题再现　AC　[由 $AC+CB=a+b$，由射影定理可知 $CD=\sqrt{ab}$，又 $OD\geqslant CD$，

$\therefore \dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a>0，b>0)$，A 正确；

由射影定理可知 $CD^2=DE\cdot OD$，

即 $DE=\dfrac{CD^2}{OD}=\dfrac{ab}{\frac{a+b}{2}}=\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$，

又 $CD\geqslant DE$，即 $\sqrt{ab}\geqslant\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}(a>0，b>0)$，C 正确.故选 AC.]

教材典题重温

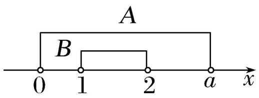
典题 1　**解**　集合 D 表示直线 $2x-y=1$ 和直线 $x+4y=5$ 的交点，

由 $\begin{cases}2x-y=1，\\x+4y=5，\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1，\\y=1，\end{cases}$ 即 $D=\{(1，1)\}$.

显然(1，1)在直线 $y=x$ 上，即 D　C.

典题 2　**解**　(1)由于 $P=Q$，所以 $a=-1$，且 $-b=1$，故 $a-b=0$.

(2)如图所示，$\because B\subseteq A$，$\therefore a\geqslant 2$.



典题 3　**解**　根据三角形的分类可知 $A\cap B=\varnothing$，

$A\cup B=\{x|x$ 是锐角三角形或钝角三角形$\}$，

$\complement_U(A\cup B)=\{x|x$ 是直角三角形$\}$.

真题再现　A　[**法一**　因为集合 $M=\{1，2\}$，$N=\{3，4\}$，

所以 $M\cup N=\{1，2，3，4\}$.

又全集 $U=\{1，2，3，4，5\}$，所以 $\complement_U(M\cup N)=\{5\}$.故选 A.

法二　因为 $\complement_U(M\cup N)=(\complement_UM)\cap(\complement_UN)$，$\complement_UM=\{3，4，5\}$，$\complement_UN=\{1，2，5\}$，

所以 $\complement_U(M\cup N)=\{3，4，5\}\cap\{1，2，5\}=\{5\}$.故选 A.]

典题 4　**解**　解不等式 $3x-7\geqslant 8-2x$ 得 $x\geqslant 3$，

故 $B=\{x|x\geqslant 3\}$，

所以 $A\cup B=\{x|x\geqslant 2\}$，$A\cap B=\{x|3\leqslant x<4\}$.

真题再现　B　[$M\cap N=\left\{x\left|\dfrac{1}{3}\leqslant x<4\right.\right\}$.]

典题 5　解　$B=\{1，4\}$，

当 $a=3$ 时，$A=\{3\}$，则 $A\cup B=\{1，3，4\}$，$A\cap B=\varnothing$；

当 $a=1$ 时，$A=\{1，3\}$，则 $A\cup B=\{1，3，4\}$，$A\cap B=\{1\}$；

当 $a=4$ 时，$A=\{3，4\}$，则 $A\cup B=\{1，3，4\}$，$A\cap B=\{4\}$；

当 $a\neq 3$ 且 $a\neq 1$ 且 $a\neq 4$ 时，$A=\{3，a\}$，

则 $A\cup B=\{1，3，4，a\}$，$A\cup B=\varnothing$.

典题 6　解　$\because U=A\cup B=\{0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10\}$，

$A\cap(\complement_U B)=\{1，3，5，7\}$，$\complement_U B\subseteq A$，

$\therefore \complement_U B=\{1，3，5，7\}$，故 $B=\complement_U(\complement_U B)=\{0，2，4，6，8，9，10\}$.

典题 7　解　(1)必要不充分条件；

(2)充要条件；

(3)充分不必要条件；

(4)必要不充分条件；

(5)既不充分也不必要条件.

真题再现　A　[由 $a^2>a$，得 $a^2-a>0$，解得 $a>1$ 或 $a<0$，

$\therefore$ “$a>1$”是“$a^2>a$”的充分不必要条件.

故选 A.]

典题 8　解　(1)$\triangle ABC$ 为锐角三角形的充要条件是 $a^2+b^2>c^2$，

证明如下：必要性，在$\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 是锐角，

故由余弦定理得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>0$，

则 $a^2+b^2-c^2>0$，即 $a^2+b^2>c^2$.

充分性：由余弦定理可知 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

$\because a^2+b^2>c^2$，$\therefore \cos C>0$，

$\therefore 0<C<\dfrac{\pi}{2}$，又 $a\leqslant b\leqslant c$，$\therefore A$，$B\in\left(0，\dfrac{\pi}{2}\right)$，

即$\triangle ABC$ 是锐角三角形.

(2)$\triangle ABC$ 为钝角三角形的充要条件是 $a^2+b^2<c^2$.

同理可以证明.

典题 9 解 (1)该命题的否定：存在两个等边三角形，它们不相似.

因为任意两个等边三角形的三边成比例，

所以任意两个等边三角形都相似.

因此这是一个假命题.

(2)该命题的否定：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1\neq 0$.

因为对任意 $x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，

所以这是一个真命题.

典题 10 解 $\because A\cap B=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ \begin{cases}2x-y=0\\3x+y=0\end{cases}\right\}$

$=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\right\}=\{(0,\ 0)\}$.

$A\cap C=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ \begin{cases}2x-y=0\\2x-y=3\end{cases}\right\}=\varnothing$.

$\therefore A\cap B$ 的几何意义是直线 $2x-y=0$ 与 $3x+y=0$ 相交于点$(0,\ 0)$，

$A\cap C$ 的几何意义是直线 $2x-y=0$ 与 $2x-y=3$ 平行，无交点.

典题 11 解 设矩形菜园的相邻两条边的长分别为 x m，y m，

篱笆的长度为 $2(x+y)$m.

(1)由已知得 $xy=100$.

由$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$，可得 $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}=20$，

所以 $2(x+y)\geqslant 40$，当且仅当 $x=y=10$ 时，上式等号成立.

因此，当这个矩形菜园是边长为 10 m 的正方形时，所用篱笆最短，最短篱笆的长度为 40 m.

(2)由已知得 $2(x+y)=36$，矩形菜园的面积为 xy m^2.

由$\sqrt{xy}\leqslant\frac{x+y}{2}=\frac{18}{2}=9$，可得 $xy\leqslant 81$，

当且仅当 $x=y=9$ 时，上式等号成立.

因此，当这个矩形菜园是边长为 9 m 的正方形时，菜园的面积最大，最大面积是 81 m^2.

典题 12 **证明** (1)∵$x>0$，$y>0$，∴$\frac{x}{y}>0$，$\frac{y}{x}>0$，

∴$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y}}=2$，

当且仅当$\frac{x}{y}=\frac{y}{x}$，即 $x=y$ 时取等号，

但 $x\neq y$，因此不能取等号，∴$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}>2$.

(2)∵$x>0$，$y>0$，∴$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$，

∴$\frac{2xy}{x+y}\leqslant\frac{2xy}{2\sqrt{xy}}=\sqrt{xy}$，

当且仅当 $x=y$ 时取等号，但 $x\neq y$，

因此不能取等号，∴$\frac{2xy}{x+y}<\sqrt{xy}$.

真题再现 C [A 中，因为 $y=x^2+2x+4=(x+1)^2+3$，所以当 $x=-1$ 时，y 取得最小值，且 $y_{\min}=3$，不符合题意；

B 中，设$|\sin x|=t$，$t\in(0，1]$，根据函数 $y=t+\frac{4}{t}$在(0，1]上单调递减可得 $y_{\min}=1+\frac{4}{1}=5$.不符合题意；

C 中，因为 $y=2^x+2^{2-x}\geqslant 2\sqrt{2^x\cdot 2^{2-x}}=4$，当且仅当 $2^x=2^{2-x}$，即 $x=2-x$，即 $x=1$ 时取等号，所以 $y_{\min}=4$，符合题意；

D 中，当 $0<x<1$ 时，$\ln x<0$，$y=\ln x+\frac{4}{\ln x}<0$，不符合题意.]

典题 13 **解** ∵a，$b>0$，∴$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，

∴$ab=a+b+3\geqslant 2\sqrt{ab}+3$，

∴$ab-2\sqrt{ab}-3\geqslant 0$，∴$(\sqrt{ab}+1)(\sqrt{ab}-3)\geqslant 0$.

∵$\sqrt{ab}+1>0$，∴$\sqrt{ab}-3\geqslant 0$，∴$ab\geqslant 9$，

当且仅当 $a=b$，即 $a=b=3$ 时，ab 取得最小值 9，

故 ab 的取值范围是$[9，+\infty)$.

真题再现 ABD [因为 $a>0$，$b>0$，$a+b=1$，所以 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$时，等号成立，即有 $ab\leqslant\frac{1}{4}$.

对于 A，$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1-2ab\geqslant 1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，故 A 正确；

对于 B，$2^{a-b}=2^{2a-1}=\frac{1}{2}\times 2^{2a}$，因为 $a>0$，所以 $2^{2a}>1$，即 $2^{a-b}>\frac{1}{2}$，故 B 正确；

对于 C，$\log_2 a+\log_2 b=\log_2(ab)\leqslant\log_2\frac{1}{4}=-2$，故 C 错误；

对于 D，由$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}=1+2\sqrt{ab}\leqslant 2$，得$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$，故 D 正确.]

典题 14 解 按第一种策略购物，设第一次购物时的价格为 p_1 元/kg，购 n kg，第二次购物时的价格为 p_2 元/kg，仍购 n kg，两次购物的平均价格为$\frac{p_1n+p_2n}{2n}=\frac{p_1+p_2}{2}$；

若按第二种策略购物，第一次花 m 元钱，能购$\frac{m}{p_1}$ kg 物品，第二次仍花 m 元钱，能购$\frac{m}{p_2}$ kg 物品，两次购物的平均价格为$\frac{2m}{\frac{m}{p_1}+\frac{m}{p_2}}=\frac{2}{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}}$.

比较两次购物的平均价格：$\frac{p_1+p_2}{2}-\frac{2}{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}}=\frac{p_1+p_2}{2}-\frac{2p_1p_2}{p_1+p_2}=\frac{(p_1+p_2)^2-4p_1p_2}{2(p_1+p_2)}$

$=\frac{(p_1-p_2)^2}{2(p_1+p_2)}\geqslant 0$，

所以第一种策略的平均价格高于第二种策略的平均价格，因而用第二种策略比较经济.

推广：一般地，如果是多次购买同一种物品，用第二种策略购买比较经济.

第二章 函数与基本初等函数

教材探究思考

探究 1 提示：(1)不能.例如函数 $y=x^2$，当 x_1，$x_2\in(0，+\infty)$，$x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，但不能说 $y=x^2$ 在$(-\infty，+\infty)$上单调递增.

(2)函数 $f(x)=x$ 在$(-\infty，+\infty)$上单调递增；函数 $f(x)=x^2$ 在区间$(-\infty，0)$上单调递减，在区间$(0，+\infty)$上单调递增.

探究 2 1.提示：从函数的定义域、值域、单调性、奇偶性以及图象的变化趋势来研究这个函数.

2.提示：首先根据函数的解析式来研究函数的性质，根据这些性质作出函数的图

象，然后利用图象来印证函数的性质.研究一个函数要从其性质和图象综合进行研究，作出函数的图象研究其性质更直观、简单.

探究 3 1.**提示**：两个函数的图象关于直线 $y=x$ 对称.

2.**提示**：P_1，P_2，P_3 关于直线 $y=x$ 的对称点的坐标分别是$\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$，(1，0)，(2，1)，都在 $y=\log_2x$ 的图象上，因为它们都满足其解析式.

3.**提示**：设 $P_0(x_0,\ y_0)$关于直线 $y=x$ 的对称点 $P_0'(y_0,\ x_0)$，$P_0'(y_0,\ x_0)$在 $y=\log_2x$ 的图象上.因为由 $P_0(x_0,y_0)$在 $y=2^x$ 的图象上可得 $y_0=2x_0$，从而 $x_0=\log_2y_0$，故 $P_0'(y_0,\ x_0)$在 $y=\log_2x$ 的图象上.

4.**提示**：$y=2^x$ 与 $y=\log_2x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

5.**提示**：成立，理由如下：设点 $P(x_0,\ y_0)$在函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$的图象上，则 $y_0=a^{x_0}$，又 $\log_ay_0=\log_aa^{x_0}=x_0$，所以点 P 关于 $y=x$ 的对称点$(y_0,\ x_0)$在 $y=\log_ax$ 的图象上，所以二者的图象关于直线 $y=x$ 对称.

教材典题重温

典题 1 解 (1)$y=(\sqrt{x})^2=x(x\in\{x|x\geq0\})$，

它与函数 $y=x(x\in\mathbf{R})$虽然对应关系相同，但是定义域不相同，所以这个函数与函数 $y=x(x\in\mathbf{R})$不是同一个函数.

(2)$u=\sqrt[3]{v^3}=v(v\in\mathbf{R})$，它与函数 $y=x(x\in\mathbf{R})$不仅对应关系相同，而且定义域也相同，

所以这个函数与函数 $y=x(x\in\mathbf{R})$是同一个函数.

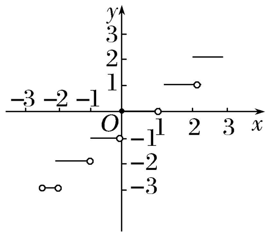
(3)$y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}-x,\ x<0,\\ x,\ x\geq0,\end{cases}$ 它与函数 $y=x(x\in\mathbf{R})$的定义域都是实数集 $\mathbf{R}$，

但是当 $x<0$ 时，它的对应关系与函数 $y=x(x\in\mathbf{R})$不相同，所以这个函数与函数 $y=x(x\in\mathbf{R})$不是同一个函数.

(4)$m=\dfrac{n^2}{n}=n(n\in\{n|n\neq0\})$，它与函数 $y=x(x\in\mathbf{R})$的对应关系相同但定义域不相同，所以这个函数与函数 $y=x(x\in\mathbf{R})$不是同一个函数.

典题 2　解　$f(x)=\begin{cases}-3, & -2.5<x<-2,\\ -2, & -2\leqslant x<-1,\\ -1, & -1\leqslant x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<2,\\ 2, & 2\leqslant x<3,\\ 3, & x=3.\end{cases}$

图象如图所示.



典题 3　解　$\forall x_1$，$x_2\in[2，6]$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{2}{x_1-1}-\dfrac{2}{x_2-1}$

$=\dfrac{2[(x_2-1)-(x_1-1)]}{(x_1-1)(x_2-1)}=\dfrac{2(x_2-x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$.

由 $2\leqslant x_1<x_2\leqslant 6$，得 $x_2-x_1>0$，$(x_1-1)(x_2-1)>0$，

于是 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以函数 $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$在区间$[2，6]$上单调递减.

因此，函数 $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$在 $x=2$ 时取得最大值，最大值是 2；在 $x=6$ 时取得最小值，最小值是 0.4.

典题 4　解　$f(x)$在$(-\infty，0)$上单调递增，证明如下：

设 $x_1<x_2<0$，则$-x_1>-x_2>0$，

因为 $f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减，

所以 $f(-x_1)<f(-x_2)$.又 $f(x)$是偶函数，

所以 $f(-x_1)=f(x_1)$，$f(-x_2)=f(x_2)$，于是 $f(x_1)<f(x_2)$.

所以 $f(x)$在$(-\infty，0)$上单调递增.

典题 5　解　(1)$\because f(x)=x^3-3x^2=(x-1)^3-3(x-1)-2$，

$\therefore y=f(x+1)+2=x^3-3x$.

设 $g(x)=x^3-3x$，则 $g(-x)=(-x)^3-3(-x)=-x^3+3x=-g(x)$，

$\therefore g(x)$为奇函数，$\therefore f(x)=x^3-3x^2$ 的图象关于点$(1，-2)$对称.

即 $f(x)=x^3-2x^2$ 的图象的对称中心是点$(1，-2)$.

(2)函数 $y=f(x)$的图象关于直线 $x=a$ 成轴对称图形的充要条件是函数 $y=f(x+a)$为偶函数.

真题再现 B [**法一** 因为 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$,

所以 $f(x-1)=\dfrac{1-（x-1）}{1+（x-1）}=\dfrac{2-x}{x}$,

$f(x+1)=\dfrac{1-（x+1）}{1+（x+1）}=\dfrac{-x}{x+2}$.

对于 A, $F(x)=f(x-1)-1=\dfrac{2-x}{x}-1=\dfrac{2-2x}{x}$, 定义域关于原点对称, 但不满足 $F(-x)=-F(x)$，故不是奇函数；

对于 B，$G(x)=f(x-1)+1=\dfrac{2-x}{x}+1=\dfrac{2}{x}$，定义域关于原点对称，且满足 $G(-x)=-G(x)$，故是奇函数；

对于 C，$f(x+1)-1=\dfrac{-x}{x+2}-1=\dfrac{-x-x-2}{x+2}=-\dfrac{2x+2}{x+2}$，定义域不关于原点对称，故不是奇函数；

对于 D，$f(x+1)+1=\dfrac{-x}{x+2}+1=\dfrac{-x+x+2}{x+2}=\dfrac{2}{x+2}$，定义域不关于原点对称，故不是奇函数.

法二 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{2-（x+1）}{1+x}=\dfrac{2}{1+x}-1$，为保证函数变换之后为奇函数，需将函数 $y=f(x)$的图象向右平移 1 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度，得到的图象对应的函数为 $y=f(x-1)+1$.]

典题 6 解 (1)点 A 的实际意义为：当乘客量为 0 时，公司亏损 1(单位)，点 B 的实际意义为：当乘客量为 1.5 时，公司收支平衡.

射线 AB 上的点的实际意义为：当乘客量小于 1.5 时，公司将亏损；

当乘客量大于 1.5 时，公司将赢利.

(2)题图(2)的建议是：降低成本而保持票价不变，

题图(3)的建议是：提高票价而保持成本不变.

典题 7　证明　(1)∵$f(x)=ax+b$，

$$\therefore f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{a(x_1+x_2)+2b}{2}$$

$$=\frac{(ax_1+b)+(ax_2+b)}{2}=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

即 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

(2)∵$g(x)=x^2+ax+b$，

$$\therefore g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+a\cdot\frac{x_1+x_2}{2}+b$$

$$\leqslant\frac{x_1^2+x_2^2}{2}+a\cdot\frac{x_1+x_2}{2}+b$$

$$=\frac{(x_1^2+ax_1+b)+(x_2^2+ax_2+b)}{2}=\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2},$$

即 $g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$.

典题 8　解　(1)单调递减.

(2)单调递增.

典题 9　解　定义域为$\{x|x\neq0\}$，值域为 $\mathbf{R}$.

$\forall x_1$，$x_2\in(-\infty，0)$，且 $x_1<x_2$，

则 $y_1-y_2=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2+1)}{x_1x_2}$.

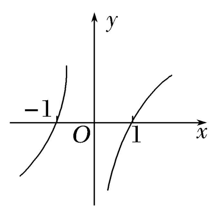
∵x_1，$x_2\in(-\infty，0)$，∴$x_1x_2>0$，$x_1-x_2<0$，$x_1x_2+1>0$，

∴$y_1-y_2<0$，即 $y_1<y_2$，

∴$y=x-\frac{1}{x}$在$(-\infty，0)$上单调递增，

同理可证其在$(0，+\infty)$上也单调递增.

设 $f(x)=x-\frac{1}{x}$，



∵$f(-x)=-x+\frac{1}{x}=-f(x)$，

∴$f(x)=y=x-\frac{1}{x}$是奇函数.

函数 $y=x-\frac{1}{x}$图象如图所示.

典题 10 解 (1)$1.7^{2.5}$和1.7^{3}可看作函数 $y=1.7^{x}$ 当 x 分别取 2.5 和 3 时所对应的两个函数值.

因为底数 $1.7>1$，所以指数函数 $y=1.7^{x}$ 是增函数.

因为 $2.5<3$，所以 $1.7^{2.5}<1.7^{3}$.

(2)因为 $0<0.8<1$，所以指数函数 $y=0.8^{x}$ 是减函数.

因为 $-\sqrt{2}>-\sqrt{3}$，所以 $0.8^{-\sqrt{2}}<0.8^{-\sqrt{3}}$.

(3)由指数函数的性质知 $1.7^{0.3}>1.7^{0}=1$，$0.9^{3.1}<0.9^{0}=1$，

所以 $1.7^{0.3}>0.9^{3.1}$.

真题再现 D [因为 $a=3^{0.7}>3^{0}=1$，$b=\left(\frac{1}{3}\right)^{-0.8}=3^{0.8}>3^{0.7}$，$c=\log_{0.7}0.8<\log_{0.7}0.7=1$，所以 $b>a>c$.]

典题 11 解 (1)因为函数 $y=a\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}+b$ 的图象过原点，

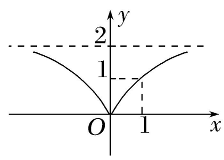
所以 $a\left(\frac{1}{2}\right)^{0}+b=0$，即 $a+b=0$，即 $-a=b$，

函数 $y=a\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}-a=a\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}-1\right]$.

又 $0<\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}\leqslant 1$，$-1<\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}-1\leqslant 0$，

且 $y=a\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}+b$ 无限接近直线 $y=2$，但又不与该直线相交，

所以 $a<0$，且 $0\leqslant a\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}-1\right]<-a$，



所以 $-a=2$，$y=-2\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}+2$，

其图象如图所示.

(2)显然函数的定义域为 **R**，令 $y=f(x)$，

则 $f(-x)=-2\left(\frac{1}{2}\right)^{|-x|}+2=-2\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}+2=f(x)$，

即 $f(x)$是偶函数.

当 $x>0$ 时，$y=-2\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}+2=-2\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+2$ 单调递增，

当 $x<0$ 时，$y=-2\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}+2=-2\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}+2$ 单调递减，

即 $y=-2\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}+2$ 在$(-\infty，0)$上为减函数，在$(0，+\infty)$上为增函数.

典题 12 解 设里氏 9.0 级和 8.0 级地震的能量分别为 E_1 和 E_2.

由 $\lg E=4.8+1.5M$，

可得 $\lg E_1=4.8+1.5\times9.0$，$\lg E_2=4.8+1.5\times8.0$.

于是，$\lg\frac{E_1}{E_2}=\lg E_1-\lg E_2$

$=(4.8+1.5\times9.0)-(4.8+1.5\times8.0)=1.5$.

利用计算工具可得，$\frac{E_1}{E_2}=10^{1.5}\approx32$.

虽然里氏 9.0 级地震与里氏 8.0 级地震仅相差 1 级，但前者释放出来的能量却是后者的约 32 倍.

真题再现 (1)C (2)C [(1)由题意知，$4.9=5+\lg V$，得 $\lg V=-0.1$，得 $V=10^{-\frac{1}{10}}=\frac{1}{\sqrt[10]{10}}\approx\frac{1}{1.259}\approx0.8$，所以该同学视力的小数记录法的数据约为 0.8.

(2)因为 $I(t)=\frac{K}{1+\mathrm{e}^{-0.23(t-53)}}$，所以当 $I(t^*)=0.95K$ 时，$\frac{K}{1+\mathrm{e}^{-0.23(t^*-53)}}=0.95K$，

$\therefore\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0.23(t^*-53)}}=0.95$，$\therefore1+\mathrm{e}^{-0.23(t^*-53)}=\frac{1}{0.95}$，$\therefore\mathrm{e}^{-0.23(t^*-53)}=\frac{1}{0.95}-1$，$\therefore\mathrm{e}^{0.23(t^*-53)}=19$，$\therefore0.23(t^*-53)=\ln19$，$\therefore t^*=\frac{\ln19}{0.23}+53\approx\frac{3}{0.23}+53\approx66$.]

典题 13 解 (1)$\log_23.4$ 和 $\log_28.5$ 可看作函数 $y=\log_2x$ 的两个函数值.

因为底数 $2>1$，对数函数 $y=\log_2x$ 是增函数，

且 $3.4<8.5$，

所以 $\log_23.4<\log_28.5$.

(2)$\log_{0.3}1.8$ 和 $\log_{0.3}2.7$ 可看作函数 $y=\log_{0.3}x$ 的两个函数值.

因为底数 $0.3<1$，对数函数 $y=\log_{0.3}x$ 是减函数，

且 $1.8<2.7$，所以 $\log_{0.3}1.8>\log_{0.3}2.7$.

(3)$\log_a5.1$ 和 $\log_a5.9$ 可看作函数 $y=\log_ax$ 的两个函数值.

对数函数的单调性取决于底数 a 是大于 1 还是小于 1，因此需要对底数 a 进行讨论.

当 $a>1$ 时，因为函数 $y=\log_a x$ 是增函数，且 $5.1<5.9$，

所以 $\log_a 5.1<\log_a 5.9$；

当 $0<a<1$ 时，因为函数 $y=\log_a x$ 是减函数，且 $5.1<5.9$，

所以 $\log_a 5.1>\log_a 5.9$.

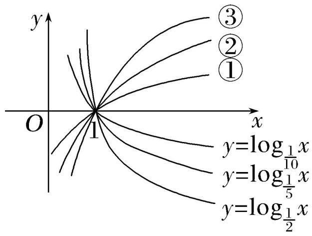
真题再现 A [$\because 3\log_3 2=\log_3 8<2$，$\therefore \log_3 2<\dfrac{2}{3}$，即 $a<c$.

$\because 3\log_5 3=\log_5 27>2$，$\therefore \log_5 3>\dfrac{2}{3}$，即 $b>c$.

$\therefore a<c<b$.]

典题 14 **解** (1)当底数大于 1 时，在 $x=1$ 的右侧，底数越大，函数图象越靠近 x 轴，所以①对应函数 $y=\lg x$，②对应函数 $y=\log_5 x$，③对应函数 $y=\log_2 x$.

(2)



(3)从(2)的图中发现 $y=\log_2 x$，$y=\log_5 x$，$y=\lg x$ 的图象分别与 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$，$y=\log_{\frac{1}{3}}x$，$y=\log_{\frac{1}{10}}x$ 的图象关于 x 轴对称.

典题 15 **解** 不正确.因为该同学只考虑了函数在$(-1，1)$内存在零点，而没有考虑只有一个零点，正确解法如下：

(1)当 $a=0$ 时，$f(x)=4x-1=0$，

得 $x=\dfrac{1}{4}\in(-1，1)$，故 $a=0$ 满足；

(2)当 $a\neq 0$ 时，

①$f(-1)f(1)=(24a-5)(24a+3)<0$，得 $-\dfrac{1}{8}<a<\dfrac{5}{24}$，此时 $-\dfrac{1}{8}<a<\dfrac{5}{24}$ 且 $a\neq 0$ 满足题意.

②由 $\Delta=4^2+4\times 24a=0$，得 $a=-\dfrac{1}{6}$，

③若 $f(-1)=0$，则 $a=\frac{5}{24}$，$f(x)=5x^2+4x-1$，可得 $x_1=\frac{1}{5}$，$x_2=-1$，满足题意；

若 $f(1)=0$，则 $a=-\frac{3}{24}=-\frac{1}{8}$，$f(x)=-3x^2+4x-1$，可得 $x_1=\frac{1}{3}$，$x_2=1$，满足题意，

综上，满足题意的实数 a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{8}, \frac{5}{24}\right]\cup\left\{-\frac{1}{6}\right\}$.

典题 16　解　(1)$f(x)+g(x)=\log_a(x+1)+\log_a(1-x)$，

则 $\begin{cases}x+1>0,\\1-x>0,\end{cases}$ 解得 $-1<x<1$，故定义域为 $(-1，1)$.

(2)设 $M(x)=f(x)+g(x)$，

则 $M(x)=\log_a(x+1)+\log_a(1-x)$，

故 $M(-x)=\log_a(1-x)+\log_a(1+x)=M(x)$，

所以 $M(x)=f(x)+g(x)$ 是偶函数.

典题 17　解　(1)**法一**　(直接判断法)因为函数 $y=2^x+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，又 $2^x+1>0$，

所以 $y_1=\frac{2}{2^x+1}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，

所以 $y_2=-\frac{2}{2x+1}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，

所以函数 $f(x)=a-\frac{2}{2^x+1}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

法二　(定义法)$f(x)=a-\frac{2}{2^x+1}(a\in\mathbf{R})$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

设 x_1，$x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{2（2x_1-2x_2）}{（2x_1+1）（2x_2+1）}$，

因为 $x_1<x_2$，所以 $2x_1<2x_2$，即 $2x_1-2x_2<0$.

又 $2x_1+1>0$，$2x_2+1>0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，

即 $f(x_1)<f(x_2)$.

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

(2)**法一**　(定义法)因为 $f(x)=a-\frac{2}{2^x+1}(a\in\mathbf{R})$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

要使 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，

即 $a-\frac{2}{2^{-x}+1}=-a+\frac{2}{2^{x}+1}$，

所以 $2a=\frac{2}{2^{x}+1}+\frac{2}{2^{-x}+1}=2$，所以 $a=1$，

所以存在实数 $a=1$，使函数 $f(x)$ 为奇函数.

法二　(特殊值法)由于 $f(x)$ 是奇函数，

故 $f(0)=a-\frac{2}{2^{0}+1}=0$，解得 $a=1$，

则 $f(x)=1-\frac{2}{2^{x}+1}$，经验证 $f(x)$ 是奇函数.

故存在实数 $a=1$，使函数 $f(x)$ 为奇函数.

真题再现　1　[**法一**　因为 $f(x)=x^3(a\cdot 2^x-2^{-x})$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且是偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，所以 $(-x)^3(a\cdot 2^{-x}-2^x)=x^3(a\cdot 2^x-2^{-x})$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，所以 $x^3(a-1)(2^x+2^{-x})=0$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，所以 $a=1$.

法二　因为 $f(x)=x^3(a\cdot 2^x-2^{-x})$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且是偶函数，所以 $f(-1)=f(1)$，所以 $-\left(\frac{a}{2}-2\right)=2a-\frac{1}{2}$，解得 $a=1$，经检验，$f(x)=x^3(2^x-2^{-x})$ 为偶函数，所以 $a=1$.

法三　由题意知 $f(x)=x^3(a\cdot 2^x-2^{-x})$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且是偶函数.设 $g(x)=x^3$，$h(x)=a\cdot 2^x-2^{-x}$，因为 $g(x)=x^3$ 为奇函数，所以 $h(x)=a\cdot 2^x-2^{-x}$ 为奇函数，所以 $h(0)=a\cdot 2^0-2^{-0}=0$，解得 $a=1$，经检验，$f(x)=x^3(2^x-2^{-x})$ 为偶函数，所以 $a=1$.]

典题 18　**解**　(1)当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，曲线段 OA 类似指数函数 $y=2^x$，

由 $O(0，0)$，$A(2，3)$ 可知 $f(x)=2^x-1$，

当 $2<x\leqslant 5$ 时，设直线段 AB 的解析式为 $y=ax+b$，

将 $A(2，3)$，$B(5，0)$ 代入得 $\begin{cases}3=2a+b,\\0=5a+b,\end{cases}$

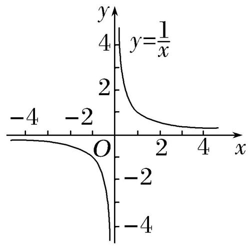
解得 $a=-1$，$b=5$，此时 $y=-x+5$.

所以 $f(x)=\begin{cases}2^x-1，0\leqslant x\leqslant 2,\\-x+5，2<x\leqslant 5.\end{cases}$

(2)离上课时间还有 5 分钟时，小明用了 2 分钟急速跑(先慢后快)到距教室 3 百米的操场找小华来上课，然后两个人用了 3 分钟时间匀速走到教室.

第三章　一元函数的导数及其应用

教材探究思考



探究 1　**提示**：函数 $y=\frac{1}{x}$的图象如图所示，结合函数图象及其导数 $y'=-\frac{1}{x^2}$发现，当 $x<0$ 时，随着 x 的增加，函数 $y=\frac{1}{x}$减少得越来越快；

当 $x>0$ 时，随着 x 的增加，函数减少得越来越慢.

点(1，1)处切线的斜率就是导数 $y'|_{x=1}=-\frac{1}{1^2}=-1$，故斜率为$-1$，过点(1，1)的切线方程为 $x+y-2=0$.

探究 2　**提示**：可以发现：

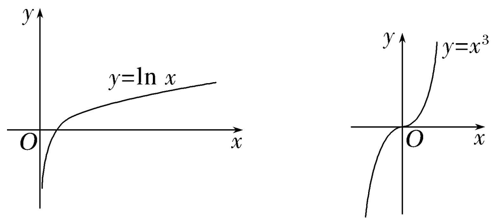
当 $t\in(0，a)$时，$h'(t)>0$，函数 $h(t)$的图象是“上升”的，函数 $h(t)$在$(0，a)$上单调递增；

当 $t\in(a，b)$时，$h'(t)<0$，函数 $h(t)$的图象是“下降”的，函数 $h(t)$在$(a，b)$上单调递减.

探究 3　**提示**：一般地，设函数的定义域为 I：如果对于定义域内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)(f(x_1)>f(x_2))$，那么就说函数在区间 D 上是增(减)函数.如果一个函数在某区间上是增函数或是减函数，那就说这个函数在该区间上具有单调性.上述定义也可以理解为：在区间 D 上，当$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$ 时，函数是增函数；当$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$ 时，函数在区间 D 上是减函数，而$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$是函数在区间$[x_1，x_2]$上的平均变化率，其几何意义是指曲线 $f(x)$过点$(x_1，f(x_1))$，$(x_2，f(x_2))$的割线的斜率.由此可见，当区间$(x_1，x_2)$的长度很小时，平均变化率就可以近似地反映函数 $y=f(x)$在这个区间上的单调性，而当 $x_2\to x_1$ 时，平均变化率的极限是函数 $y=f(x)$在 $x=x_1$ 处的导数.故当函数在某个区间内的导数大于零时，函数在此区间内单调递增；当导数小于零时，函数在此区间内单调递减.

探究 4　**提示**：对数函数 $y=\ln x$ 的导数为 $y'=\frac{1}{x}>0(x\in(0，+\infty))$，所以 $y=\ln x$ 在区间$(0，+\infty)$上单调递增.当 x 越来越大时，$y'=\frac{1}{x}$越来越小，所以函数 $y=\ln x$

递增得越来越慢，图象上升得越来越“平缓”(如图(1)).



(1)　　(2)

幂函数 $y=x^3$ 的导数为 $y'=3x^2>0(x\in(0，+\infty))$，所以 $y=x^3$ 在区间 $(0，+\infty)$上单调递增.当 x 越来越大时，$y'=3x^2$ 越来越大，函数 $y=x^3$ 递增得越来越快，图象上升得越来越“陡峭”(如图(2)).

一般地，如果一个函数在某一范围内导数的绝对值较大，那么函数在这个范围内变化得较快，这时函数的图象就比较“陡峭”(向上或向下)；反之，函数在这个范围内变化得较慢，函数的图象就比较“平缓”.

探究 5　提示：导数值为 0 的点不一定是函数的极值点.例如，对于函数 $f(x)=x^3$，我们有 $f'(x)=3x^2$.虽然 $f'(0)=0$，但由于无论 $x>0$，还是 $x<0$，恒有 $f'(x)>0$，即函数 $f(x)=x^3$ 是增函数，所以 0 不是函数 $f(x)=x^3$ 的极值点.一般地，函数 $y=f(x)$ 在一点的导数值为 0 是函数 $y=f(x)$在这点取极值的必要条件，而非充分条件.

教材典题重温

典题 1　解　求导得 $y'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，

∴切线方程的斜率 $k=y'|_{x=\pi}=-\dfrac{1}{\pi}$，

则切线方程为 $y=-\dfrac{1}{\pi}(x-\pi)$，即 $y=-\dfrac{x}{\pi}+1$.

真题再现　$y=5x+2$　$\left[y'=\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)'=\dfrac{2(x+2)-(2x-1)}{(x+2)^2}=\dfrac{5}{(x+2)^2}\right.$，所以 $y'|_{x=-1}=\dfrac{5}{(-1+2)^2}=5$，所以切线方程为 $y+3=5(x+1)$，即 $y=5x+2$.]

典题 2　解　因为 $f(x)=\ln x$，$g(x)=1-\dfrac{1}{x}$，

所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$g'(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

当 $x=1$ 时，$f'(x)=g'(x)=1$；

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>f'(x)>1$；

当 $x>1$ 时，$0<g'(x)<f'(x)<1$.

所以 $f(x)$，$g(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 上都是增函数.在区间 $(0，1)$ 上，$g(x)$ 的图象比 $f(x)$ 的图象要“陡峭”；在区间 $(1，+\infty)$ 上，$g(x)$ 的图象比 $f(x)$ 的图象要“平缓”.

所以 $f(x)$，$g(x)$ 的图象依次是图中的 C_2，C_1.

由此图象，还可以得到一个常用的不等式：

$1-\frac{1}{x}\leqslant \ln x\leqslant x-1(x>0)$.

典题 3　**解**　(1)函数的定义域为 $x\in\mathbf{R}$.

$f'(x)=(x+1)'e^x+(x+1)(e^x)'=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=-2$.

$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如表所示.

x	$(-\infty，-2)$	-2	$(-2，+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	$-\frac{1}{e^2}$	单调递增

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty，-2)$ 上单调递减，在区间 $(-2，+\infty)$ 上单调递增.

当 $x=-2$ 时，$f(x)$ 有极小值 $f(-2)=-\frac{1}{e^2}$.

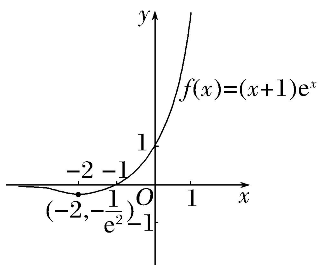
(2)令 $f(x)=0$，

解得 $x=-1$.

当 $x<-1$ 时，$f(x)<0$；当 $x>-1$ 时，$f(x)>0$.

所以，$f(x)$ 的图象经过特殊点

$A\left(-2，-\frac{1}{e^2}\right)$，$B(-1，0)$，$C(0，1)$.



当 $x\to-\infty$ 时，与一次函数相比，指数函数 $y=e^{-x}$ 呈爆炸性增长，从而 $f(x)=\frac{x+1}{e^{-x}}\to0$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，$f'(x)\to+\infty$.

我们画出 $f(x)$ 的大致图象如图所示.

(3)方程 $f(x)=a(a\in\mathbf{R})$ 的解的个数为函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 的交点个数.

由(1)及图可得，当 $x=-2$ 时，$f(x)$ 有最小值 $f(-2)=-\frac{1}{e^2}$.

所以，关于方程 $f(x)=a(a\in\mathbf{R})$ 的解的个数有如下结论：

当 $a<-\frac{1}{e^2}$时，解为 0 个；当 $a=-\frac{1}{e^2}$或 $a\geqslant 0$ 时，解为 1 个；

当$-\frac{1}{e^2}<a<0$ 时，解为 2 个.

典题 4　解　由题意可知，每瓶饮料的利润是 $y=f(r)=0.2\times\frac{4}{3}\pi r^3-0.8\pi r^2=0.8\pi\left(\frac{r^3}{3}-r^2\right)$，$0<r\leqslant 6$.

所以$f'(r)=0.8\pi(r^2-2r)$.令 $f'(r)=0$，解得 $r=2$.

当 $r\in(0，2)$时，$f'(r)<0$；当 $r\in(2，6)$时，$f'(r)>0$.

因此，当半径 $r>2$ 时，$f'(r)>0$，$f(r)$单调递增，即半径越大，利润越高；当半径 $r<2$ 时，$f'(r)<0$，$f(r)$单调递减，即半径越大，利润越低.

(1)半径为 6 cm 时，利润最大.

(2)半径为 2 cm 时，利润最小，这时 $f(2)<0$，表示此种瓶内饮料的利润还不够瓶子的成本，此时利润是负值.

典题 5　证明　设 $f(x)=x-1-\ln x$，

则 $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，$x>0$，

由 $f'(x)>0$，得 $x>1$，由 $f'(x)<0$，得 $0<x<1$，

故 $f(x)$在$(0，1)$上单调递减，在$(1，+\infty)$上单调递增，

所以 $f(x)\geqslant f(1)=0$，即 $x-1\geqslant\ln x$.

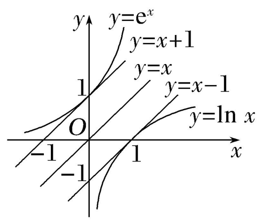
典题 6　证明　(1)设 $f(x)=e^x-1-x$，则 $f'(x)=e^x-1$，

由 $f'(x)>0$，得 $x>0$，由 $f'(x)<0$，得 $x<0$，

则 $f(x)$在$(-\infty，0)$上单调递减，在$(0，+\infty)$上单调递增，

故 $f(x)>e^0-1-0=0$，故 $e^x>1+x$.

(2)设 $f(x)=\ln x-x$，



则 $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，

由 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$，

由 $f'(x)<0$，得 $x>1$，

则 $f(x)$在$(0，1)$上单调递增，

在$(1，+\infty)$上单调递减，

所以$f(x)\leqslant f(1)=-1<0$，即$\ln x<x$；

由(1)知$e^x>1+x$，又$1+x>x$，故$e^x>x$，

所以$\ln x<x<e^x$，$x>0$.

利用如图所示可验证不等式成立.

真题再现 (1)B [**法一** $\because a=2\ln 1.01=\ln 1.020\ 1$，

$b=\ln 1.02$，$\therefore a>b$.

令$f(x)=2\ln(1+x)-(\sqrt{1+4x}-1)$，$0<x<1$，

令$\sqrt{1+4x}=t$，则$1<t<\sqrt{5}$，

$\therefore x=\dfrac{t^2-1}{4}$，

$\therefore g(t)=2\ln\left(\dfrac{t^2+3}{4}\right)-t+1=2\ln(t^2+3)-t+1-2\ln 4$，

$\therefore g'(t)=\dfrac{4t}{t^2+3}-1=\dfrac{4t-t^2-3}{t^2+3}$

$=\dfrac{(1-t)(t-3)}{t^2+3}>0$，

$\therefore g(t)$在$(1，\sqrt{5})$上单调递增，

$\therefore g(t)>g(1)=2\ln 4-1+1-2\ln 4=0$，

$\therefore f(x)>0$，$\therefore a>c$.

同理令$h(x)=\ln(1+2x)-(\sqrt{1+4x}-1)$，

再令$\sqrt{1+4x}=t$，则$1<t<\sqrt{5}$，$\therefore x=\dfrac{t^2-1}{4}$，

$\therefore \varphi(t)=\ln\left(\dfrac{t^2+1}{2}\right)-t+1$

$=\ln(t^2+1)-t+1-\ln 2$，

$\therefore \varphi'(t)=\dfrac{2t}{t^2+1}-1=\dfrac{-(t-1)^2}{t^2+1}<0$，

$\therefore \varphi(t)$在$(1，\sqrt{5})$上单调递减，

$\therefore \varphi(t)<\varphi(1)=\ln 2-1+1-\ln 2=0$，

$\therefore h(x)<0$，$\therefore c>b$，$\therefore a>c>b$.故选 B.

法二 $\because a=2\ln 1.01=\ln 1.020\ 1>b=\ln 1.02$，则排除 A，D，结合选项 B，C，只需判断$a$，$c$的大小，

故设$f(x)=2\ln(1+x)-\sqrt{1+4x}+1$，

$\therefore f'(x)=\dfrac{2}{1+x}-\dfrac{2}{\sqrt{1+4x}}$

$=2\times\dfrac{\sqrt{1+4x}-(1+x)}{(1+x)\sqrt{1+4x}}(0<x<1)$.

又$\because(\sqrt{1+4x})^2-(1+x)^2=2x-x^2$

$=x(2-x)>0$，

$\therefore\sqrt{1+4x}>1+x$，$\therefore f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$在$(0，1)$上单调递增，

$\therefore f(0.01)>f(0)=0$，

$\therefore 2\ln 1.01>\sqrt{1.04}-1$，

$\therefore a>c$，故选 B.]

(2)解　**法一**　令$g(x)=f(x)-1(x>0)$，

$g'(x)=\dfrac{x^{a-1}(a-x\ln a)}{a^x}$，

当$0<a<1$时，$g'(x)>0$，$g(x)$至多一个零点，故舍去；

当$a>1$时，由$g'(x)=0$得$x=\dfrac{a}{\ln a}$，

$\therefore g(x)$在$\left(0，\dfrac{a}{\ln a}\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{a}{\ln a}，+\infty\right)$上单调递减.

又当$x\to0$时，$g(x)\to-1<0$，$x\to+\infty$时，$g(x)\to-1<0$，

$\therefore g(x)_{\max}=g\left(\dfrac{a}{\ln a}\right)>0$，则$\left(\dfrac{a}{\ln a}\right)^a>a^{\frac{a}{\ln a}}\Rightarrow\dfrac{a}{\ln a}>a^{\frac{1}{\ln a}}$，

两边取以 e 为底的对数得$\ln\dfrac{a}{\ln a}>\ln a^{\frac{1}{\ln a}}$，

$\therefore\ln a-\ln(\ln a)>\dfrac{1}{\ln a}\cdot\ln a=1$，

令$\ln a=t$，得$t-\ln t>1$，

即$t-1>\ln t$①，

又$t-1\geqslant\ln t$(证明略)，当且$t=1$时取等号，

故①式的解为$t\neq1$，即$\ln a\neq1$，$\therefore a\neq e$，

$\therefore a$的取值范围是$(1，e)\cup(e，+\infty)$.

法二　曲线 $y=f(x)$与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点，

可转化为方程$\dfrac{x^a}{a^x}=1(x>0)$有两个不同的解，即方程$\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln a}{a}$有两个不同的解.

设 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}(x>0)$，

令 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$，得 $x=\mathrm{e}$，

当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$单调递增，

当 $x>\mathrm{e}$ 时，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$单调递减，

故 $g(x)_{\max}=g(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

且当 $x>\mathrm{e}$ 时，$g(x)\in\left(0,\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$，又 $g(1)=0$，

所以 $0<\dfrac{\ln a}{a}<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，由以上步骤知 $a>1$ 且 $a\neq\mathrm{e}$，

即 a 的取值范围为$(1，\mathrm{e})\cup(\mathrm{e}，+\infty)$.

典题 7　**解**　$f'(x)=2ax+b$，

(1)若 $a>0$，当 $f'(x)>0$，即 $x>-\dfrac{b}{2a}$时，函数单调递增；

当 $f'(x)<0$，即 $x<-\dfrac{b}{2a}$时，函数单调递减.

$\therefore y=f(x)$的单调递增区间为$\left(-\dfrac{b}{2a},\ +\infty\right)$，单调递减区间为$\left(-\infty,\ -\dfrac{b}{2a}\right)$.

(2)若 $a<0$，当 $f'(x)>0$，即 $x<-\dfrac{b}{2a}$时，函数单调递增；

当 $f'(x)<0$，即 $x>-\dfrac{b}{2a}$时，函数单调递减，

$\therefore y=f(x)$的单调递增区间为$\left(-\infty,\ -\dfrac{b}{2a}\right)$，单调递减区间为$\left(-\dfrac{b}{2a},\ +\infty\right)$.

真题再现　**解**　由题意知 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=3x^2-2x+a$，对于 $f'(x)=0$，$\Delta=(-2)^2-4\times3a=4(1-3a)$.

①当 $a\geqslant\dfrac{1}{3}$时，$\Delta\leqslant0$，$f'(x)\geqslant0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，所以 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

②当 $a<\dfrac{1}{3}$时，令 $f'(x)=0$，即 $3x^2-2x+a=0$，解得 $x_1=\dfrac{1-\sqrt{1-3a}}{3}$，$x_2=\dfrac{1+\sqrt{1-3a}}{3}$，

令 $f'(x)>0$，则 $x<x_1$ 或 $x>x_2$；

令 $f'(x)<0$，则 $x_1<x<x_2$.

所以 $f(x)$在$(-\infty，x_1)$上单调递增，在$(x_1，x_2)$上单调递减，在$(x_2，+\infty)$上单调递增.

综上，当 $a\geqslant\frac{1}{3}$时，$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

当 $a<\frac{1}{3}$时，$f(x)$在$\left(-\infty，\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3}，\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3}\right)$上单调递减，

在$\left(\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3}，+\infty\right)$上单调递增.

典题 8　解　因为 $f(x)=x(x-c)^2=x^3-2cx^2+c^2x$，

所以 $f'(x)=3x^2-4cx+c^2=(3x-c)(x-c)$.

当 $f'(x)=0$，即 $x=\frac{c}{3}$或 $x=c$ 时，

函数 $f(x)=x(x-c)^2$ 有极值.

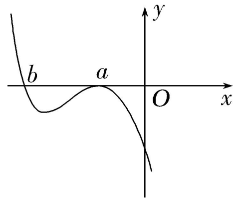
由题意知，当 $x=2$ 时，函数 $f(x)=x(x-c)^2$ 有极大值，所以 $c>0$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$\left(-\infty，\frac{c}{3}\right)$	$\frac{c}{3}$	$\left(\frac{c}{3}，c\right)$	c	$(c，+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

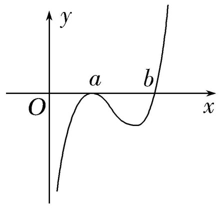
所以，当 $x=\frac{c}{3}$时，函数 $f(x)=x(x-c)^2$ 有极大值，此时，$\frac{c}{3}=2$，故 $c=6$.

真题再现　D　[若 $a=b$，则 $f(x)=a(x-a)^3$ 为单调函数，无极值点，不符合题意，故 $a\neq b$.$\therefore f(x)$有 $x=a$ 和 $x=b$ 两个不同零点，且在 $x=a$ 左右附近是不变号，在 $x=b$ 左右附近是变号的.依题意，$x=a$ 为函数 $f(x)=a(x-a)^2(x-b)$的极大值点，$\therefore$ 在 $x=a$ 左右附近都是小于零的.当 $a<0$ 时，由 $x>b$，$f(x)\leqslant 0$，画出 $f(x)$的图象如图(1)所示，



(1)

由图可知 $b<a$，$a<0$，故 $ab>a^2$.当 $a>0$ 时，由 $x>b$ 时，$f(x)>0$，画出 $f(x)$的图象如图(2)所示.由图可知 $b>a$，$a>0$，故 $ab>a^2$.



(2)

综上所述，$ab>a^2$ 成立.]

典题 9 D [开始面积增加幅度越来越大，到 l 经过圆心时到达最大，然后增加幅度越来越小.故选 D.]

典题 10 **解** ∵$y=x+\ln x$，∴$y'=1+\frac{1}{x}$,

∴曲线 $y=x+\ln x$ 在点(1，1)处的切线斜率 $k=2$，

∴切线方程为 $y-1=2\cdot(x-1)$，即 $y=2x-1$.

∵切线与曲线 $y=ax^2+(2a+3)x+1$ 只有一个公共点，将 $y=2x-1$ 代入 $y=ax^2+(2a+3)x+1$，得 $ax^2+(2a+1)x+2=0$.

由 $\Delta=0$ 得 $a=\frac{1}{2}$，故所求 a 的值为$\frac{1}{2}$.

真题再现 D [易知直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程 $y=kx+b$，则$\frac{|b|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ①，设直线 l 与曲线 $y=\sqrt{x}$的切点坐标为$(x_0，\sqrt{x_0})(x_0\geq 0)$，则 $y'|x=x_0=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=k$ ②，$\sqrt{x_0}=kx_0+b$ ③，由②③可得 $b=\frac{1}{2}\sqrt{x_0}$，将 $b=\frac{1}{2}\sqrt{x_0}$，$k=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$代入①得 $x_0=1$ 或 $x_0=-\frac{1}{5}$(舍去)，所以 $k=b=\frac{1}{2}$，故直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.]

典题 11 **解** 设圆锥的底面半径为 r，高为 h，体积为 V，那么 $r^2+h^2=R^2$，

因此 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(R^2-h^2)h=\frac{1}{3}\pi R^2h-\frac{1}{3}\pi h^3$，$0<h<R$.

令 $V'=\frac{1}{3}\pi R^2-\pi h^2=0$，解得 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}R$.

容易知道，$h=\frac{\sqrt{3}}{3}R$ 是函数 V 的极大值点，也是最大值点.

所以，当 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}R$ 时，容积最大.

把 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}R$ 代入 $r^2+h^2=R^2$，得 $r=\frac{\sqrt{6}}{3}R$.

由 $R\alpha=2\pi r$，得$\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.

即圆心角$\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$时，容器的容积最大.

典题 12　解　设这次行车的总费用是 y 元，依题意有

$$y=\left[35+7\left(3+\frac{x^2}{360}\right)\right]\times\frac{130}{x}=\left(56+\frac{7x^2}{360}\right)\times\frac{130}{x}$$

$$=910\left(\frac{8}{x}+\frac{x}{360}\right)(50\leqslant x\leqslant 100).$$

$y'=910\left(-\frac{8}{x^2}+\frac{1}{360}\right)$.令 $y'=0$，解得 $x=24\sqrt{5}\approx 53.7$.

即当车速约为 53.7 km/h 时，行车总费用最少，

总费用最少为$\left(56+\frac{7\times(24\sqrt{5})^2}{360}\right)\times\frac{130}{24\sqrt{5}}\approx 271$(元).

典题 13　解　$f'(x)=\frac{e^x(2x^2-3x)}{(x-1)^2}$，

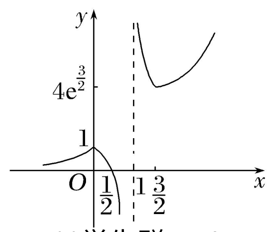
由 $f'(x)>0$，得 $x<0$ 或 $x>\frac{3}{2}$，

由 $f'(x)<0$，得 $x\in(0,1)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)$，

所以$f(x)$在$(-\infty,0)$，$\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$上单调递增，

在$(0,1)$，$\left(1,\frac{3}{2}\right)$上单调递减，

则$f(x)$的极大值为$f(0)=1$，



极小值为 $f\left(\frac{3}{2}\right)=4e^{\frac{3}{2}}$,

由 $f(x)>0$ 得 $x<\frac{1}{2}$ 或 $x>1$，

由 $f(x)<0$ 得 $\frac{1}{2}<x<1$，

由以上分析，$f(x)$的图象如图所示.

典题 14　证明　法一　构造“左凹右凸”的两个函数(函数增长速度差异).当 $m\leqslant 2$ 时，$e^x-\ln(x+m)>0\Leftrightarrow e^x-\ln(x+2)>0$.

当 $m=2$ 时，$f'(x)=e^x-\frac{1}{x+2}$

在$(-2，+\infty)$上单调递增.

又 $f'(-1)=\frac{1}{e}-1<0$，$f'(0)=1-\frac{1}{2}>0$.

所以 $f'(x)=0$ 在$(-2，+\infty)$上有唯一实根 x_0，且 $-1<x_0<0$.

于是 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处取到最小值.

又 $f'(x_0)=0$，得 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0+2}$,

两边取对数得 $\ln(x_0+2)=-x_0$，

故 $f(x)\geqslant f(x_0)=ex_0-\ln(x_0+2)=\frac{1}{x_0+2}+x_0=\frac{(x_0+1)^2}{x_0+2}>0$.

综上可知，当 $m\leqslant 2$ 时，$f(x)>0$ 成立.

法二　只需证 $e^x\geqslant x+1\geqslant \ln(x+2)$.

令 $g(x)=e^x-(x+1)$，则 $g'(x)=e^x-1$.

令 $g'(x)=0$，解得 $x=0$.

当 $x<0$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$.

因此，$g(x)$在$(-\infty，0)$上单调递减，在$(0，+\infty)$上单调递增.

故 $g(x)\geqslant g(0)=0$，即 $e^x\geqslant x+1$，且等号成立，当且仅当 $x=0$.

令 $h(x)=x+1-\ln(x+2)$，则 $h'(x)=\frac{x+1}{x+2}$.

令 $h'(x)=0$，解得 $x=-1$.

当 $x<-1$ 时，$h'(x)<0$；当 $x>-1$ 时，$h'(x)>0$.

因此，$h(x)$在$(-2，-1)$上单调递减，在$(-1，+\infty)$上单调递增.

故 $h(x)\geqslant h(-1)=0$，

即 $x+1\geqslant \ln(x+2)$，且等号成立，当且仅当 $x=-1$.

综上，有 $e^x\geqslant x+1\geqslant \ln(x+2)$，且两处等号不同时成立，

故 $e^x>\ln(x+2)$，原命题得证.

典题 15　解　(1)由于 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x$，

故 $f'(x)=2ae^{2x}+(a-2)e^x-1=(ae^x-1)(2e^x+1)$，

①当 $a\leqslant 0$ 时，$ae^x-1<0$，$2e^x+1>0$，

从而 $f'(x)<0$ 恒成立.$f(x)$在 **R** 上单调递减.

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，

从而 $ae^x-1=0$，得 $x=-\ln a$.

x	$(-\infty，-\ln a)$	$-\ln a$	$(-\ln a，+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$在 **R** 上单调递减；

当 $a>0$ 时，$f(x)$在$(-\infty，-\ln a)$上单调递减，

在$(-\ln a，+\infty)$上单调递增.

(2)由(1)知，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$在 **R** 上单调递减，故 $f(x)$在 **R** 上至多一个零点，不满足条件.

当 $a>0$ 时，$f(x)_{\min}=f(-\ln a)=1-\dfrac{1}{a}+\ln a$.

令 $g(a)=1-\dfrac{1}{a}+\ln a(a>0)$，则 $g'(a)=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a}>0$，

从而 $g(a)$在$(0，+\infty)$上单调递增，而 $g(1)=0$.

故当 $0<a<1$ 时，$g(a)<0$.

当 $a=1$ 时，$g(a)=0$.当 $a>1$ 时，$g(a)>0$.

①若 $a>1$，则 $f(x)_{\min}=1-\dfrac{1}{a}+\ln a>0$，

从而 $f(x)$无零点，不满足条件.

②若 $a=1$，则 $f(x)_{\min}=1-\dfrac{1}{a}+\ln a=0$，不满足条件.

③若 $0<a<1$，则 $f(x)_{\min}=1-\frac{1}{a}+\ln a<0$，

注意到 $-\ln a>0$，$f(-1)=\frac{a}{e^2}+\frac{a}{e}+1-\frac{2}{e}>0$.

故 $f(x)$在$(-1，-\ln a)$上有一个实根.

而又 $\ln\left(\frac{3}{a}-1\right)>\ln\ \frac{1}{a}=-\ln a$，

且 $f\left(\ln\left(\frac{3}{a}-1\right)\right)=e^{\ln\left(\frac{3}{a}-1\right)}\left(a\cdot e^{\ln\left(\frac{3}{a}-1\right)}+a-2\right)-\ln\left(\frac{3}{a}-1\right)$

$=\left(\frac{3}{a}-1\right)\cdot(3-a+a-2)-\ln\left(\frac{3}{a}-1\right)$

$=\left(\frac{3}{a}-1\right)-\ln\left(\frac{3}{a}-1\right)>0$.

故 $f(x)$在$\left(-\ln a，\ln\left(\frac{3}{a}-1\right)\right)$上有一个实根.

所以 $f(x)$在$(-1，-\ln a)$

及$\left(-\ln a，\ln\left(\frac{3}{a}-1\right)\right)$上均有一个实数根，

故 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上恰有两个实根，

所以实数 a 的取值范围为$(0，1)$.

第四章　三角函数、解三角形

教材探究思考

探究 1　提示：可以发现，圆心角α所对的弧长与半径的比值，只与α的大小有关.也就是说，这个比值随α的确定而唯一确定.这就启发我们，可以利用圆的弧长与半径的关系度量圆心角.

探究 2　提示：成立.

探究 3　提示：由 $y=\sin\left(-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$得 $y=-\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$，

令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得$\frac{5\pi}{3}+4k\pi\leqslant x\leqslant\frac{11\pi}{3}+4k\pi$.

又 $x\in[-2\pi，2\pi]$，所以 $y=\sin\left(-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in[-2\pi，2\pi]$的单调递增区间是

$\left[-2\pi,\ -\dfrac{\pi}{3}\right]$，$\left[\dfrac{5\pi}{3},\ 2\pi\right]$.

探究 4　提示：对于任意角α，等式 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$成立.

法一　$\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sin\left[\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\right]=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

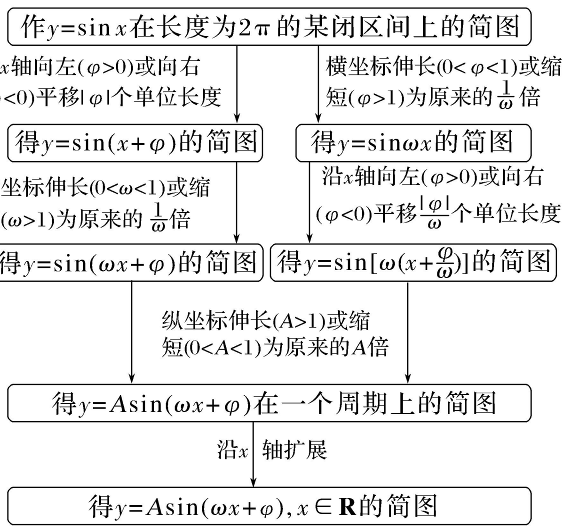
法二　$\because \sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\alpha-\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$，

又$\because \cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$，

$\therefore \sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$，

综上，对于任意角α，等式 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$成立.

探究 5　提示：由函数 $y=\sin x$ 的图象变换得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\ \omega>0)$图象的步骤



上述两种变换的区别：先相位变换再周期变换(伸缩变换)，平移的量是$|\varphi|$个单位长度；而先周期变换(伸缩变换)再相位变换，平移的量是$\dfrac{|\varphi|}{\omega}(\omega>0)$个单位长度.原因在于相位变换和周期变换都是针对 x 而言的.

教材典题重温

典题 1　解　设大齿轮的半径为 R，小齿轮的半径为 r.

根据题意设大齿轮的周长 $L=48$.

小齿轮的周长 $l=20$.故$\dfrac{2\pi R}{2\pi r}=\dfrac{48}{20}$，即$\dfrac{R}{r}=\dfrac{48}{20}$.

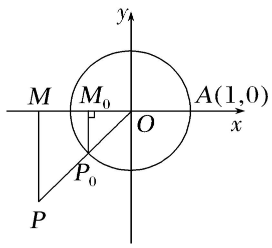
(1)当大轮转动一周时，小轮转动的角度为θ，$\therefore \theta r=2\pi R$，

$\theta=\dfrac{R}{r}\times 2\pi=\dfrac{48}{20}\times 2\pi=\dfrac{24}{5}\pi$.

(2)大轮的转速 $v_1=3$ r/s，故小轮的转速 $v_2=\dfrac{48}{20}\times 3$，

1 s 转过的弧长为$\dfrac{48}{20}\times 3\times 2\pi\times 10.5=151.2\pi$(cm).

典题 2　证明　如图，设角α的终边与单位圆交于点 $P_0(x_0,y_0)$，分别过点 P，P_0 作 x 轴的垂线 PM，P_0M_0，垂足分别为 M，M_0，则



$|P_0M_0|=|y_0|$，$|PM|=|y|$，$|OM_0|=|x_0|$，$|OM|=|x|$，$\triangle OMP\backsim\triangle OM_0P_0$.

于是$\dfrac{|P_0M_0|}{1}=\dfrac{|PM|}{r}$，即$|y_0|=\dfrac{|y|}{r}$.

因为 y_0 与 y 同号，所以 $y_0=\dfrac{y}{r}$，即 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$.

同理可得 $\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$，$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$.

根据勾股定理，$r=\sqrt{x^2+y^2}$.由典题 2 可知，只要知道角α终边上任意一点 P 的坐标，就可以求得角α的各个三角函数值，并且这些函数值不会随 P 点位置的改变而改变.

典题 3　证明　法一　由 $\cos x\neq 0$，知 $\sin x\neq -1$，

所以 $1+\sin x\neq 0$，于是左边$=\dfrac{\cos x(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$

$=\dfrac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}=\dfrac{\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x}=\dfrac{1+\sin x}{\cos x}=$右边.

所以，原式成立.

法二　因为$(1-\sin x)(1+\sin x)=1-\sin^2 x=\cos^2 x$

$=\cos x\cos x$，

且 $1-\sin x\neq 0$，$\cos x\neq 0$，所以$\dfrac{\cos x}{1-\sin x}=\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$.

典题 4　解　因为α为第二象限角，

所以$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}}$

$-\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}}=\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}}$

$-\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}}=-\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2\tan\alpha$.

典题 5　解　(1)$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$；

(2)$\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha$.

典题 6　(1)解　根据特殊角三角函数值计算可知

$\sin^4\frac{\pi}{3}-\cos^4\frac{\pi}{3}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4-\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{2}$,

$\sin^2\frac{\pi}{3}-\cos^2\frac{\pi}{3}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$,

所以 $\sin^4\frac{\pi}{3}-\cos^4\frac{\pi}{3}=\sin^2\frac{\pi}{3}-\cos^2\frac{\pi}{3}$.

(2)解　取$\alpha=\frac{\pi}{6}$,

则 $\sin^4\frac{\pi}{6}-\cos^4\frac{\pi}{6}=\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4=-\frac{1}{2}$,

$\sin^2\frac{\pi}{6}-\cos^2\frac{\pi}{6}=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$,

所以 $\sin^4\frac{\pi}{6}-\cos^4\frac{\pi}{6}=\sin^2\frac{\pi}{6}-\cos^2\frac{\pi}{6}$.

(3)证明　$\forall x\in\mathbf{R}$，$\sin^4x-\cos^4x$

$=(\sin^2x+\cos^2x)(\sin^2x-\cos^2x)=\sin^2x-\cos^2x$

所以 $\sin^2x-\cos^2x=\sin^4x-\cos^4x$.

典题 7　解　原式＝

$$\frac{(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)(-\sin\alpha)\cos\left[5\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{(-\cos\alpha)\sin(\pi-\alpha)[-\sin(\pi+\alpha)]\sin\left[4\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]}$$

$=\dfrac{-\sin^2\alpha\cos\alpha\left[-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{(-\cos\alpha)\sin\alpha[-(-\sin\alpha)]\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$

$=-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\tan\alpha.$

典题 8　解　设$\beta=53°-\alpha$，$\gamma=37°+\alpha$，那么$\beta+\gamma=90°$，

从而$\gamma=90°-\beta$.

于是 $\sin\gamma=\sin(90°-\beta)=\cos\beta$.

因为$-270°<\alpha<-90°$，所以 $143°<\beta<323°$.

由 $\sin\beta=\dfrac{1}{5}>0$，得 $143°<\beta<180°$.

所以 $\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^2}=-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$,

所以 $\sin(37°+\alpha)=\sin\gamma=-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

典题 9　解　当 $n=4k(k\in\mathbf{Z})$时，

$\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}+\alpha\right)=\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha$;

$\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(2k\pi-\alpha)=\cos\alpha$.

当 $n=4k+1(k\in\mathbf{Z})$时，

$\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$;

$\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$.

当 $n=4k+2(k\in\mathbf{Z})$时，

$\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}+\alpha\right)=\sin(2k\pi+\pi+\alpha)=-\sin\alpha$;

$\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(2k\pi+\pi-\alpha)=-\cos\alpha$,

当 $n=4k+3(k\in\mathbf{Z})$时，

$\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$.

$\cos\left(\frac{n\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(2k\pi+\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$.

典题 10 **解** (1)因为$-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{10}<-\frac{\pi}{18}<0$，

正弦函数 $y=\sin x$ 在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\ 0\right]$上单调递增，

所以 $\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)>\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$.

(2)$\cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right)=\cos\frac{23\pi}{5}=\cos\frac{3\pi}{5}$，$\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right)=\cos\frac{17\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$.

因为 $0<\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{5}<\pi$，且函数 $y=\cos x$ 在区间$[0,\ \pi]$上单调递减，

所以 $\cos\frac{\pi}{4}>\cos\frac{3\pi}{5}$，即 $\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right)>\cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right)$.

典题 11 **解** 令 $z=\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}$，$x\in[-2\pi,\ 2\pi]$，

则 $z\in\left[-\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi\right]$.

因为 $y=\sin z$，$z\in\left[-\frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3}\right]$的单调递增区间是$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，

且由$-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}$，得$-\frac{5\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$.

所以函数 $y=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in[-2\pi,\ 2\pi]$的单调递增区间是$\left[-\frac{5\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right]$.

典题 12 **解** 令 $z=2x+\frac{\pi}{4}$，则函数 $y=\sin z$ 的单调递减区间为$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{3}{2}\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{3}{2}\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $k\pi+\frac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5}{8}\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

设 $A=[0,\ \pi]$，$B=\left\{x|k\pi+\frac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5}{8}\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，

易知 $A\cap B=\left[\frac{\pi}{8},\ \frac{5}{8}\pi\right]$，

故函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，$x\in[0,\ \pi]$的单调递减区间为$\left[\frac{\pi}{8},\ \frac{5}{8}\pi\right]$.

真题再现　A　[令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得$-\frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.取 $k=0$，则$-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$.因为$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)\subsetneqq\left[-\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}\right]$，所以区间$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$是函数 $f(x)$的单调递增区间.]

典题 13　**解**　自变量 x 的取值应满足

$\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $x\neq 2k+\frac{1}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以函数的定义域是$\left\{x|x\neq 2k+\frac{1}{3},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

设 $z=\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}$，又 $\tan(z+\pi)=\tan z$，

所以 $\tan\left[\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)+\pi\right]=\tan\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$，

即 $\tan\left[\frac{\pi}{2}（x+2）+\frac{\pi}{3}\right]=\tan\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$.

因为$\forall x\in\left\{x|x\neq 2k+\frac{1}{3},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，

都有 $\tan\left[\frac{\pi}{2}（x+2）+\frac{\pi}{3}\right]=\tan\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$，

所以函数的周期为 2.

由$-\frac{\pi}{2}+k\pi<\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得$-\frac{5}{3}+2k<x<\frac{1}{3}+2k$，$k\in\mathbf{Z}$.

因此，函数在区间$\left(-\frac{5}{3}+2k,\ \frac{1}{3}+2k\right)$，$k\in\mathbf{Z}$ 上单调递增.

典题 14　**解**　(1)$\left\{x|\frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2)$\left\{x|-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

典题 15　**解**　(1)$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，即 $f(x)$的最小正周期为π.

(2)当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$时，则 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{5\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}\right]$，

故 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-1,\ \frac{1}{2}\right]$.

故 $f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$上的最大值是$\frac{1}{4}$，最小值是$-\frac{1}{2}$.

典题 16　解　由正弦函数的周期性可知，除原点外，正弦曲线还有其他对称中心，其对称中心坐标为$(k\pi,\ 0)$，$k\in\mathbf{Z}$.

正弦曲线是轴对称图形，其对称轴方程是 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

利用诱导公式可以解释上述现象.

由余弦函数和正切函数的周期性可知，余弦曲线的对称中心坐标为$\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\ 0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，对称轴方程是 $x=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$；

正切曲线的对称中心坐标为$\left(\frac{k\pi}{2},\ 0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，正切曲线不是轴对称图形.

典题 17　解　法一　在$\triangle ABC$ 中，由 $\cos A=\frac{4}{5}$，$0<A<\pi$，

得 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$,

所以 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{3}{5}\times\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$,

$$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}=\frac{2\times\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{24}{7},$$

又 $\tan B=2$，所以 $\tan 2B=\frac{2\tan B}{1-\tan^2 B}=\frac{2\times 2}{1-2^2}=-\frac{4}{3}$.

$$\text{于是 }\tan(2A+2B)=\frac{\tan 2A+\tan 2B}{1-\tan 2A\tan 2B}=\frac{\frac{24}{7}-\frac{4}{3}}{1-\frac{24}{7}\times\left(-\frac{4}{3}\right)}=\frac{44}{117}.$$

法二　在$\triangle ABC$ 中，由 $\cos A=\frac{4}{5}$，$0<A<\pi$，

得 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$,

所以 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{3}{5}\times\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$.又 $\tan B=2$，

所以 $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{\frac{3}{4}+2}{1-\frac{3}{4}\times 2}=-\frac{11}{2}$，

所以 $\tan(2A+2B)=\tan[2(A+B)]$

$=\frac{2\tan(A+B)}{1-\tan^2(A+B)}=\frac{2\times\left(-\frac{11}{2}\right)}{1-\left(-\frac{11}{2}\right)^2}=\frac{44}{117}$.

典题 18　证明　(1)因为 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$，

将以上两式的左右两边分别相加，

得 $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$，

即 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$.

(2)由(1)可得 $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$.①

设$\alpha+\beta=\theta$，$\alpha-\beta=\varphi$，那么 $\alpha=\frac{\theta+\varphi}{2}$，$\beta=\frac{\theta-\varphi}{2}$.

把α，β的值代入①，

即得 $\sin\theta+\sin\varphi=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$.

典题 19　解　(1)$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

$=2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

因此，所求周期为 2π，最大值为 2，最小值为-2.

(2)设 $3\sin x+4\cos x=A\sin(x+\varphi)$，

则 $3\sin x+4\cos x=A\sin x\cos\varphi+A\cos x\sin\varphi$.

于是 $A\cos\varphi=3$，$A\sin\varphi=4$，

于是 $A^2\cos^2\varphi+A^2\sin^2\varphi=25$，所以 $A^2=25$.

取 $A=5$，则 $\cos\varphi=\dfrac{3}{5}$，$\sin\varphi=\dfrac{4}{5}$.

由 $y=5\sin(x+\varphi)$可知，所求周期为 2π，最大值为 5，最小值为-5.

典题 20 解 在 Rt△OBC 中，$OB=\cos\alpha$，$BC=\sin\alpha$.

在 Rt△OAD 中，$\dfrac{DA}{OA}=\tan 60°=\sqrt{3}$.

所以 $OA=\dfrac{\sqrt{3}}{3}DA=\dfrac{\sqrt{3}}{3}BC=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha$，

$AB=OB-OA=\cos\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha$.

设矩形 $ABCD$ 的面积为 S，则 $S=AB\cdot BC$

$=\left(\cos\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha\right)\sin\alpha=\sin\alpha\cos\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin^2\alpha$

$=\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{6}(1-\cos 2\alpha)=\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\cos 2\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha+\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

由 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$，得$\dfrac{\pi}{6}<2\alpha+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，

所以当 $2\alpha+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$时，$S_{最大}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

因此，当$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$时，矩形 $ABCD$ 的面积最大，最大面积为$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

典题 21 解 存在.设存在锐角α，β使$\alpha+2\beta=\dfrac{2\pi}{3}$，

所以$\dfrac{\alpha}{2}+\beta=\dfrac{\pi}{3}$，$\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)=\sqrt{3}$.

又 $\tan\dfrac{\alpha}{2}\tan\beta=2-\sqrt{3}$，①

因为 $\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)=\dfrac{\tan\dfrac{\alpha}{2}+\tan\beta}{1-\tan\dfrac{\alpha}{2}\tan\beta}$，

所以 $\tan\dfrac{\alpha}{2}+\tan\beta$

$=\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\left(1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\beta\right)=3-\sqrt{3}$.②

联立①②解得 $\tan\beta=1$，$\beta=\frac{\pi}{4}$.

将$\beta=\frac{\pi}{4}$代入$\alpha+2\beta=\frac{2\pi}{3}$得$\alpha=\frac{\pi}{6}$,

经检验$\alpha=\frac{\pi}{6}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$是符合题意的两锐角.

典题 22　解　(1)$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+4x\right)+\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sin\left[\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{2}\right]+\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$

$=\cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\sin\left(4x+\frac{\pi}{12}\right)$.

由 $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$得 $f(x)$的周期为$\frac{\pi}{2}$,

令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 4x+\frac{\pi}{12}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$,

得$-\frac{7\pi}{48}+\frac{1}{2}k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{48}+\frac{1}{2}k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$,

则 $f(x)$的单调递增区间是$\left[-\frac{7\pi}{48}+\frac{1}{2}k\pi，\frac{5\pi}{48}+\frac{1}{2}k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(2)$f(x)=a\sin x+b\cos x$

$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$，其中 $\tan\varphi=\frac{b}{a}$,

则 $f(x)$的最大值为$\sqrt{a^2+b^2}$，最小值为$-\sqrt{a^2+b^2}$.

典题 23　证明　$\sin^2\alpha+\cos^2(\alpha+30°)+\sin\alpha\cos(\alpha+30°)$

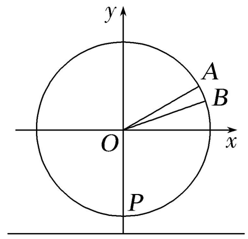
$=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1+\cos(60°+2\alpha)}{2}+\frac{\sin(30°+2\alpha)-\sin 30°}{2}$

$=1+\frac{\cos(60°+2\alpha)-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1}{2}\left[\sin(30°+2\alpha)-\frac{1}{2}\right]$

$=1+\frac{-2\sin(30°+2\alpha)\sin 30°}{2}+\frac{1}{2}\left[\sin(30°+2\alpha)-\frac{1}{2}\right]$

$=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\sin(30°+2\alpha)+\frac{1}{2}\sin(30°+2\alpha)=\frac{3}{4}$.

典题 24　解　如图，设座舱距离地面最近的位置为点 P，以轴心 O 为原点，与地面平行的直线为 x 轴建立直角坐标系.



(1)设 $t=0$ min 时，游客甲位于点 $P(0，-55)$，以 OP 为终边的角为 $-\frac{\pi}{2}$；

根据摩天轮转一周大约需要 30 min，可知座舱转动的角速度约为 $\frac{\pi}{15}$ rad/min，

由题意可得 $H=55\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)+65$，$0\leqslant t\leqslant 30$.

(2)当 $t=5$ 时，$H=55\sin\left(\frac{\pi}{15}\times 5-\frac{\pi}{2}\right)+65=37.5$.

所以游客甲在开始转动 5 min 后距离地面的高度约为 37.5 m.

(3)如图，甲、乙两人的位置分别用点 A，B 表示，则 $\angle AOB=\frac{2\pi}{48}=\frac{\pi}{24}$.

经过 t min 后甲距离地面的高度为 $H_1=55\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)+65$，点 B 相对于点 A 始终落后 $\frac{\pi}{24}$ rad，此时乙距离地面的高度为 $H_2=55\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{13\pi}{24}\right)+65$.

则甲、乙距离地面的高度差 $h=|H_1-H_2|$

$=55\left|\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{13\pi}{24}\right)\right|$

$=55\left|\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{13\pi}{24}-\frac{\pi}{15}t\right)\right|$，

利用 $\sin\theta+\sin\varphi=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$，

可得 $h=110\left|\sin\frac{\pi}{48}\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{48}\right)\right|$，$0\leqslant t\leqslant 30$.

当 $\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{48}=\frac{\pi}{2}\left(或\frac{3\pi}{2}\right)$，即 $t\approx 7.8$(或 22.8)时，h 的最大值为 $110\sin\frac{\pi}{48}\approx 7.2$.

所以甲、乙两人距离地面的高度差的最大值约为 7.2 m.

典题 25　解　$y=\frac{2}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象与正弦曲线的关系：先将正弦曲线($y=\sin x$

图象)上所有的点向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，得到 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象；然后使所得曲线在纵坐标保持不变的情况下得各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，得到函数 $y=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象；最后在横坐标保持不变的情况下将各点的纵坐标缩短到原来的$\frac{2}{3}$倍，得到 $y=\frac{2}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象.

真题再现　B　[依题意，将 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，再将所得曲线上所有点的横坐标扩大到原来的 2 倍，得到 $f(x)$的图象，

所以 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象

$\xrightarrow{\text{向左平移}\frac{\pi}{3}\text{个单位长度}} y=\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$的图象

$\xrightarrow{\text{所有点的横坐标扩大到原来的 2 倍}}$

$f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$的图象．]

典题 26　$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$　[由 $\frac{1}{2}T=\frac{5\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{2}$，故 $T=\pi$，

则$\omega=2$，又 $2\times\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\varphi=\frac{\pi}{2}$，则$\varphi=\frac{2\pi}{3}$，

又 $A=2$，故 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$.]

真题再现　$-\sqrt{3}$　[由题图可知 $\frac{3}{4}T=\frac{13\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}$（$T$ 为 $f(x)$ 的最小正周期），即 $T=\pi$，所以$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，即$\omega=2$，故 $f(x)=2\cos(2x+\varphi)$.点$\left(\frac{\pi}{3},\ 0\right)$可看作“五点作图法”中的第二个点，故 $2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，得$\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

故 $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

所以 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\left(2\times\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=-2\cos\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3}$.]

典题 27　解　（1）由图可知，这段时间的最大温差是 20 ℃.

（2）由图可以看出，从 6～14 时的图象是函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 的半个周期的图象，

所以 $A=\frac{1}{2}(30-10)=10$，$b=\frac{1}{2}(30+10)=20$.

因为 $\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\omega}=14-6$，所以 $\omega=\frac{\pi}{8}$.

将 $A=10$，$b=20$，$\omega=\frac{\pi}{8}$，$x=6$，$y=10$ 代入上式，可得 $\varphi=\frac{3\pi}{4}$.

综上，所求解析式为

$y=10\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{3\pi}{4}\right)+20$，$x\in[6,14]$.

典题 28　解　由正弦定理，得 $\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{2\sin 30°}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 $c>b$，$B=30°$，所以 $30°<C<180°$.

于是 $C=45°$，或 $C=135°$.

（1）当 $C=45°$ 时，$A=105°$.

此时 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\sin 105°}{\sin 30°}=\frac{\sqrt{2}\sin(60°+45°)}{\sin 30°}$

$=\frac{\sqrt{2}(\sin 60°\cos 45°+\cos 60°\sin 45°)}{\sin 30°}$

$=\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}+1$.

（2）当 $C=135°$ 时，$A=15°$.

此时 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\sin 15°}{\sin 30°}=\frac{\sqrt{2}\sin(45°-30°)}{\sin 30°}$

$=\frac{\sqrt{2}(\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°)}{\sin 30°}$

$=\dfrac{\sqrt{2}\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}\right)}{\dfrac{1}{2}}=\sqrt{3}-1.$

典题 29　解　选择一条水平基线 HG，使 H，G，B 三点在同一条直线上.

在 G，H 两点用测角仪器测得 A 的仰角分别是α，β，$CD=a$，测角仪器的高是 h，那么，在△ACD 中，

由正弦定理，得 $AC=\dfrac{a\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$.

所以，这座建筑物的高度为

$AB=AE+h=AC\sin\alpha+h=\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}+h.$

真题再现　A　[因为 $FG/\!/AB$，所以$\dfrac{FG}{AB}=\dfrac{GC}{CA}$，所以 $GC=\dfrac{FG}{AB}\cdot CA$.因为 $DE/\!/AB$，所以$\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{EH}{AH}$，所以 $EH=\dfrac{DE}{AB}\cdot AH$.又 $DE=FG$，所以 $GC-EH=\dfrac{DE}{AB}\cdot(CA-AH)=\dfrac{DE}{AB}\cdot HC=\dfrac{DE}{AB}\cdot(HG+GC)=\dfrac{DE}{AB}\cdot(EG-EH+GC)$.由题设中信息可得，表目距的差为 $GC-EH$，表高为 DE，表距为 EG，则上式可化为，表目距的差$=\dfrac{表高}{AB}\times$（表距＋表目距的差），所以 $AB=\dfrac{表高}{表目距的差}\times$（表距＋表目距的差）$=\dfrac{表高\times表距}{表目距的差}+$表高，故选 A.]

典题 30　解　法一　（1）根据正弦定理，条件式即为

$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin B+\sin C$，

也即 $\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin(A+C)+\sin C$，

所以 $\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin A\cos C+\cos A\sin C+\sin C$.

整理得 $\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，即 $\sin(A-30°)=\dfrac{1}{2}$.

所以 $A-30°=30°$，即 $A=60°$.

（2）由 $A=60°$，$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{3}$，得 $bc=4$.

由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc-2bc\cos A$，所以 $b+c=$

4.

又 $bc=4$，所以 $b=c=2$.

法二　（1）由于 $b=a\cos C+c\cos A$，

则 $a\cos C+\sqrt{3}a\sin C-a\cos C-c\cos A-c=0$.

即 $\sqrt{3}a\sin C-c\cos A-c=0$，即$\sqrt{3}\times\frac{a}{c}\sin C-\cos A-1=0$.

由正弦定理得$\sqrt{3}\times\frac{\sin A}{\sin C}\times\sin C-\cos A-1=0$.

即 $\sqrt{3}\sin A-\cos A-1=0$.

即 $\sin(A-30°)=\frac{1}{2}$，所以 $A-30°=30°$，即 $A=60°$.

（2）同法一.

真题再现　解　（1）因为 $2\sin C=3\sin A$，所以 $2c=3a$，又因为 $c=a+2$，所以 $2(a+2)=3a$，则 $a=4$，$b=a+1=5$，$c=a+2=6$，

所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{8}$，所以 C 为锐角，则 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，

因此 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 4\times 5\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$.

（2）显然 $c>b>a$，若△ABC 为钝角三角形，则 C 为钝角，

故由余弦定理可得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=\frac{a^2+(a+1)^2-(a+2)^2}{2a(a+1)}=\frac{a^2-2a-3}{2a(a+1)}<0$，又 $a>0$，

故解得 $0<a<3$.

又由三角形三边关系可得 $a+a+1>a+2$，可得 $a>1$，故 $1<a<3$.

又 a 为正整数，故 $a=2$.

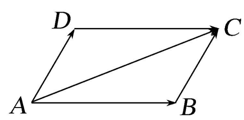
第五章　平面向量、复数

教材探究思考

探究 1　提示：（1）两个法则的使用条件不同.

三角形法则适用于任意两个非零向量求和，平行四边形法则只适用于两个不共线的向量求和.

（2）当两个向量不共线时，两个法则是一致的，如图所示，

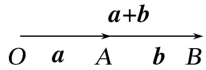


在▱$ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$（平行四边形法则）.

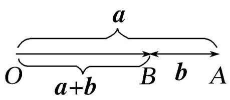
又因为$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$，所以$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$（三角形法则）.

探究 2　提示：（1）如果向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，它们的加法与数的加法类似.

令$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线且同向时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，如图.



当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线且反向时，不妨设$|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$，则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$，如图.



（2）当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时，由图和三角形两边之和大于第三边知$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

综合探究（1）知，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，当且仅当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同向时取等号.

事实上，$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant||\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}||$，

在“$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$”中，当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 反向或至少有一个为零向量时等号成立，

在“$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant||\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}||$”中，当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同向或至少有一个为零向量时等号成立.

探究 3　提示：设点 P 是线段 P_1P_2 上的一点，

P_1（x_1，y_1），P_2（x_2，y_2），P（x，y），那么$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P}=\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{PP_2}=\overrightarrow{OP_1}+\lambda$（$\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP}$）.

于是（$1+\lambda$）$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{OP_2}$.

即（$1+\lambda$）（x，y）＝（x_1，y_1）$+\lambda$（x_2，y_2）＝（$x_1+\lambda x_2$，$y_1+\lambda y_2$），

于是，点 P 的坐标为（x，y）$=\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$.

事实上，这就是线段定比分点坐标.

已知两点 P_1（x_1，y_1），P_2（x_2，y_2），在两点连线上有一点 P，

设它的坐标为（x，y），且$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，

则 $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，$y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$（$\lambda\neq-1$）.

（1）当点 P 在线段 P_1P_2 上时，$\lambda>0$.

（2）当点 P 在线段 P_1P_2（或 P_2P_1）的延长线上时，$\lambda<0$.

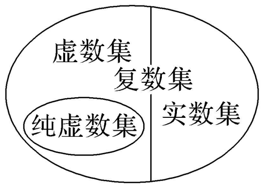
（3）当点 P 与点 P_1 重合时，$\lambda=0$.特别地，当$\lambda=1$ 时，点 P 为线段 P_1P_2 的中点.

探究 4　提示： 显然，实数集 $\mathbf{R}$ 是复数集 $\mathbf{C}$ 的真子集，即 $\mathbf{R}\quad\mathbf{C}$.

这样，复数 $z=a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$）可以分类如下：

$$复数\begin{cases}实数（b=0），\\ 虚数（b\neq 0）（当 a=0 时为纯虚数）.\end{cases}$$

复数集、实数集、虚数集、纯虚数集之间的关系，可用图表示.



探究 5　提示： 关于实轴对称.

教材典题重温

典题 1　解　在▱$ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

由平行四边形的两条对角线互相平分，得

$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{MD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

典题 2　解　由 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，易知向量 $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$ 为非零向量，

由向量 $\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a}$，$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$ 共线，可知存在实数λ，使得 $\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a}=\lambda\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}\right)$，

即 $\left(t+\frac{1}{2}\lambda\right)\boldsymbol{a}=\left(\frac{3}{2}\lambda+1\right)\boldsymbol{b}$.

由 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，必有 $t+\frac{1}{2}\lambda=\frac{3}{2}\lambda+1=0$.

否则，不妨设 $t+\frac{1}{2}\lambda\neq 0$，则 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\frac{3}{2}\lambda+1}{t+\frac{1}{2}\lambda}\boldsymbol{b}$.

由两个向量共线的充要条件知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，与已知矛盾.

由$\begin{cases}t+\frac{1}{2}\lambda=0,\\ \frac{3}{2}\lambda+1=0.\end{cases}$ 解得 $t=\frac{1}{3}$.

因此，当向量 $\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a}$，$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$ 共线时，$t=\frac{1}{3}$.

典题 3　解　$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta-6|\boldsymbol{b}|^2$

$=6^2-6\times4\times\cos 60°-6\times4^2=-72$.

典题 4　解　$\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$ 互相垂直的充要条件是 $(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b})=0$，即 $\boldsymbol{a}^2-k^2\boldsymbol{b}^2=0$.

因为 $\boldsymbol{a}^2=3^2=9$，$\boldsymbol{b}^2=4^2=16$，

所以 $9-16k^2=0$，解得 $k=\pm\frac{3}{4}$.

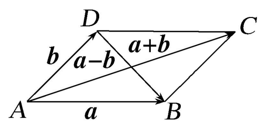
也就是说，当 $k=\pm\frac{3}{4}$时，$\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$ 互相垂直.

典题 5　证明　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2)-(\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2)=4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

事实上，这就是极化恒等式在教材中的“影子”，对于极化恒等式，详细解释如下：

证明过程与几何意义

证明过程：如图，



设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，

$|\overrightarrow{AC}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$，

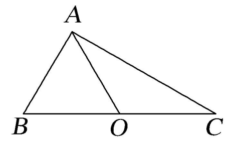
$|\overrightarrow{DB}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$，

两式相减得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{4}[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2]$，此即极化恒等式.

几何意义：向量的数量积可以表示为以这组向量为邻边的平行四边形的“和对角线长”与“差对角线长”平方差的$\frac{1}{4}$.

典题 6　解　$(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{b}^2=61$，

于是可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6$，$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=-\frac{1}{2}$，所以$\theta=120°$.



典题 7　A　[如图，由 $2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$知 O 为 BC 的中点，

又∵O 为△ABC 的外接圆圆心，

∴$OA=OB=OC$.

又∵$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AB}|$，∴$AB=OB=OA=OC$.

∴△ABO 为正三角形，$\angle ABO=60°$，

∴$\overrightarrow{BA}$在$\overrightarrow{BC}$上的投影向量为$\frac{1}{2}\overrightarrow{BO}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$，故选 A.]

典题 8　解　$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

典题 9　解　（1）作图略，通过作图可以发现四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

（2）四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

证明：因为$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$，

所以$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$.

因为$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CD}$，

所以$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$，即 $AB//CD$ 且 $AB=CD$，

因此四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

典题 10　解　只与弦 AB 的长度有关，与半径无关．理由如下：

设⊙C 的半径为 r，AB 的长度为 $2a$，

取 AB 的中点 D，连接 CD，则 $CD\perp AB$.

在 Rt△ACD 中，$AD=a$，$AC=r$，$\cos\angle CAD=\frac{a}{r}$，

∴$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2a\cdot r\cdot\cos\angle CAD=2ar\cdot\frac{a}{r}=2a^2$.

典题 11　解　因为$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$，

所以$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{OA}+t$（$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$）$=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-t\overrightarrow{OA}=$（$1-t$）$\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$.

观察可以发现，向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$的系数和为 1，一般地，A，B，P 三点共线的充要条件是：存在唯一实数 λ，μ，满足$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，且$\lambda+\mu=1$.

典题 12　解　**法一**　如图，设顶点 D 的坐标为（x，y），

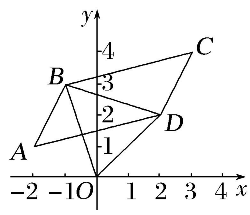
因为$\overrightarrow{AB}$＝（$-1-(-2)$，$3-1$）＝（1，2），$\overrightarrow{DC}$＝（$3-x$，$4-y$），

又$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，所以（1，2）＝（$3-x$，$4-y$）．

即$\begin{cases}1=3-x,\\2=4-y,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2,\\y=2.\end{cases}$所以顶点 D 的坐标为（2，2）．

法二　如图，由向量加法的平行四边形法则可知$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ ＝

（$-2-(-1)$，$1-3$）＋（$3-(-1)$，$4-3$）＝（3，-1），



而$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}$＝（$-1$，3）＋（3，$-1$）＝（2，2）．

所以顶点 D 的坐标为（2，2）．

典题 13　解　因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以 $4y-2\times6=0$.解得 $y=3$.

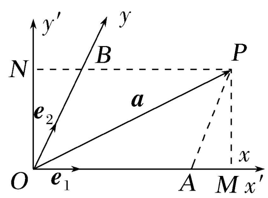
真题再现　$\frac{8}{5}$　[**法一**　因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以存在实数 k，使 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$，即（2，5）＝$k$（$\lambda$，4），得$\begin{cases}k\lambda=2,\\4k=5,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=\frac{8}{5},\\k=\frac{5}{4}.\end{cases}$

法二　因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以 $2\times4-5\lambda=0$，解得$\lambda=\frac{8}{5}$.]

典题 14　解　（1）建立如图所示的直角坐标系，

将 OP 分解到 Ox'轴和 Oy'轴可求得

$|PM|=\sqrt{3}$，$|OM|=4$，所以$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{3+16}=\sqrt{19}$.



（2）对于任意向量$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，$x$，$y$ 都是唯一确定的，所以本题中对向量坐标的规定合理.

典题 15　证明　构造向量 $\boldsymbol{u}$＝（a，b），$\boldsymbol{v}$＝（c，d）．

$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta$（其中$\theta$为向量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 的夹角）．

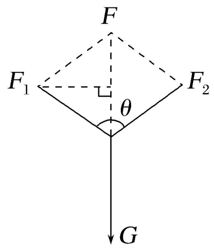
所以 $ac+bd=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\cos\theta$，

所以（$ac+bd$）^{2}＝（a^2+b^2）（c^2+d^2）$\cos^2\theta\leqslant$（a^2+b^2）（c^2+d^2）．

事实上，这就是二元形式的柯西不等式，其向量表达式是以向量数量积的性质出现的，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$.

典题 16　解　先来看共提旅行包的情况.

如图，设作用在旅行包上的两个拉力分别为 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，为方便起见，我们不妨设$|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|$.



另设 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 的夹角为θ，旅行包所受的重力为 $\boldsymbol{G}$.

由向量的平行四边形法则、力的平衡以及直角三角形的知识，

可以知道$|\boldsymbol{F}_1|=\dfrac{|\boldsymbol{G}|}{2\cos\dfrac{\theta}{2}}$，这里，$|\boldsymbol{G}|$为定值，分析上面的式子，我们发现，当$\theta$由 0 逐渐变大到$\pi$时，$\dfrac{\theta}{2}$由 0 逐渐变大到$\dfrac{\pi}{2}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}$的值由大逐渐变小，此时$|\boldsymbol{F}_1|$由小逐渐变大；

反之，当θ由π逐渐变小到 0 时，$\dfrac{\theta}{2}$由$\dfrac{\pi}{2}$逐渐变小到 0，

$\cos\dfrac{\theta}{2}$的值由小逐渐变大，此时$|\boldsymbol{F}_1|$由大逐渐变小.

这就是说，$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 之间的夹角越大越费力，夹角越小越省力.

同理，在单杠上做引体向上运动，两臂的夹角越小越省力.

典题 17　D　[由$\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，

知$\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\perp\overrightarrow{BC}$，

∴$\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 的平分线与边 BC 垂直，∴$AB=AC$.

又∵$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{1}{2}$，∴$\cos\angle BAC=\dfrac{1}{2}$.

∵$0°<\angle BAC<180°$，∴$\angle BAC=60°$.

∴$\triangle ABC$ 为等边三角形.]

典题 18　C　[由$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$知点 O 到 A，B，C 三点的距离相等，

所以 O 为$\triangle ABC$ 的外心.

由$\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\mathbf{0}$，知$\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{CN}$.

设 AB 的中点为 D，则$\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}=2\overrightarrow{ND}=\overrightarrow{CN}$，

所以点 N 在△ABC 的中线 AD 上且 $2ND=CN$，

所以 N 为△ABC 的重心.

由$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$，得$\overrightarrow{PB}\cdot(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})=0$，

即$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$，所以 $PB\perp CA$，

同理可得 $PA\perp BC$，$PC\perp AB$，

所以 P 为△ABC 的垂心，故选 C.]

典题 19　解　∵$\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(1,1)$，∴$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=(1+\lambda,\lambda)$.

又 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，∴$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，

∴$(1+\lambda,\lambda)\cdot(1,0)=0$，即 $1+\lambda=0$，∴$\lambda=-1$.

真题再现　$\frac{3}{5}$　[**法一**　$\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}=(1-3\lambda,3-4\lambda)$，

∵$(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，

∴$(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$，即$(1-3\lambda,3-4\lambda)\cdot(3,4)=0$，∴$3-9\lambda+12-16\lambda=0$，

解得$\lambda=\frac{3}{5}$.

法二　由$(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$ 可知，$(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{b}^2=0$，

从而$\lambda=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}^2}=\frac{(1,3)\cdot(3,4)}{3^2+4^2}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$.]

典题 20　D　[$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=1\times1\times\cos120^\circ+1\times1\times\cos120^\circ+1\times1\times\cos120^\circ$

$=-\frac{3}{2}$.]

真题再现　$-\frac{9}{2}$　[由已知可得$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=9$

$+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=0$，因此 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{9}{2}$.]

典题 21　C　[由向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 两两所成的角相等，故向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 两两所成的角都等于 0 或$\frac{2\pi}{3}$.

当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 两两所成的角为$\frac{2\pi}{3}$时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1\times\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=1\times3\times\cos\frac{2\pi}{3}=$

$-\frac{3}{2}$，$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=3\times1\times\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{3}{2}$.

则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=1+1+9+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+2\times\left(-\frac{3}{2}\right)+2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=4$，$\therefore|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=2$.

当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 两两所成的角为 0 时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|=5$，故选 C.]

真题再现　$3\sqrt{2}$　[由$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=5$ 得$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=25$，即 $\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=25$，结合$|\boldsymbol{a}|=3$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，得 $3^2-2\times1+|\boldsymbol{b}|^2=25$，所以$|\boldsymbol{b}|^2=18$，$|\boldsymbol{b}|=3\sqrt{2}$.]

典题 22　**证明**　(1) 先证 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Rightarrow|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}$，

$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}$.

因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，于是$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

再证$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\Rightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

由$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，两边平方得$|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$，

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，于是 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

几何意义是矩形的两条对角线相等.

(2) 先证$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|\Rightarrow\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$.

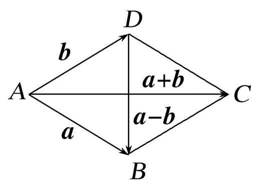
$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$.

又$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，所以 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=0$，所以 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$.

再证 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}\Rightarrow|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，由 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$ 得 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=0$，

即$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=0$，

所以$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，



几何意义是菱形的对角线互相垂直，如图所示.

典题 23　**解**　(1) 当 $m-1=0$，即 $m=1$ 时，复数 z 是实数.

(2) 当 $m-1\neq0$，即 $m\neq1$ 时，复数 z 是虚数.

(3) 当 $m+1=0$，且 $m-1\neq0$，即 $m=-1$ 时，复数 z 是纯虚数.

典题 24　**解**　(1) 由复数相等的充要条件得

$\begin{cases}3x+2y=17,\\5x-y=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=7.\end{cases}$

(2) 由复数相等的充要条件得 $\begin{cases}x+y-3=0,\\x-4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=4,\\y=-1.\end{cases}$

真题再现　C　[**法一**　因为$(1+a\mathrm{i})\mathrm{i}=-a+\mathrm{i}=3+\mathrm{i}$，所以$-a=3$，解得 $a=-$

3.

法二　因为（$1+a$i）i$=3+$i，所以 $1+a\text{i}=\dfrac{3+\text{i}}{\text{i}}=1-3\text{i}$，所以 $a=-3$.]

典题 25　解　$(1+2\text{i})\div(3-4\text{i})=\dfrac{1+2\text{i}}{3-4\text{i}}$

$=\dfrac{(1+2\text{i})(3+4\text{i})}{(3-4\text{i})(3+4\text{i})}=\dfrac{3-8+6\text{i}+4\text{i}}{3^2+4^2}=\dfrac{-5+10\text{i}}{25}=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}\text{i}$.

真题再现　$4-\text{i}$　[$\dfrac{9+2\text{i}}{2+\text{i}}=\dfrac{(9+2\text{i})(2-\text{i})}{(2+\text{i})(2-\text{i})}=\dfrac{20-5\text{i}}{5}$

$=4-\text{i}$.]

典题 26　解　（1）因为 $(\sqrt{2}\text{i})^2=(-\sqrt{2}\text{i})^2=-2$，

所以方程 $x^2+2=0$ 的根为 $x=\pm\sqrt{2}\text{i}$.

（2）将方程 $ax^2+bx+c=0$ 的二次项系数化为 1，

得 $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$.

配方，得$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$，

即$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=-\dfrac{-(b^2-4ac)}{(2a)^2}$.

由$\Delta<0$，知$\dfrac{-(b^2-4ac)}{(2a)^2}=\dfrac{-\Delta}{(2a)^2}>0$.

类似（1），可得 $x+\dfrac{b}{2a}=\pm\dfrac{\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a}\text{i}$.

所以原方程的根为 $x=-\dfrac{b}{2a}\pm\dfrac{\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a}\text{i}$.

在复数范围内，实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的求根公式为：

①当$\Delta\geqslant0$ 时，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；

②当$\Delta<0$ 时，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{-(b^2-4ac)}\,\text{i}}{2a}$.

典题 27　解　（1）$\text{i}^1=\text{i}$，$\text{i}^2=-1$，$\text{i}^3=-\text{i}$，$\text{i}^4=1$，$\text{i}^5=\text{i}$，$\text{i}^6=-1$，$\text{i}^7=-\text{i}$，$\text{i}^8=1$.

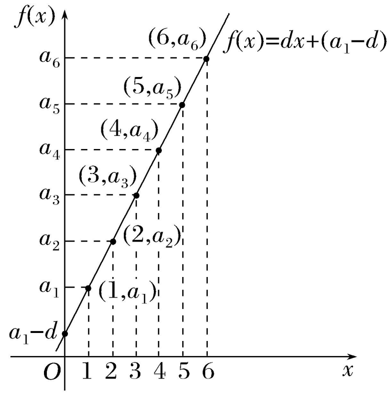
（2）当 $n\in\mathbf{N}^*$时推测：$\text{i}^{4n+1}=\text{i}$，$\text{i}^{4n+2}=-1$，$\text{i}^{4n+3}=-\text{i}$，$\text{i}^{4n+4}=1$.

第六章　数　列

教材探究思考

探究 1　提示： 由于 $a_n=a_1+(n-1)d=dn+(a_1-d)$，所以当 $d\neq 0$ 时，等差数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n 是一次函数 $f(x)=dx+(a_1-d)(x\in\mathbf{R})$当 $x=n$ 时的函数值，即 $a_n=f(n)$.

如图，在平面直角坐标系中画出函数 $f(x)=dx+(a_1-d)$的图象，就得到一条斜率为 d，截距为 a_1-d 的直线.



在这条直线上描出点

$(1，f(1))$，$(2，f(2))$，…，$(n，f(n))$，…，就得到了等差数列$\{a_n\}$的图象.

事实上，公差 $d\neq 0$ 的等差数列$\{a_n\}$的图象是点$(n，a_n)$组成的集合，这些点均匀分布在直线 $f(x)=dx+(a_1-d)$上.

反之，任给一次函数 $f(x)=kx+b(k，b$ 为常数)，则 $f(1)=k+b$，$f(2)=2k+b$，…，$f(n)=nk+b$，…构成一个等差数列$\{nk+b\}$，其首项为$(k+b)$，公差为 k.

探究 2　提示： 当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=p+q+r$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=p(n-1)^2+q(n-1)+r$，$a_n=S_n-S_{n-1}=pn^2+qn+r-[p(n-1)^2+q(n-1)+r]=2pn-p+q$.

若 $r=0$，则 $a_1=p+q$，满足上式，此时 $a_n=2pn-p+q$，

$a_{n-1}=2p(n-1)-p+q(n\geqslant 2)$，

所以 $a_n-a_{n-1}=2p$，为常数，所以$\{a_n\}$是等差数列；

若 $r\neq 0$，则 $a_1=p+q+r$，不满足上式，

所以 $a_n=\begin{cases}p+q+r，n=1，\\2pn-p+q，n\geqslant 2，\end{cases}$

此时$\{a_n\}$不是等差数列.

探究 3　提示： 当 $d=-3.5$ 时，$S_n=-\frac{7}{4}n^2+\left(10+\frac{7}{4}\right)n=-\frac{7}{4}n^2+\frac{47}{4}n=-\frac{7}{4}\left(n-\frac{47}{14}\right)^2+\frac{15\,463}{784}$，所以当 $n=3$ 时，S_n 的最大值为$\frac{39}{2}$.

对于一般的等差数列前 n 项和，当 $d\geqslant 0$ 时，没有最大值，

当 $d<0$ 时，由 $\begin{cases}a_n=a_1+(n-1)d\geqslant 0,\\ a_{n+1}=a_1+nd\leqslant 0,\end{cases}$

解得 $-\dfrac{a_1}{d}\leqslant n\leqslant 1-\dfrac{a_1}{d}$，

即满足 $-\dfrac{a_1}{d}\leqslant n\leqslant 1-\dfrac{a_1}{d}$ 的整数 n 能够使 S_n 取得最大值．

探究 4　提示： 首先证明 $\{\log_b a_n\}$ 为等差数列．

数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正的等比数列，设公比为 q，

则 $q>0$，首项 $a_1>0$，从而 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$．

记数列 $\{\log_b a_n\}$ 的第 n 项为 c_n，则 $c_n=\log_b a_n$，$c_{n+1}=\log_b a_{n+1}$，

故 $c_{n+1}-c_n=\log_b a_{n+1}-\log_b a_n=\log_b\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\log_b q$，

因为差值为一个定值，所以数列 $\{\log_b a_n\}$ 为等差数列．

再证明 $\{b^{a_n}\}$ 为等比数列．

数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，设公差为 d，首项为 a_1，

则 $a_n=a_1+(n-1)d$，记数列 $\{b^{a_n}\}$ 的第 n 项为 c_n，

则 $c_n=b^{a_n}$，$c_{n+1}=b^{a_{n+1}}$，则 $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=\dfrac{b^{a_{n+1}}}{b^{a_n}}=b^{a_{n+1}-a_n}=b^d$，

因为比值为一个定值，所以数列 $\{b^{a_n}\}$ 是一个等比数列．

教材典题重温

典题 1　(1)证明　由题意知，$a_n=\dfrac{2^n-1}{2^n}=1-\dfrac{1}{2^n}(n\in\mathbf{N}^*)$．

$\because \dfrac{1}{2^n}\leqslant\dfrac{1}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$，$\therefore 1-\dfrac{1}{2^n}\geqslant\dfrac{1}{2}$，$\therefore a_n\geqslant\dfrac{1}{2}$．

(2)解　$\{a_n\}$ 是递增数列．理由如下．

$\because a_n-a_{n-1}=1-\dfrac{1}{2^n}-1+\dfrac{1}{2^{n-1}}=\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1}{2^n}>0(n\in\mathbf{N}^*)$，

$\therefore a_n>a_{n-1}$，故 $\{a_n\}$ 是递增数列．

典题 2　解　设使用 n 年后，这台设备的价值为 a_n 万元，则可得数列 $\{a_n\}$．

由已知条件，得 $a_n=a_{n-1}-d(n\geqslant 2)$．

由于 d 是与 n 无关的常数，所以数列 $\{a_n\}$ 是一个公差为 $-d$ 的等差数列．

因为购进设备的价值为 220 万元，所以 $a_1=220-d$，

于是 $a_n=a_1+(n-1)(-d)=220-nd$.

根据题意，得$\begin{cases}a_{10}\geqslant 11,\\a_{11}<11,\end{cases}$即$\begin{cases}220-10d\geqslant 11,\\220-11d<11.\end{cases}$

解这个不等式组，得 $19<d\leqslant 20.9$.

所以 d 的取值范围为$(19，20.9]$.

典题 3　证明　设数列$\{a_n\}$的公差为 d，则 $a_p=a_1+(p-1)d$，

$a_q=a_1+(q-1)d$，$a_s=a_1+(s-1)d$，$a_t=a_1+(t-1)d$.

所以 $a_p+a_q=2a_1+(p+q-2)d$，$a_s+a_t=2a_1+(s+t-2)d$.

因为 $p+q=s+t$，所以 $a_p+a_q=a_s+a_t$.

典题 4　解　(1)$\{c_n\}$是等差数列．易知 $c_{n+1}-c_n=a_{n+1}+2b_{n+1}-a_n-2b_n=d_1+2d_2$，所以$\{c_n\}$是等差数列．

(2)由(1)知$\{c_n\}$的公差为 $d_1+2d_2=6$，$c_1=a_1+2b_1=3$，所以 $c_n=c_1+(n-1)d=3+6(n-1)=6n-3$.

典题 5　解　(1)是等差数列，首项是 a_1+md，公差是 d.

(2)是等差数列，首项是 a_1，公差是 $2d$.

(3)是等差数列，首项是 a_1+6d，公差是 $7d$.

猜想：取出等差数列中序号成等差数列的项，组成一个新的数列，这个新数列仍然是等差数列．

典题 6　解　(1)因为 $a_1=7$，$a_{50}=101$，

根据公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，可得 $S_{50}=\dfrac{50\times(7+101)}{2}=2\ 700$.

(2)因为 $a_1=2$，$a_2=\dfrac{5}{2}$，所以 $d=\dfrac{1}{2}$.

根据公式 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$，

可得 $S_{10}=10\times 2+\dfrac{10\times(10-1)}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{85}{2}$.

(3)把 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$d=-\dfrac{1}{6}$，$S_n=-5$ 代入 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$，

得 $-5=\dfrac{1}{2}n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times\left(-\dfrac{1}{6}\right)$.

整理，得 $n^2-7n-60=0$.

解得 $n=12$，或 $n=-5$(舍去)．所以 $n=12$.

典题 7　解　法一　由题意，知 $S_{10}=310$，$S_{20}=1\,220$.

把它们代入公式 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，

得 $\begin{cases}10a_1+45d=310,\\20a_1+190d=1\,220.\end{cases}$ 解方程组，得 $\begin{cases}a_1=4,\\d=6.\end{cases}$

所以，由所给的条件可以确定等差数列的首项和公差.

法二　由条件可知 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=310$，

$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}=910$.

两式相减得 $100d=600$，则 $d=6$，

则 $10a_1+45d=310$，解得 $a_1=4$.

典题 8　解　$\because S_{15}=5(a_2+a_6+a_k)$，

$\therefore 15a_8=5(a_2+a_6+a_k)$，即 $3a_8=a_2+a_6+a_k$，

$\therefore 3a_1+21d=3a_1+(1+5+k-1)d$，$\therefore k=16$.

典题 9　解　设等差数列的项数为 $2k+1$，

则 $\begin{cases}a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k+1}=290,\\a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}=261,\end{cases}$

$\therefore a_1+kd=29$，$\because$ 总共有 $2k+1$ 项，

$\therefore$ 中间一项为 $a_{k+1}=a_1+kd=29$.

$\therefore S_{2k+1}=(2k+1)\cdot a_{k+1}=29(2k+1)=290+261=551$，

$\therefore k=9$.

典题 10　解　法一　由 $a_{n+1}-a_n=-2<0$，得 $a_{n+1}<a_n$，所以 $\{a_n\}$ 是递减数列.

又由 $a_n=10+(n-1)\times(-2)=-2n+12$，

可知：当 $n<6$ 时，$a_n>0$；

当 $n=6$ 时，$a_n=0$；当 $n>6$ 时，$a_n<0$.

所以 $S_1<S_2\cdots<S_5=S_6>S_7>\cdots$.

也就是说，当 $n=5$ 或 6 时，S_n 最大.

因为 $S_5=\frac{5}{2}\times[2\times10+(5-1)\times(-2)]=30$，

所以 S_n 的最大值为 30.

法二　因为 $S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$

$=-n^2+11n=-\left(n-\frac{11}{2}\right)^2+\frac{121}{4}$,

所以，当 n 取与$\frac{11}{2}$最接近的整数即 5 或 6 时，S_n 最大，最大值为 30.

典题 11　解　令$\frac{n-2}{2n-15}>0$，解得 $n<2$ 或 $n>\frac{15}{2}$,

所以当 $n\leqslant 2$ 时，$a_n\geqslant 0$，S_n 单调递增，当 $n\geqslant 8$ 时，$a_n>0$，S_n 单调递增，

当 $3\leqslant n\leqslant 7$ 时，$a_n<0$，S_n 单调递减，

所以当 $n=7$ 时，S_n 取得最小值.

典题 12　解　法一　因为 $a_1+a_3+a_5=3a_3=105$，所以 $a_3=35$.

又因为 $a_2+a_4+a_6=99$，所以 $a_4=33$，

设首项为 a_1，公差为 d，则$\begin{cases}a_1+2d=35,\\a_1+3d=33.\end{cases}$

所以 $a_1=39$，$d=-2$，所以 $a_{20}=a_1+19d=1$.

法二　$3d=(a_2+a_4+a_6)-(a_1+a_3+a_5)=-6$，所以 $d=-2$,

所以 $3a_{20}=a_{18}+a_{20}+a_{22}=(a_1+a_3+a_5)+51d=105-102=3$,

所以 $a_{20}=1$.

真题再现　D　[设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,

则 $q=\frac{a_2+a_3+a_4}{a_1+a_2+a_3}=\frac{2}{1}=2$,

所以 $a_6+a_7+a_8=(a_1+a_2+a_3)\cdot q^5=1\times 2^5=32$.故选 D.]

典题 13　(1)**证明**　设等差数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，公差为 d,

由等差数列的前 n 项和公式知，$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$,

$\therefore\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{(n-1)d}{2}$.

故$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是一个以 a_1 为首项，$\frac{d}{2}$为公差的等差数列.

(2)**解**　由题意得$\frac{40}{8}=\frac{12}{4}+4\cdot\frac{d}{2}$，解得 $d=1$,

所以$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是以$\frac{3}{2}$为首项，$\frac{1}{2}$为公差的等差数列，

所以 $T_n=\frac{3}{2}n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{n^2+5n}{4}$.

典题 14　解　记等差数列 2，6，10，…，190 为$\{a_n\}$，则$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2+4(n-1)=4n-2$；

记等差数列 2，8，14，…，200 为$\{b_n\}$，则$\{b_n\}$的通项公式为 $b_n=2+6(n-1)=6n-4$.

记$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的公共项组成的数列为$\{c_n\}$.

令 $an_1=bn_2$，得 $4n_1-2=6n_2-4$，则 $n_1=\frac{3n_2-1}{2}$，

又 $n_1\in\mathbf{N}^*$，所以 $n_2=2k-1$，$k\in\mathbf{N}^*$，故$\{c_n\}$也是一个等差数列，

又 $c_1=2$，$d=c_2-c_1=b_3-b_1=14-2=12$，

所以 $c_n=2+(n-1)\times12=12n-10$.

令 $12n-10<190$，得 $n<16\frac{2}{3}$，则数列$\{c_n\}$共有 16 项.

故新数列各项之和为 $16\times2+\frac{16\times15}{2}\times12=1\,472$.

真题再现　$3n^2-2n$　[**法一**　(观察归纳法)数列$\{2n-1\}$的各项为 1，3，5，7，9，11，13，…；数列$\{3n-2\}$的各项为 1，4，7，10，13，….现观察归纳可知，两个数列的公共项为 1，7，13，…，是首项为 1，公差为 6 的等差数列，则 $a_n=1+6(n-1)=6n-5$.

故前 n 项和为 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$

$=\frac{n(1+6n-5)}{2}=3n^2-2n$.

法二　(引入参变量法)令 $b_n=2n-1$，$c_m=3m-2$，$b_n=c_m$，则 $2n-1=3m-2$，即 $3m=2n+1$，m 必为奇数.

令 $m=2t-1$，则 $n=3t-2(t=1，2，3，…)$.

$a_t=b_{3t-2}=c_{2t-1}=6t-5$，即 $a_n=6n-5$.

以下同法一．]

典题 15　解　$\because a_m=a_1+(m-1)d$，$a_n=a_1+(n-1)d$，

$\therefore a_m-a_n=(m-n)d$，$\therefore \dfrac{a_m-a_n}{m-n}=\dfrac{(m-n)d}{m-n}=d$，

故原式得证.

若以 n 轴为横轴，以 a_n 轴为纵轴，

则表示数列$\{a_n\}$的图象的点都在同一条直线上，

取其中两点$(m，a_m)$，$(n，a_n)$，则该直线的斜率为$\dfrac{a_m-a_n}{m-n}=\dfrac{(m-n)d}{m-n}=d$.

典题 16　解　(1)该数列的一个递推公式为 $a_n-a_{n-1}=n(n\geqslant 2)$.

(2)该数列的一个通项公式为 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

典题 17　解　由题意，得 $a_m=a_1q^{m-1}$，①

$a_n=a_1q^{n-1}$.②

②的两边分别除以①的两边，得$\dfrac{a_n}{a_m}=q^{n-m}$，

所以 $a_n=a_mq^{n-m}$.

典题 18　解　(1)设这笔钱存 n 个月以后的本利和组成一个数列$\{a_n\}$，则$\{a_n\}$是等比数列，首项 $a_1=10^4(1+0.400\%)$，公比 $q=1+0.400\%$，

所以 $a_{12}=10^4(1+0.400\%)^{12}\approx 10\,490.7$.

所以，12 个月后的利息为 $10\,490.7-10^4\approx 491$(元).

(2)设季度利率为 r，这笔钱存 n 个季度以后的本利和组成一个数列$\{b_n\}$，则$\{b_n\}$也是一个等比数列，首项 $b_1=10^4(1+r)$，公比为 $1+r$，于是 $b_4=10^4(1+r)^4$.

因此，以季度复利计息，存 4 个季度后的利息为$[10^4(1+r)^4-10^4]$元.

解不等式 $10^4(1+r)^4-10^4\geqslant 491$，得 $r\geqslant 1.206\%$.

所以，当季度利率不小于 1.206%时，按季结算的利息不少于按月结算的利息.

典题 19　解　假设 a_n 是数列中的最大值，则易知$\begin{cases}a_{n+1}\leqslant a_n,\\ a_{n-1}\leqslant a_n,\end{cases}$

$$\therefore \begin{cases}\dfrac{(n+1)^3}{3^{n+1}}\leqslant\dfrac{n^3}{3^n},\\ \dfrac{(n-1)^3}{3^{n-1}}\leqslant\dfrac{n^3}{3^n},\end{cases}\quad \therefore \begin{cases}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^3\leqslant 3,\\ 3\leqslant\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^3,\end{cases}$$

解得$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}\leqslant n\leqslant\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}-1}$，所以 n 的值为 3.

典题 20　解　(1)因为 $a_1=\frac{1}{2}$，$q=\frac{1}{2}$，

所以 $S_8=\frac{\frac{1}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{255}{256}$.

(2)由 $a_1=27$，$a_9=\frac{1}{243}$，可得 $27\times q^8=\frac{1}{243}$，即 $q^8=\left(\frac{1}{3}\right)^8$.

又由 $q<0$，得 $q=-\frac{1}{3}$，

所以 $S_8=\frac{27\times\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^8\right]}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1\,640}{81}$.

(3)把 $a_1=8$，$q=\frac{1}{2}$，$S_n=\frac{31}{2}$代入 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$得$\frac{8\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{2}$.

整理，得$\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{32}$.解得 $n=5$.

典题 21　解　若 $q=1$，则$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{10a_1}{5a_1}=2\neq\frac{31}{32}$，所以 $q\neq1$.

当 $q\neq1$ 时，由$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{31}{32}$，

得$\frac{(-1)(1-q^{10})}{1-q}\cdot\frac{1-q}{(-1)(1-q^5)}=\frac{31}{32}$.

整理，得 $1+q^5=\frac{31}{32}$，即 $q^5=-\frac{1}{32}$.所以 $q=-\frac{1}{2}$.

典题 22　证明　当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$，

$S_{2n}-S_n=2na_1-na_1=na_1$，

$S_{3n}-S_{2n}=3na_1-2na_1=na_1$，

所以 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$ 成等比数列，公比为 1.

当 $q\neq 1$ 时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，

$S_{2n}-S_n=\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}-\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1q^n(1-q^n)}{1-q}=q^nS_n$，

$S_{3n}-S_{2n}=\frac{a_1(1-q^{3n})}{1-q}-\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}$

$=\frac{a_1q^{2n}(1-q^n)}{1-q}=q^n(S_{2n}-S_n)$，

所以$\frac{S_{2n}-S_n}{S_n}=\frac{S_{3n}-S_{2n}}{S_{2n}-S_n}=q^n$.

因为 q^n 为常数，所以 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$ 成等比数列，公比为 q^n.

真题再现　A　[**法一**　因为 $S_2=4$，$S_4=6$，且易知公比 $q\neq\pm 1$，所以由等比数列的前 n 项和公式，得

$$\begin{cases}S_2=\frac{a_1(1-q^2)}{1-q}=a_1(1+q)=4,\\S_4=\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=a_1(1+q)(1+q^2)=6,\end{cases}$$

两式相除，

得 $q^2=\frac{1}{2}$，所以$\begin{cases}a_1=4(2-\sqrt{2}),\\q=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

或$\begin{cases}a_1=4(2+\sqrt{2}),\\q=-\frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$

所以 $S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=7$.故选 A.

法二　易知 S_2，S_4-S_2，S_6-S_4 构成等比数列，由等比中项得 $S_2(S_6-S_4)=(S_4-S_2)^2$，即 $4(S_6-6)=2^2$，所以 $S_6=7$.故选 A.]

典题 23　**解**　设正方形 $ABCD$ 的面积为 a_1，后继各正方形的面积依次为 a_2，a_3，…，a_n，…，

则 $a_1=25$.

由于第 $k+1$ 个正方形的顶点分别是第 k 个正方形各边的中点，所以 $a_{k+1}=\frac{1}{2}a_k$.

因此，$\{a_n\}$是以 25 为首项，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列.

设$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.

(1)$S_{10}=\dfrac{25\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\frac{1}{2}}=50\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]=\dfrac{25\ 575}{512}$.

所以，前 10 个正方形的面积之和为 $\dfrac{25\ 575}{512}$cm^2.

(2)当 n 无限增大时，S_n 无限趋近于所有正方形的面积和 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$.

而 $S_n=\dfrac{25\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]}{1-\frac{1}{2}}=50\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]$,

随着 n 的无限增大，$\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$将趋近于 0，$S_n$ 将趋近于 50.

所以，所有这些正方形的面积之和将趋近于 50 cm^2.

真题再现 5 $240\left(3-\dfrac{n+3}{2^n}\right)$ [依题意得，$S_1=120\times2=240$(dm^2)；$S_2=60\times3=180$(dm^2)；

当 $n=3$ 时，共可以得到 5 dm×6 dm，$\frac{5}{2}$ dm×12 dm，

10 dm×3 dm，20 dm×$\frac{3}{2}$ dm 四种规格的图形，且 $5\times6=30$，$\frac{5}{2}\times12=30$，$10\times3=30$，$20\times\frac{3}{2}=30$，

所以 $S_3=30\times4=120$(dm^2)；

当 $n=4$ 时，共可以得到 5 dm×3 dm，$\frac{5}{2}$ dm×6 dm，

$\frac{5}{4}$ dm×12 dm，10 dm×$\frac{3}{2}$ dm，20 dm×$\frac{3}{4}$ dm 五种规格的图形，所以对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数为 5，且 $5\times3=15$，$\frac{5}{2}\times6=15$，$\frac{5}{4}\times12=15$，$10\times\frac{3}{2}=15$，$20\times\frac{3}{4}=15$，所以 $S_4=15\times5=75$(dm^2)；

……

所以可归纳 $S_k=\frac{240}{2^k}\cdot(k+1)=\frac{240(k+1)}{2^k}(dm^2)$.

所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}S_k=$

$240\left(1+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{n+1}{2^n}\right)$，①

所以$\frac{1}{2}\times\sum\limits_{k=1}^{n}S_k$

$=240\times\left(\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)$，②

由①－②得，$\frac{1}{2}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}S_k$

$=240\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)$

$=240\left(1+\frac{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)=240\left(\frac{3}{2}-\frac{n+3}{2^{n+1}}\right)$,

所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}S_k=240\left(3-\frac{n+3}{2^n}\right)dm^2$.]

典题 24　解　(1)由题意，得 $c_1=1\ 200$，

并且 $c_{n+1}=1.08c_n-100$.①

(2)将 $c_{n+1}-k=r(c_n-k)$

化成 $c_{n+1}=rc_n-rk+k$.②

比较①②的系数，可得$\begin{cases}r=1.08,\\k-rk=-100.\end{cases}$

解这个方程组，得$\begin{cases}r=1.08,\\k=1\ 250.\end{cases}$

所以，(1)中的递推公式可以化为

$c_{n+1}-1\ 250=1.08(c_n-1\ 250)$.

(3)由(2)可知，数列$\{c_n-1\ 250\}$是以-50为首项，1.08 为公比的等比数列，

则$(c_1-1\ 250)+(c_2-1\ 250)+(c_3-1\ 250)$

$+\cdots+(c_{10}-1\ 250)=\frac{-50\times(1-1.08)^{10}}{1-1.08}\approx-724.3$.

所以 $S_{10}=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{10}\approx 1\,250\times 10-724.3$

$=11\,775.7\approx 11\,776.$

典题 25　(1)**证明**　$\because a_{n+1}+a_n=3\cdot 2^n$，

$\therefore a_{n+1}-2^{n+1}=-(a_n-2^n)$，当 $n=1$ 时，$a_1-2^1=-1.$

$\therefore\{a_n-2^n\}$是首项为-1，公比为-1的等比数列.

(2)**解**　由(1)知，$a_n-2^n=(-1)^n$，$\therefore a_n=(-1)^n+2^n.$

当 n 为偶数时，$S_n=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}=2(2^n-1)$；

当 n 为奇数时，$S_n=-1+\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-3.$

典题 26　**解**　由题意知，$a_n\neq -1.$

$\because a_{n+1}=2a_n+1$，$\therefore a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，

$\therefore\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$，又当 $n=1$ 时，$a_1+1=2$，

$\therefore\{a_n+1\}$是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，

$\therefore a_n+1=2^n$，$\therefore a_n=2^n-1$，$\therefore S_{10}=\dfrac{2(1-2^{10})}{1-2}-10=2\,036.$

典题 27　**解**　(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，则由 $S_4=4S_2$，$a_{2n}=2a_n+1$，$n\in\mathbf{N}^*$，可得

$$\begin{cases}4a_1+6d=8a_1+4d,\\ a_1+(2n-1)d=2a_1+2(n-1)d+1.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}a_1=1,\\ d=2.\end{cases}$　因此 $a_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)由(1)知 $c_n=(2n-1)\cdot 3^{n-1}$，

则 $T_n=1+3\times 3+5\times 3^2+\cdots+(2n-1)\times 3^{n-1}$，

$3T_n=3+3\times 3^2+5\times 3^3+\cdots+(2n-1)\times 3^n$，

两式相减得$-2T_n=1+2\times 3+2\times 3^2+\cdots+2\times 3^{n-1}-(2n-1)\times 3^n=-2-(2n-2)\cdot 3^n$，

故 $T_n=(n-1)\cdot 3^n+1.$

真题再现　(1)**解**　设$\{a_n\}$的公比为 q，则 $a_n=q^{n-1}.$

因为 a_1，$3a_2$，$9a_3$ 成等差数列，

所以 $1+9q^2=2\times 3q$，解得 $q=\dfrac{1}{3}$，

故 $a_n=\dfrac{1}{3^{n-1}}$，$b_n=\dfrac{n}{3^n}$.

(2)证明　由(1)知 $S_n=\dfrac{1\times\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)$，

$T_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{3}{3^3}+\cdots+\dfrac{n}{3^n}$，①

$\dfrac{1}{3}T_n=\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{2}{3^3}+\dfrac{3}{3^4}+\cdots+\dfrac{n-1}{3^n}+\dfrac{n}{3^{n+1}}$，②

①−②得 $\dfrac{2}{3}T_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}-\dfrac{n}{3^{n+1}}$，

即 $\dfrac{2}{3}T_n=\dfrac{\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)}{1-\dfrac{1}{3}}-\dfrac{n}{3^{n+1}}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)-\dfrac{n}{3^{n+1}}$，

整理得 $T_n=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+3}{4\times 3^n}$，

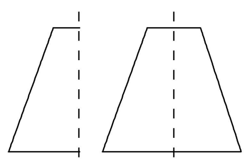
则 $2T_n-S_n=2\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+3}{4\times 3^n}\right)-\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)=-\dfrac{n}{3^n}<0$，

故 $T_n<\dfrac{S_n}{2}$.

第七章　立体几何与空间向量

教材探究思考

探究 1　提示：圆台可以看作是直角梯形以垂直于底边的腰所在的直线为旋转轴，其他三边旋转一周形成的面所围成的旋转体.



圆台也可以看作是等腰梯形以其底边中线所在的直线为旋转轴，各边旋转半周形成的面所转成的旋转体.

探究 2　提示：$V_{\text{柱体}}=Sh$(S 为底面积，h 为柱体高)；

$V_{\text{锥体}}=\dfrac{1}{3}Sh$($S$ 为底面积，h 为锥体高)；

$V_{台体}=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{S'S}+S)h$($S'$，$S$ 分别为上、下底面面积，h 为台体高).

当 $S'=S$ 时，台体变为柱体，台体的体积公式也就是柱体的体积公式；当 $S'=0$ 时，台体变为锥体，台体的体积公式也就是锥体的体积公式.

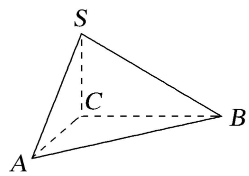
探究 3　**提示**：不能改为“两条平行直线”．也不能改为“无数条直线”，因为无数条直线可能都平行．下面从向量的角度解释原因如下：

设直线的方向向量为 $\boldsymbol{a}$，平面内的两直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，平面内任一直线的方向向量为 $\boldsymbol{p}$.当两直线相交时，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为不共线向量，所以存在唯一数对(λ,μ)使 $\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}$.$\because\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}(\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c})=\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，$\therefore\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{p}$，$\therefore\boldsymbol{a}$ 与平面垂直；当两直线平行时，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共线，$\boldsymbol{p}$ 不一定能用 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示，$\therefore$不能保证 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}=0$，$\therefore\boldsymbol{a}$ 与平面不一定垂直.

探究 4　**提示**：$a\subset\alpha$.

探究 5　**提示**：1.对于三个均不为 0 的数 a，b，c，若 $ab=ac$，则 $b=c$.对于三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，不能得到 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，即向量不能约分.

如：如图，在三棱锥 $SABC$ 中，$SC\perp$平面 ABC，则 $SC\perp AC$，$SC\perp BC$，设$\overrightarrow{CS}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，但 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c}$.



2．由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=k$，不能写成 $\boldsymbol{a}=\frac{k}{\boldsymbol{b}}\left(\text{或 }\boldsymbol{b}=\frac{k}{\boldsymbol{a}}\right)$的形式，即向量没有除法运算.

3．对于向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$不成立，也就是说，向量的数量积不满足结合律.

如：任意取三个不共面的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，其中 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}$ 不共线，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ 是一个数与向量 $\boldsymbol{c}$ 作数乘，$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$是一个数与向量 $\boldsymbol{a}$ 作数乘，而向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}$ 不共线，所以$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$不相等.

教材典题重温

典题 1　**证明**　$\because$直三棱柱 $ABCA'B'C'$的侧面均为矩形，

$\therefore$三个侧面面积分别为 $AB\cdot AA'$，$AC\cdot AA'$，$BC\cdot AA'$，

$\because AC+AB>BC$，$AB+BC>AC$，$AC+BC>AB$，

$\therefore AC\cdot AA'+AB\cdot AA'>BC\cdot AA'$，

$AB\cdot AA'+BC\cdot AA'>AC\cdot AA'$，

$AC \cdot AA' + BC \cdot AA' > AB \cdot AA'$，

即直三棱柱的任意两个侧面的面积和大于第三个侧面的面积．

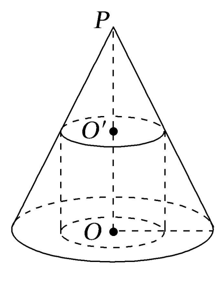
典题 2　解　当三棱柱的侧面 AA_1B_1B 水平放置时，液体部分是四棱柱，其高即为原三棱柱的高，侧棱长 $A_1A=8$．

设当底面 ABC 水平放置时，液面高为 h，由已知条件，知四棱柱与三棱柱的底面面积之比为 3∶4，由于两种状态下液体体积相等，即 $3\times 8=4\times h$，∴$h=6$．

∴当底面 ABC 水平放置时，液面高为 6．

真题再现　B　[由相似关系可得，雨水形成的小圆锥的底面半径 $r=\dfrac{\frac{200}{2}}{2}=50$(mm)，故 $V_{小圆锥}=\dfrac{1}{3}\times\pi\times 50^2\times 150=50^3\cdot\pi(\text{mm}^3)$，从而可得积水厚度 $h=\dfrac{V_{小圆锥}}{S_{大圆}}=\dfrac{50^3\cdot\pi}{\pi\cdot 100^2}=12.5$(mm)，属于中雨．故选 B.]

典题 3　解　设圆锥底面半径为 r，圆柱底面半径为 r'，则 $r=\dfrac{a}{2}$，$r'=\dfrac{a}{4}$．



又可知圆柱母线长 $l'=\dfrac{a}{2}$，圆锥母线长

$l=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}a$，

∴剩下几何体的表面积

$S_{表}=\pi r^2+\pi rl+2\pi r'l'=\pi\cdot\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\pi\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{2}a+2\pi\cdot\dfrac{a}{4}\cdot\dfrac{a}{2}=\dfrac{2+\sqrt{5}}{4}\pi a^2$．

剩下几何体的体积 $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2\cdot OP-\pi r'^2\cdot OO'$

$=\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\cdot a-\pi\cdot\left(\dfrac{a}{4}\right)^2\cdot\dfrac{a}{2}=\dfrac{5}{96}\pi a^3$．

答：剩下几何体的表面积为 $\dfrac{2+\sqrt{5}}{4}\pi a^2$，体积为 $\dfrac{5}{96}\pi a^3$．

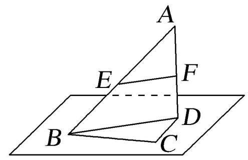
典题 4　解　由该奖杯的三视图可知，奖杯的上部是直径为 4 cm 的球；

中部是一个四棱柱，其中上、下底面都是边长分别为 8 cm、4 cm 的矩形，四个侧面中的两个侧面是边长分别为 20 cm、8 cm 的矩形，另两个侧面是边长分别为 20 cm、4 cm 的矩形；

下部是一个四棱台，其中上底面是边长分别为 10 cm、8 cm 的矩形，下底面是边长分别为 20 cm、16 cm 的矩形，四棱台的高为 2 cm.

因此它的表面积和体积分别约为 1 193 cm^2、1 047 cm^3.

典题 5　解　已知：如图，空间四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AB，AD 的中点.



求证：EF∥平面 BCD.

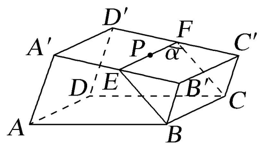
证明　连接 BD.

∵$AE=EB$，$AF=FD$，∴EF∥BD.

又 $EF\not\subset$平面 BCD，$BD\subset$平面 BCD，

∴EF∥平面 BCD.

典题 6　解　(1)如图，



在平面 $A'C'$内，

过点 P 作直线 EF，

使 EF∥$B'C'$，并分别交棱 $A'B'$，$D'C'$于点 E、F.

连接 BE，CF，则 EF，BE，CF 就是应画的线.

(2)因为棱 BC 平行于平面 $A'C'$，

平面 BC'与平面 $A'C'$相交于 $B'C'$，所以 BC∥$B'C'$.

由(1)知，EF∥$B'C'$，所以 EF∥BC，

而 BC 在平面 AC 内，EF 在平面 AC 外，所以 EF∥平面 AC.

显然，BE，CF 都与平面 AC 相交.

典题 7　证明　∵AA'与 CC'相交于点 O，∴$\angle AOC=\angle A'OC'$.

又 $AO=A'O$，$CO=C'O$，∴$\triangle OAC\cong\triangle OA'C'$，

∴$\angle CAO=\angle C'A'O$，∴AC∥$A'C'$.

又 $AC\not\subset$平面 $A'B'C'$，$A'C'\subset$平面 $A'B'C'$，

∴AC∥平面 $A'B'C'$.同理可证 AB∥平面 $A'B'C'$.

又 $AB\subset$平面 ABC，$AC\subset$平面 ABC，$AB\cap AC=A$，

∴平面 ABC∥平面 $A'B'C'$.

典题 8　证明　连接 EE'.

∵E，E'分别是 AD，$A'D'$的中点，∴EE'綉 AA'.

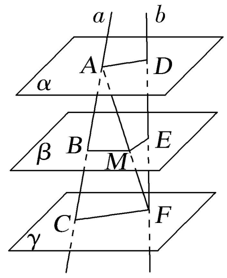
又在长方体 $ABCDA'B'C'D'$中，AA'綉 BB'綉 CC'.

∴EE'綉BB'，EE'綉CC'，

∴四边形$BEE'B'$与$CEE'C'$都是平行四边形.

∴$BE∥B'E'$，$CE∥C'E'$，∴$\angle BEC=\angle B'E'C'$.

典题 9　证明　如图，连接AF交β于点M，连接MB，CF，ME，AD.



因为$\beta∥\gamma$，$\beta\cap$平面$ACF=BM$，$\gamma\cap$平面$ACF=CF$，

所以$BM∥CF$，所以$\frac{AB}{BC}=\frac{AM}{MF}$.

同理$ME∥AD$，且$\frac{AM}{MF}=\frac{DE}{EF}$，

所以$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.

典题 10　(1)(2)(4)(5)　[因为平面$ABB_1A_1∥$平面DCC_1D_1，所以有水的部分和无水的部分始终有两个面平行，而其余各面都易证是平行四边形，所以(1)(2)是正确的.

在题图(1)中，水面面积$S_1=EF\cdot FG=EF\cdot BC$.

在题图(2)中，水面面积$S_2=EF\cdot BC$，而题图(1)中的EF小于题图(2)中的EF，则$S_1<S_2$，所以(3)是错误的.

易知(4)是正确的.

因为水的体积一定，形成的柱体的高度始终是BC，所以底面$\triangle EFB$的面积一定，

即$S_{\triangle EFB}=\frac{1}{2}BE\cdot BF$是一个定值，即$BE\cdot BF$是一个定值，所以(5)是正确的.]

典题 11　解　(1)棱AB，BC，CD，DA，$A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$所在直线分别与直线AA'垂直.

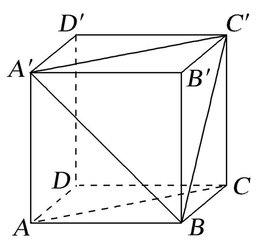
(2)因为$ABCDA'B'C'D'$是正方体，所以$BB'∥CC'$，

因此$\angle A'BB'$为直线BA'与CC'所成的角.

又因为$\angle A'BB'=45°$，

所以直线BA'与CC'所成的角等于45°.

(3)如图，连接$A'C'$.



因为$ABCDA'B'C'D'$是正方体，

所以AA'綉CC'.

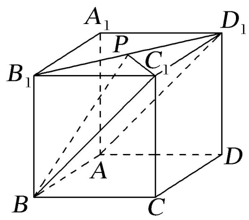
从而四边形$AA'C'C$是平行四边形，

所以 $AC\parallel A'C'$.

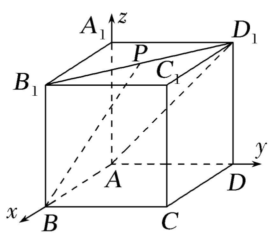
于是 $\angle BA'C'$为异面直线 BA'与 AC 所成的角.

连接 BC'，易知$\triangle A'BC'$是等边三角形，所以$\angle BA'C'=60°$.

从而异面直线 BA'与 AC 所成的角等于 $60°$.



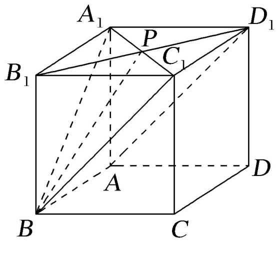
真题再现　D　[**法一**　如图，连接 C_1P，因为 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ 是正方体，且 P 为 B_1D_1 的中点，所以 $C_1P\perp B_1D_1$，又 $C_1P\perp BB_1$，$B_1D_1\cap BB_1=B_1$，B_1D_1，$BB_1\subset$平面 B_1BP，所以 $C_1P\perp$平面 B_1BP. 又 $BP\subset$平面 B_1BP，所以有 $C_1P\perp BP$.连接 BC_1，则 $AD_1\parallel BC_1$，所以$\angle PBC_1$为直线 PB 与 AD_1 所成的角．设正方体 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，则在 $\mathrm{Rt}\triangle C_1PB$ 中，$C_1P=\frac{1}{2}B_1D_1=\sqrt{2}$，$BC_1=2\sqrt{2}$，$\sin\angle PBC_1=\frac{PC_1}{BC_1}=\frac{1}{2}$，所以$\angle PBC_1=\frac{\pi}{6}$，故选 D.



法二　如图，以 A 为坐标原点，AB，AD，AA_1 所在的直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，设正方体 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，则 $A(0，0，0)$，$B(2，0，0)$，$P(1，1，2)$，$D_1(0，2，2)$，$\overrightarrow{PB}=(1，-1，-2)$，$\overrightarrow{AD_1}=(0，2，2)$．设直线 PB 与 AD_1 所成的角为θ，

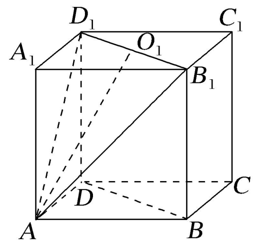
则 $\cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AD_1}}{|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{AD_1}|}\right|=\frac{|-6|}{\sqrt{6}\times\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为$\theta\in\left[0，\frac{\pi}{2}\right]$，所以$\theta=\frac{\pi}{6}$，故选 D.



法三　如图，连接 BC_1，A_1B，A_1P，PC_1，则易知 $AD_1\parallel BC_1$，所以直线 PB 与 AD_1 所成的角等于直线 PB 与 BC_1 所成的角．由 P 为正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 B_1D_1 的中点，知 A_1，P，C_1 三点共线，且 P 为 A_1C_1 的中点.易知 $A_1B=BC_1=A_1C_1$，所以$\triangle A_1BC_1$为等边三角形，所以

$\angle A_1BC_1=\frac{\pi}{3}$，又 P 为 A_1C_1 的中点，所以可得$\angle PBC_1=\frac{1}{2}\angle A_1BC_1=\frac{\pi}{6}$，故直线 PB 与 AD_1 所成的角为$\frac{\pi}{6}$，故选 D.]



典题 12　证明　如图，连接 B_1D_1.

∵$ABCDA_1B_1C_1D_1$ 是正方体，

∴BB_1 綉 DD_1.

∴四边形 BB_1D_1D 是平行四边形.

∴$B_1D_1 /\!/ BD$.

∴直线 AO_1 与 B_1D_1 所成的角即为直线 AO_1 与 BD 所成的角.

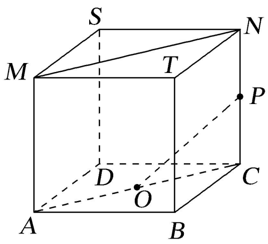
连接 AB_1，AD_1，易证 $AB_1=AD_1$，

又 O_1 为底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心，

∴O_1 为 B_1D_1 的中点，∴$AO_1\perp B_1D_1$，∴$AO_1\perp BD$.

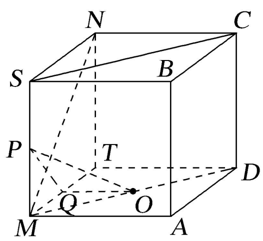
真题再现　BC　[设正方体的棱长为 2.

对于 A，如图(1)所示，连接 AC，则 $MN /\!/ AC$，故 $\angle POC$(或其补角)为异面直线 OP，MN 所成的角．在直角三角形 OPC 中，$OC=\sqrt{2}$，$CP=1$，故 $\tan\angle POC=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故 $MN\perp OP$ 不成立，故 A 错误；



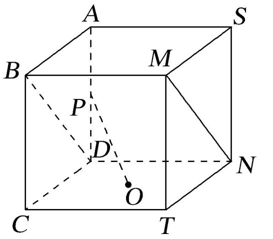
图(1)

对于 B，如图(2)所示，取 MT 的中点为 Q，连接 PQ，OQ，则 $OQ\perp MT$，$PQ\perp MN$. 由正方体 $SBCNMADT$ 可得 $SM\perp$平面 $MADT$，而 $OQ\subset$平面 $MADT$，故 $SM\perp OQ$. 又 $SM\cap MT=M$，SM，$MT\subset$平面 $SNTM$，故 $OQ\perp$平面 $SNTM$.又 $MN\subset$平面 $SNTM$，所以 $OQ\perp MN$，又 $OQ\cap PQ=Q$，OQ，$PQ\subset$平面 OPQ，所以 $MN\perp$平面 OPQ，又 $OP\subset$平面 OPQ，故 $MN\perp OP$，故 B 正确；

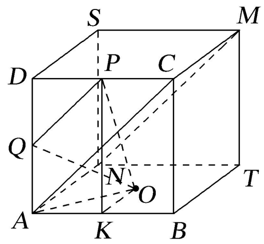


图(2)

对于 C，如图(3)，连接 BD，则 $BD/\!/MN$，由 B 的判断可得 $OP\perp BD$，故 $OP\perp MN$，故 C 正确；



图(3)

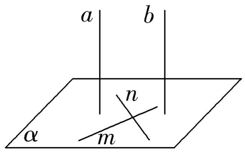


图(4)

对于 D，如图(4)，取 AD 的中点 Q，AB 的中点 K，连接 AC，PQ，OQ，PK，OK，则 $AC/\!/MN$.因为 $DP=PC$，故 $PQ/\!/AC$，故 $PQ/\!/MN$，所以∠QPO(或其补角)为异面直线 PO，MN 所成的角，

因为正方体的棱长为 2，故 $PQ=\frac{1}{2}AC=\sqrt{2}$，$OQ=\sqrt{AO^2+AQ^2}=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$，$PO=\sqrt{PK^2+OK^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$，$QO^2<PQ^2+OP^2$，故∠$QPO$ 不是直角，故 PO，MN 不垂直，故 D 错误．故选 BC.]

典题 13　证明　如图，在平面 α 内取两条相交直线 m，n.



∵直线 $a\perp\alpha$，∴$a\perp m$，$a\perp n$.

∵$b/\!/a$，∴$b\perp m$，$b\perp n$.

又 $m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，m，n 是两条相交直线，

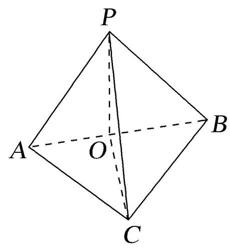
∴$b\perp\alpha$.

典题 14　(1)外　(2)中　(3)垂　[(1)∵过△ABC 所在平面 α 外一点 P，作 $PO\perp\alpha$，垂足为 O，连接 PA，PB，PC，

∵$PA=PB=PC$，∴$OA=OB=OC$，∴点 O 是△ABC 的外心.

(2)由(1)知，又∠$C=90°$，

∴O 是 Rt△ABC 的外心在斜边 AB 的中点.



(3)连接 AO 并延长交 BC 于一点 E，连接 PO.

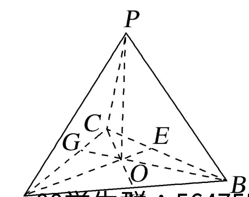
∵PA，PB，PC 两两垂直，

即 $PA\perp PB$，$PB\perp PC$，$PC\perp PA$，

∴$PA\perp$ 平面 PBC.

又∵$BC\subset$平面 PBC，∴$BC\perp PA$.

∵$PO\perp$ 平面 ABC 于 O，$BC\subset$平面 ABC，



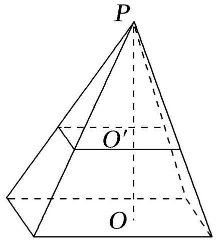
∴$PO \perp BC$，∴$BC \perp$平面 PAE.

∵$AE \subset$平面 APE，∴$BC \perp AE$.

同理可证 $HC \perp AB$，$BG \perp AC$，

所以 O 是△ABC 的垂心．]

典题 15　解　如图，延长棱台各侧棱交于点 P，得到截得棱台的棱锥.



过点 P 作棱台的下底面的垂线，分别与棱台的上、下底面交于点 O'，O，则 PO 垂直于棱台的上底面，从而 $O'O=h$.

设截得棱台的棱锥的体积为 V，去掉的棱锥的体积为 V'，高为 h'，则 $PO'=h'$.

于是 $V'=\frac{1}{3}S'h'$，$V=\frac{1}{3}S(h'+h)$.

所以棱台的体积 $V_{棱台}=V-V'=\frac{1}{3}S(h'+h)-\frac{1}{3}S'h'$

$=\frac{1}{3}[Sh+(S-S')h']$．①

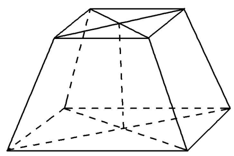
由棱台的上、下底面平行，可以证明棱台的上、下底面相似，并且$\frac{S'}{S}=\frac{h'^2}{(h'+h)^2}$，

所以 $h'=\frac{\sqrt{S'}h}{\sqrt{S}-\sqrt{S'}}$，代入①，

得 $V_{棱台}=\frac{1}{3}h\left[S+(S-S')\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}-\sqrt{S'}}\right]$

$=\frac{1}{3}h(S'+\sqrt{S'S}+S)$.

真题再现　D　[连接该正四棱台上、下底面的中心，如图，因为该四棱台上、下底面的边长分别为 2，4，侧棱长为 2，所以该棱台的高 $h=\sqrt{2^2-(2\sqrt{2}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$，下底面面积 $S_1=16$，上底面面积 $S_2=4$，所以该棱台的体积 $V=\frac{1}{3}h(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times(16+4+\sqrt{64})=\frac{28\sqrt{2}}{3}$.]



典题 16　证明　∵$PA \perp$平面 ABC，$BC \subset$平面 ABC，∴$PA \perp BC$.

∵点 C 是圆周上不同于 A，B 的任意一点，AB 是⊙O 的直径，

$\therefore \angle BCA=90°$，即 $BC\perp AC$，

又 $PA\cap AC=A$，$PA\subset$平面 PAC，$AC\subset$平面 PAC，

$\therefore BC\perp$平面 PAC.

又 $BC\subset$平面 PBC，$\therefore$平面 $PAC\perp$平面 PBC.

典题 17　证明　$\because$直三棱柱 $ABCA_1B_1C_1$ 中，$AA_1=AB$，

$\therefore$四边形 ABB_1A_1 为正方形.

连接 A_1B，则 $A_1B\perp AB_1$，

$\because$直棱柱中，$AA_1\perp$底面 ABC，$BC\subset$底面 ABC，$\therefore AA_1\perp BC$.

$\because \angle ABC=90°$，即 $AB\perp BC$.

又 $AA_1\cap AB=A$，$\therefore BC\perp$平面 ABB_1A_1.

$\because AB_1\subset$平面 ABB_1A_1，$\therefore BC\perp AB_1$.

又 $A_1B\cap BC=B$，$\therefore AB_1\perp$平面 A_1BC.

$\because A_1C\subset$平面 A_1BC，$\therefore A_1C\perp AB_1$.

典题 18　解　直线 DE 与平面 VBC 垂直.

理由：由 VC 垂直于$\odot O$ 所在平面，知 $VC\perp AC$，$VC\perp BC$，即$\angle ACB$ 是二面角 $AVCB$ 的平面角.

由 AB 是$\odot O$ 的直径，知$\angle ACB=90°$.

因此，平面 $VAC\perp$平面 VBC.

由 D，E 分别是 VA，VC 的中点，知 $DE/\!/AC$，故 $DE\perp VC$.

由两个平面垂直的性质定理，知直线 DE 与平面 VBC 垂直.

典题 19　解　垂直．证明如下：

$\because PA\perp$底面 $ABCD$，$BC\subset$平面 $ABCD$，$\therefore PA\perp BC$.

又底面 $ABCD$ 为正方形，$\therefore AB\perp BC$，而 $PA\cap AB=A$.

$\therefore BC\perp$平面 PAB.

$\because AE\subset$平面 PAB，$\therefore BC\perp AE$.

$\because PA=AB$，E 为 PB 的中点，

$\therefore AE\perp PB$.而 $PB\cap BC=B$，$\therefore AE\perp$平面 PBC.

$\because AE\subset$平面 AEF，$\therefore$平面 $AEF\perp$平面 PBC.

典题 20　(1)**证明**　折叠前，$AD\perp AE$，$CD\perp CF$，折叠后，

$A'D\perp A'E$，$A'D\perp A'F$.

又 $A'E\cap A'F=A'$，∴$A'D\perp$平面 $A'EF$，∴$A'D\perp EF$.

(2)解　由(1)可知，$A'D\perp$平面 $A'EF$，

∴三棱锥 $DA'EF$ 的高 $A'D=AD=2$.

又$\triangle A'EF$ 折前为$\triangle BEF$，E，F 分别为 AB，BC 的中点，

∴$S_{\triangle A'EF}=S_{\triangle BEF}=\dfrac{1}{2}\times1\times1=\dfrac{1}{2}$，

∴$V_{A'EFD}=V_{DA'EF}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle A'EF}\cdot A'D=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2=\dfrac{1}{3}$.

典题 21　(1)**证明**　∵$PA\perp$底面 ABC，$BC\subset$底面 ABC，

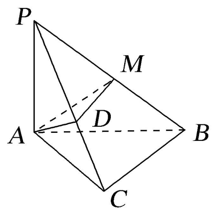
∴$PA\perp BC$.

又$\angle ACB=90°$，即 $AC\perp BC$.

∵$PA\cap AC=A$，∴$BC\perp$平面 PAC.

∵$BC\subset$平面 PBC，∴平面 $PAC\perp$平面 PBC.

(2)解　如图，取 PC 的中点 D，



连接 AD，DM.

∵$AC=PA$，∴$AD\perp PC$.

由(1)知，$BC\perp$平面 PAC，

又 $AD\subset$平面 PAC，∴$BC\perp AD$.

而 $PC\cap BC=C$，∴$AD\perp$平面 PBC.

∴DM 是斜线 AM 在平面 PBC 上的射影.

∴$\angle AMD$ 就是 AM 与平面 PBC 所成的角，且 $AD\perp DM$.

设 $AC=BC=PA=2a$，则由 M 是 PB 中点得 $DM=\dfrac{1}{2}BC=a$，$AD=\sqrt{2}a$.∴$\tan\angle AMD$

$=\dfrac{AD}{DM}=\sqrt{2}$.

即 AM 与平面 PBC 所成角的正切值为$\sqrt{2}$.

典题 22　(1)**证明**　在正方形 $ABCD$ 中，$CD\perp AD$，

又侧面 $PAD\perp$底面 $ABCD$，侧面 $PAD\cap$底面 $ABCD=AD$.

∴$CD\perp$平面 PAD.∵$AM\subset$平面 PAD，∴$CD\perp AM$.

∵$\triangle PAD$ 是正三角形，M 是 PD 的中点，∴$AM\perp PD$.

又 $CD\cap PD=D$，∴$AM\perp$平面 PCD.

(2)解　取 AD，BC 的中点分别为 E，F，连接 EF，PE，PF.

则 EF 綉 CD，$\therefore EF\perp AD$.

又在正$\triangle PAD$ 中，$PE\perp AD$.

$\because EF\cap PE=E$，$\therefore AD\perp$ 平面 PEF.

$\because$ 正方形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，$\therefore BC\perp$ 平面 PEF.

$\therefore \angle PFE$ 是侧面 PBC 与底面 $ABCD$ 所成二面角的平面角.

由 $CD\perp$ 平面 PAD，$EF /\!/ CD$，$\therefore EF\perp$ 平面 PAD.

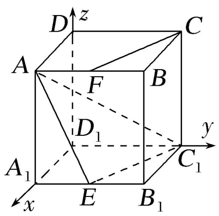
$\because PE\subset$ 平面 PAD，$\therefore EF\perp PE$.

设正方形 $ABCD$ 的边长 $AD=2a$，则 $EF=2a$，$PE=\sqrt{3}a$.

$\therefore PF=\sqrt{PE^2+EF^2}=\sqrt{7}a$，$\therefore \cos\angle PFE=\dfrac{EF}{PF}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，

即侧面 PBC 与底面 $ABCD$ 所成二面角的余弦值为$\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

典题 23　解　以 D_1 为原点，D_1A_1，D_1C_1，D_1D 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(1，0，1)$，$B(1，1，1)$，$C(0，1，1)$，

$C_1(0，1，0)$，$E\left(1，\dfrac{1}{2}，0\right)$，$F\left(1，\dfrac{1}{2}，1\right)$，

所以$\overrightarrow{AB}=(0，1，0)$，$\overrightarrow{AC_1}=(-1，1，-1)$，

$\overrightarrow{AE}=\left(0，\dfrac{1}{2}，-1\right)$，$\overrightarrow{EC_1}=\left(-1，\dfrac{1}{2}，0\right)$，

$\overrightarrow{FC}=\left(-1，\dfrac{1}{2}，0\right)$，$\overrightarrow{AF}=\left(0，\dfrac{1}{2}，0\right)$.

(1)取 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=(0，1，0)$，$\boldsymbol{u}=\dfrac{\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AC_1}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(-1，1，-1)$，

则 $\boldsymbol{a}^2=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

所以点 B 到直线 AC_1 的距离为

$\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})^2}=\sqrt{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(2)因为$\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{EC_1}=\left(-1，\dfrac{1}{2}，0\right)$，所以 $FC /\!/ EC_1$，所以 $FC /\!/$ 平面 AEC_1.

所以点 F 到平面 AEC_1 的距离即为直线 FC 到平面 AEC_1 的距离.

设平面 AEC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x, y, z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC_1}=0.\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}\frac{1}{2}y-z=0,\\ -x+\frac{1}{2}y=0.\end{cases}$

所以 $\begin{cases}x=z,\\ y=2z.\end{cases}$ 取 $z=1$，则 $x=1$，$y=2$.

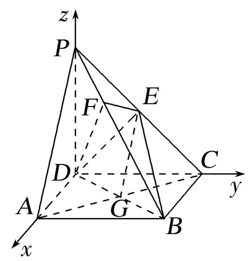
所以 $\boldsymbol{n}=(1, 2, 1)$是平面 AEC_1 的一个法向量.

又因为$\overrightarrow{AF}=\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$,

所以点 F 到平面 AEC_1 的距离为

$$\frac{|\overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{\left|\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)\cdot(1, 2, 1)\right|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

即直线 FC 到平面 AEC_1 的距离为$\frac{\sqrt{6}}{6}$.



典题 24　解　以 D 为原点，DA，DC，DP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，设 $DC=1$.

(1)**证明**　连接 AC，交 BD 于点 G，连接 EG.

依题意得 $A(1, 0, 0)$，$P(0, 0, 1)$，

$E\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

因为底面 $ABCD$ 是正方形，所以点 G 是它的中心，

故点 G 的坐标为$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$,

且$\overrightarrow{PA}=(1, 0, -1)$，$\overrightarrow{EG}=\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$.

所以$\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{EG}$，即 $PA\parallel EG$.

而 $EG\subset$平面 EDB，且 $PA\not\subset$平面 EDB,

因此 $PA\parallel$平面 EDB.

(2)**证明**　依题意得 $B(1, 1, 0)$，$\overrightarrow{PB}=(1, 1, -1)$.

又$\overrightarrow{DE}=\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，故$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DE}=0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$.

所以 $PB\perp DE$.

由已知 $EF\perp PB$，且 $EF\cap DE=E$，所以 $PB\perp$平面 EFD.

(3)已知 $PB\perp EF$，由(2)可知 $PB\perp DF$，故$\angle EFD$ 是平面 CPB 与平面 PBD 的夹角.

设点 F 的坐标为$(x,\ y,\ z)$，则$\overrightarrow{PF}=(x,\ y,\ z-1)$.

因为$\overrightarrow{PF}=k\overrightarrow{PB}$，所以$(x,\ y,\ z-1)=k(1,\ 1,\ -1)=(k,\ k,\ -k)$，

即 $x=k$，$y=k$，$z=1-k$.

设$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DF}=0$，则$(1,\ 1,\ -1)\cdot(k,\ k,\ 1-k)=k+k-1+k=3k-1=0$.

所以 $k=\frac{1}{3}$，点 F 的坐标为$\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$.

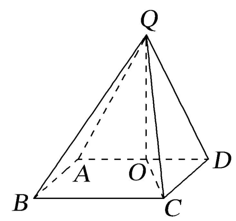
又点 E 的坐标为$\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，所以$\overrightarrow{FE}=\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ -\frac{1}{6}\right)$.

所以 $\cos\angle EFD=\dfrac{\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FD}}{|\overrightarrow{FE}|\cdot|\overrightarrow{FD}|}$

$$=\frac{\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ -\frac{1}{6}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)}{\frac{\sqrt{6}}{6}\times\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{1}{2}.$$

所以$\angle EFD=60°$，即平面 CPB 与平面 PBD 的夹角大小为 $60°$.

真题再现　(1)**证明**　取 AD 的中点为 O，连接 QO，CO.



因为 $QA=QD$，$OA=OD$，则 $QO\perp AD$.

又 $AD=2$，$QA=\sqrt{5}$，

故 $QO=\sqrt{5-1}=2$.

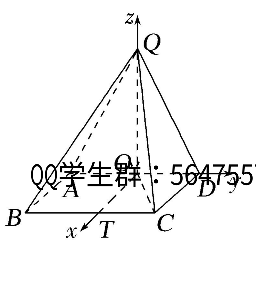
在 $\mathrm{Rt}\triangle ODC$ 中，$CO=\sqrt{OD^2+CD^2}=\sqrt{5}$.

因为 $QC=3$，故 $QC^2=QO^2+OC^2$，故$\triangle QOC$ 为直角三角形且 $QO\perp OC$.

因为 $OC\cap AD=O$，OC，$AD\subset$平面 $ABCD$，故 $QO\perp$平面 $ABCD$.

因为 $QO\subset$平面 QAD，故平面 $QAD\perp$平面 $ABCD$.

(2)**解**　在平面 $ABCD$ 内，过 O 作 $OT\parallel CD$，交 BC 于 T，则



$OT\perp AD$，结合(1)中的 $QO\perp$平面 $ABCD$，故可建如图所示的空间坐标系，

则 $D(0，1，0)$，$Q(0，0，2)$，$B(2，-1，0)$，故$\overrightarrow{BQ}=(-2，1，2)$，$\overrightarrow{BD}=(-2，2，0)$．

设平面 QBD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x，y，z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BQ}=0，\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0，\end{cases}$即$\begin{cases}-2x+y+2z=0，\\ -2x+2y=0，\end{cases}$

取 $x=1$，则 $y=1$，$z=\frac{1}{2}$，故 $\boldsymbol{n}=\left(1，1，\frac{1}{2}\right)$.

易知平面 QAD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1，0，0)$，

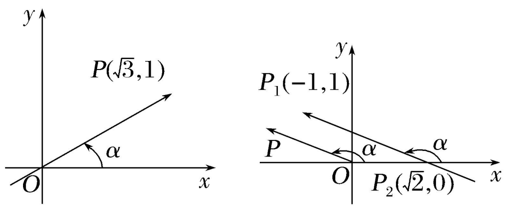
故 $\cos\langle\boldsymbol{m}，\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{1\times\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$.

又二面角 $BQDA$ 的平面角为锐角，故其余弦值为$\frac{2}{3}$.

第八章　平面解析几何

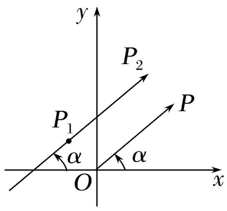
教材探究思考

探究 1　提示：(1)如图(1)，向量$\overrightarrow{OP}=(\sqrt{3}，1)$，且直线 OP 的倾斜角为α.由正切函数的定义，有 $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

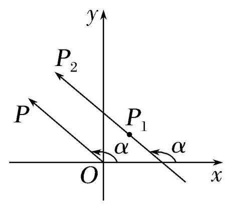


图(1)　　　　图(2)

(2)如图(2)，$\overrightarrow{P_2P_1}=(-1-\sqrt{2}，1-0)=(-1-\sqrt{2}，1)$．平移向量$\overrightarrow{P_2P_1}$到$\overrightarrow{OP}$，则点 P 的坐标为$(-1-\sqrt{2}，1)$，且直线 OP 的倾斜角也是α.由正切函数的定义，有 $\tan\alpha=\frac{1}{-1-\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}$.



图(3)



图(4)

(3)一般地，如图(3)(4)，当向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向向上时，$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1，y_2-y_1)$．平移向量$\overrightarrow{P_1P_2}$到$\overrightarrow{OP}$，则点 P 的坐标为$(x_2-x_1，y_2-y_1)$，且直线 OP 的倾斜角也是α，由正切函数的定义，有 $\tan\alpha=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

探究 2　提示：对于方程 $Ax+By+C=0$.

①当 $A=0$，$BC\neq0$ 时，方程为 $y=-\dfrac{C}{B}$，表示的直线平行于 x 轴.

②当 $B=0$，$AC\neq0$ 时，方程为 $x=-\dfrac{C}{A}$，表示的直线平行于 y 轴.

③当 $A=C=0$，$B\neq0$ 时，方程为 $y=0$，表示 x 轴.

④当 $B=C=0$，$A\neq0$ 时，方程为 $x=0$，表示 y 轴.

探究 3　提示：点 P 到直线 l 的距离，就是从点 P 到直线 l 的垂线段 PQ 的长度，其中 Q 是垂足．因此，求出垂足 Q 的坐标，利用两点间的距离公式求出$|PQ|$，就可以得到点 P 到直线 l 的距离.

设 $A\neq0$，$B\neq0$.由 $PQ\perp l$，以及直线 l 的斜率为$-\dfrac{A}{B}$，可得 l 的垂线 PQ 的斜率为$\dfrac{B}{A}$，

因此，垂线 PQ 的方程为 $y-y_0=\dfrac{B}{A}(x-x_0)$，即 $Bx-Ay=Bx_0-Ay_0$.

解方程组$\begin{cases}Ax+By+C=0,\\Bx-Ay=Bx_0-Ay_0,\end{cases}$ ①

得直线 l 与 PQ 的交点坐标，即垂足 Q 的坐标为

$$\left(\frac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2}，\frac{-ABx_0+A^2y_0-BC}{A^2+B^2}\right).$$

于是$|PQ|=$

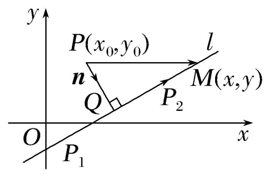
$$\sqrt{\left(\frac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2}-x_0\right)^2+\left(\frac{-ABx_0+A^2y_0-BC}{A^2+B^2}-y_0\right)^2}$$

$=\sqrt{\dfrac{(Ax_0+By_0+C)^2}{A^2+B^2}}=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

因此，点 $P(x_0，y_0)$到直线 l：$Ax+By+C=0$ 的距离 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

可以验证，当 $A=0$，或 $B=0$ 时，上述公式仍然成立.

探究 4　提示：如图，点 P 到直线 l 的距离，就是向量$\overrightarrow{PQ}$的模.



设 $M(x，y)$是直线 l 上的任意一点，$\boldsymbol{n}$ 是与直线 l 的方向向量垂直的单位向量，则$\overrightarrow{PQ}$是$\overrightarrow{PM}$在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影向量，

$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PM}\cdot\boldsymbol{n}|$.

设 $P_1(x_1，y_1)$，$P_2(x_2，y_2)$是直线 l：$Ax+By+C=0$ 上的任意两点，则$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1，y_2-y_1)$是直线 l 的方向向量.

把 $Ax_1+By_1+C=0$，$Ax_2+By_2+C=0$ 两式相减，得 $A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)=0$.

由平面向量的数量积运算可知，向量$(A，B)$与向量$(x_2-x_1，y_2-y_1)$垂直.

向量$\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}(A，B)$就是与直线 l 的方向向量垂直的一个单位向量.

我们取 $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}(A，B)$，

从而$\overrightarrow{PM}\cdot\boldsymbol{n}=(x-x_0，y-y_0)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}(A，B)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}[A(x-x_0)+B(y-y_0)]$

$=\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}(Ax+By-Ax_0-By_0)$.

因为点 $M(x，y)$在直线 l 上，所以 $Ax+By+C=0$.

所以 $Ax+By=-C$.

代入上式，得$\overrightarrow{PM}\cdot\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}(-Ax_0-By_0-C)$.

因此$|PQ|=|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PM}\cdot\boldsymbol{n}|=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

探究 5　提示：配方得$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$.

(1)当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，可看出方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示以$\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$为圆心，$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$为半径的圆.

(2)当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 只有实数解 $x=-\frac{D}{2}$，$y=-\frac{E}{2}$，它表示一个点$\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$.

(3)当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 没有实数解，它不表示任何图形.

探究 6　提示：把细绳的两端拉开一段距离，笔尖移动的过程中，细绳的长度保持不变，即笔尖到两个定点的距离和等于常数，由椭圆的定义可知，上述移动的笔尖(动点)画出的轨迹是椭圆.

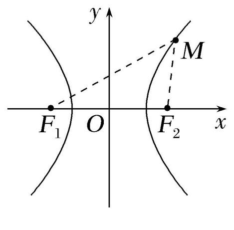
探究 7　提示：在椭圆的标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$中，以$-y$ 代 y，方程不变.这说明当点 $P(x，y)$在椭圆上时，它关于 x 轴的对称点 $P_1(x，-y)$也在椭圆上，所以椭圆关于 x 轴对称.

同理，以$-x$ 代 x，方程也不变，这说明如果点 $P(x，y)$在椭圆上，那么它关于 y 轴的对称点 $P_2(-x，y)$也在椭圆上，所以椭圆关于 y 轴对称.

以$-x$ 代 x，以$-y$ 代 y，方程也不变，这说明当点 $P(x，y)$在椭圆上时，它关于原点的对称点 $P_3(-x，-y)$也在椭圆上，所以椭圆关于原点对称.

综上，椭圆关于 x 轴，y 轴都是对称的.这时，坐标轴是椭圆的对称轴，原点是椭圆的对称中心.

探究 8　提示：观察双曲线，发现它也具有对称性，而且直线 F_1F_2 是它的一条对称轴，所以我们取经过两焦点 F_1 和 F_2 的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立如图所示的平面直角坐标系 Oxy.



设 $M(x，y)$是双曲线上任意一点，双曲线的焦距为 $2c(c>0)$，那么，焦点 F_1，F_2 的坐标分别是$(-c，0)$，$(c，0)$，又设$||MF_1|-|MF_2||=2a$(a 为大于 0 的常数).

由双曲线的定义，双曲线就是下列点的集合：

$P=\{M||MF_1|-|MF_2||=2a，0<2a<|F_1F_2|\}$.

因为$|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$，

$|MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，

所以$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm2a$.

类比椭圆标准方程的化简过程，化简①，

得$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$，

两边同除以 $a^2(c^2-a^2)$，得$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$.

由双曲线的定义知，$2c>2a$，即 $c>a$，所以 $c^2-a^2>0$.

类比椭圆标准方程的建立过程，令 $b^2=c^2-a^2$，其中 $b>0$，代入上式，得$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$.

探究 9　提示：设 $M(x，y)$，则 AM 斜率 $k_1=\frac{y}{x+5}$.

BM 斜率 $k_2=\frac{y}{x-5}$，$\therefore k_1k_2=\frac{y}{x+5}\cdot\frac{y}{x-5}=\frac{4}{9}(y\neq0)$，整理得 $4x^2-9y^2=100(y\neq0)$，即 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{\frac{100}{9}}=1(y\neq0)$.

与它们的斜率之积$-\frac{4}{9}<0$，轨迹为焦点在 x 轴上椭圆$(y\neq0)$；当斜率之积$\frac{4}{9}>0$，轨迹为焦点在 x 轴的双曲线$(y\neq0)$.

推广：点 A，B 坐标分别为$(-5，0)$，$(5，0)$，直线 AM，BM 相交于点 M，且它们的斜率之积是 k 时，

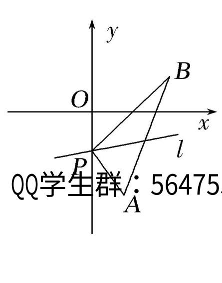
①当 $k<0(k\neq-1)$时，M 的轨迹为焦点在 x 轴或 y 轴的椭圆(不含与 x 轴的交点或 $y\neq0$).

②当 $k>0$ 时，点 M 的轨迹为焦点在 x 轴的双曲线(不含与 x 轴的交点).

教材典题重温

典题 1　解　$\because k_{PA}=\frac{-2-(-1)}{1-0}=-1$，$k_{PB}=\frac{-1-1}{0-2}=1$，

直线 l 与连接 $A(1，-2)$，$B(2，1)$的线段总有公共点，



$\therefore k_{PA}\leqslant k_l\leqslant k_{PB}$，$\therefore -1\leqslant k\leqslant 1$.

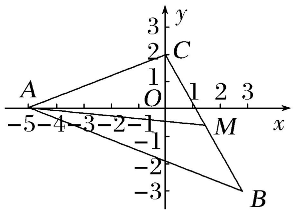
又 $k=\tan\alpha\in[-1，1]$，

倾斜角$\alpha\in\left[0，\dfrac{\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{3}{4}\pi，\pi\right)$，

$\therefore$斜率 k 的范围为$[-1，1]$，

倾斜角α的范围为$\left[0，\dfrac{\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{3}{4}\pi，\pi\right)$.

典题 2　解　如图，过 $B(3，-3)$，



$C(0，2)$的两点式方程为$\dfrac{y-2}{-3-2}=\dfrac{x-0}{3-0}$，整理得 $5x+3y-6=0$.

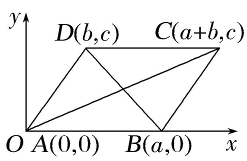
这就是边 BC 所在直线的方程.

边 BC 上的中线是顶点 A 与边 BC 中点 M 所连线段，由中点坐标公式，可得点 M 的坐标为$\left(\dfrac{3+0}{2}，\dfrac{-3+2}{2}\right)$，即$\left(\dfrac{3}{2}，-\dfrac{1}{2}\right)$.

过 $A(-5，0)$，$M\left(\dfrac{3}{2}，-\dfrac{1}{2}\right)$两点的直线方程为$\dfrac{y-0}{-\dfrac{1}{2}-0}=\dfrac{x+5}{\dfrac{3}{2}+5}$，整理可得 $x+13y+5=0$.

这就是边 BC 上中线 AM 所在直线的方程.

典题 3　证明　如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



以顶点 A 为原点，边 AB 所在直线为 x 轴，建立如图所示的平面直角坐标系.

在▱$ABCD$ 中，点 A 的坐标是$(0，0)$，设点 B 的坐标为$(a，0)$，点 D 的坐标为$(b，c)$，由平行四边形的性质，得点 C 的坐标为$(a+b，c)$.

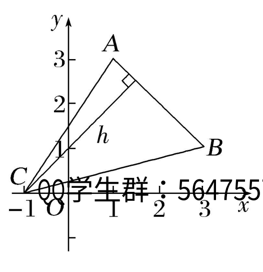
由两点间的距离公式，得$|AC|^2=(a+b)^2+c^2$，$|BD|^2=(b-a)^2+c^2$，$|AB|^2=a^2$，$|AD|^2=b^2+c^2$.

所以$|AC|^2+|BD|^2=2(a^2+b^2+c^2)$，$|AB|^2+|AD|^2=a^2+b^2+c^2$.

所以$|AC|^2+|BD|^2=2(|AB|^2+|AD|^2)$，

即平行四边形两条对角线的平方和等于两条邻边的平方和的两倍.

典题 4　解　如图，设边 AB 上的高为 h，



则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|h$.

$|AB|=\sqrt{(3-1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$.

边 AB 上的高 h 就是点 C 到直线 AB 的距离.

边 AB 所在直线 l 的方程为 $\frac{y-3}{1-3}=\frac{x-1}{3-1}$，

即 $x+y-4=0$.

点 $C(-1，0)$到直线 l：$x+y-4=0$ 的距离

$h=\frac{|-1+0-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$.

因此，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{5}{\sqrt{2}}=5$.

典题 5　解　(1)设 $C(m，n)$，∵AB 边上的中线 CM 所在直线方程为 $2x-y-5=0$，AC 边上的高 BH 所在直线方程为 $x-2y-5=0$，

$\therefore\begin{cases}2m-n-5=0,\\ \frac{n-1}{m-5}\times\frac{1}{2}=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=4,\\ n=3,\end{cases}$ $\therefore C(4，3)$.

(2)设 $B(a，b)$，则 $\begin{cases}a-2b-5=0,\\ 2\times\frac{a+5}{2}-\frac{1+b}{2}-5=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=-3,\end{cases}$ $\therefore B(-1，-3)$，$\therefore k_{BC}=\frac{3+3}{4+1}=\frac{6}{5}$，

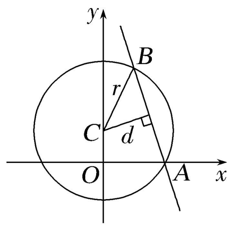
∴直线 BC 的方程为 $y-3=\frac{6}{5}(x-4)$，化为 $6x-5y-9=0$.

典题 6　证明　$\because\begin{cases}x=a+r\cos\theta,\\ y=b+r\sin\theta,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}\cos\theta=\frac{x-a}{r},\\ \sin\theta=\frac{y-b}{r}.\end{cases}$

$\because\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\therefore\frac{(y-b)^2}{r^2}+\frac{(x-a)^2}{r^2}=1$，

即$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，

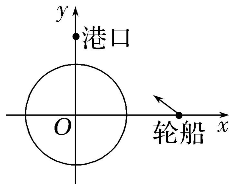
即点 P 的轨迹是以$(a，b)$为圆心，半径为 r 的圆.



典题 7　解　圆 C 的方程 $x^2+y^2-2y-4=0$ 可化为 $x^2+(y-1)^2=5$，因此圆心 C 的坐标为(0，1)，半径为$\sqrt{5}$，圆心 $C(0，1)$到直线 l 的距离 $d=\frac{|3\times0+1-6|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}}<\sqrt{5}$.

所以直线 l 与圆 C 相交，有两个公共点.

如图，由垂径定理，得$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{10}$.



典题 8　解　以小岛的中心为原点 O，东西方向为 x 轴，建立如图所示的直角坐标系.

为了运算的简便，我们取 10 km 为单位长度，则港口所在位置的坐标为(0，3)，轮船所在位置的坐标为(4，0).

这样，受暗礁影响的圆形区域的边缘所对应的圆的方程为 $x^2+y^2=4$，

轮船航线所在直线 l 的方程为$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$，

即 $3x+4y-12=0$.

联立直线 l 与圆 O 的方程，得$\begin{cases}3x+4y-12=0,\\x^2+y^2=4.\end{cases}$

消去 y，得 $25x^2-72x+80=0$.

由$\Delta=(-72)^2-4\times25\times80<0$，可知方程组无解.

所以直线 l 与圆 O 相离，轮船沿直线返港不会有触礁危险.

典题 9　(1)**证明**　直线 l 的方程可化为$(2x+y-7)m+(x+y-4)=0$，

联立$\begin{cases}2x+y-7=0,\\x+y-4=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=3,\\y=1,\end{cases}$

所以直线 l 恒过定点 $P(3，1)$.

(2)**解**　当直线 l 过圆心 C 时，直线被圆截得的弦长最长；

当直线 $l\perp CP$ 时，直线被圆截得的弦长最短.

直线 l 的斜率为 $k=-\frac{2m+1}{m+1}$，$k_{CP}=\frac{1-2}{3-1}=-\frac{1}{2}$.

由$-\frac{2m+1}{m+1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$，解得 $m=-\frac{3}{4}$，

此时直线 l 的方程是 $2x-y-5=0$，

圆心 $C(1，2)$到直线 $2x-y-5=0$ 的距离

$d=\frac{|2-2-5|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，所以最短弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=4\sqrt{5}$.

典题 10　解　设点 M 的坐标为 (x, y)，点 P 的坐标为 (x_0, y_0)，则点 D 的坐标为 $(x_0, 0)$.

由点 M 是线段 PD 的中点，得 $x=x_0$，$y=\frac{y_0}{2}$.

因为点 $P(x_0，y_0)$ 在圆 $x^2+y^2=4$ 上，所以 $x_0^2+y_0^2=4$.①

把 $x_0=x$，$y_0=2y$ 代入方程①，得 $x^2+4y^2=4$，即 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

所以点 M 的轨迹是椭圆.

典题 11　解　依题意 $e_1=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$，

$e_2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$.

又∵$0<\frac{b}{a}<\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$0<\left(\frac{b}{a}\right)^2<\frac{4}{5}$，

∴$e_1=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\in\left(\frac{\sqrt{5}}{5}，1\right)$，$e_2=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\in\left(1，\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$.

典题 12　解　假设存在过点 $P(1，1)$ 的直线 l 与该双曲线交于 A，B 两点，且点 P 是线段 AB 的中点.

设过 $P(1，1)$ 的直线方程为 $y-1=k(x-1)$，

A，B 两点的坐标分别为 $(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，

则 $\begin{cases} x_1^2-\frac{y_1^2}{2}=1，① \\ x_2^2-\frac{y_2^2}{2}=1，② \end{cases}$

①－②得 $(x_1+x_2)(x_1-x_2)-\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{2}=0$.

由 P 为 AB 中点，则 $x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=2$，则 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2$，

即直线 AB 的方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $y=2x-1$，

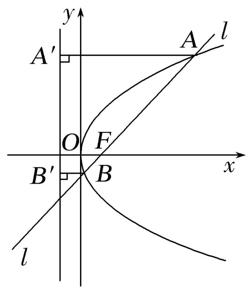
代入双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$，可得 $2x^2-4x+3=0$，

检验判别式$\Delta=16-24<0$，方程无解．

故不存在过点$P(1，1)$的直线l与该双曲线交于A，B两点，且P是线段AB的中点．

典题13　解　由题意可知，$p=2$，$\frac{p}{2}=1$，焦点F的坐标为$(1，0)$，准线方程为$x=-1$.

如图，



设$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，A，B两点到准线的距离分别为d_A，d_B.

由抛物线的定义，可知$|AF|=d_A=x_1+1$，$|BF|=d_B=x_2+1$，

于是$|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+2$.

因为直线l的斜率为1，且过焦点$F(1，0)$，所以直线l的方程为$y=x-1$.①

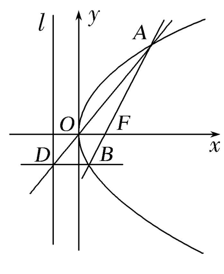
将①代入方程$y^2=4x$，得$(x-1)^2=4x$，

化简得$x^2-6x+1=0$.

所以$x_1+x_2=6$，$|AB|=x_1+x_2+2=8$.

所以线段AB的长是8.

典题14　证明　如图，以抛物线的对称轴为x轴，抛物线的顶点为原点，建立平面直角坐标系xOy.



设抛物线的方程为$y^2=2px(p>0)$，①

点A的坐标为$\left(\frac{y_0^2}{2p}，y_0\right)(y_0\neq 0)$，则直线$OA$的方程为$y=\frac{2p}{y_0}x$，②

抛物线的准线方程是$x=-\frac{p}{2}$.③

联立②③，可得点D的纵坐标为$-\frac{p^2}{y_0}$.

因为焦点F的坐标是$\left(\frac{p}{2}，0\right)$，当$y_0^2\neq p^2$时，直线$AF$的方程为$y=\frac{2py_0}{y_0^2-p^2}\left(x-\frac{p}{2}\right)$.④

联立①④，消去x，可得$y_0y^2-(y_0^2-p^2)y-y_0p^2=0$，即$(y-y_0)(y_0y+p^2)=0$，

可得点B的纵坐标为$-\frac{p^2}{y_0}$，与点D的纵坐标相等，于是DB平行于x轴．

当 $y_0^2=p^2$ 时，易知结论成立.

所以直线 DB 平行于抛物线的对称轴.

典题 15　解　∵点 D 的坐标为(2，1)，∴$k_{OD}=\frac{1}{2}$.

又 $AB\perp OD$，且 AB 过 $D(2，1)$，

∴直线 AB 为 $y-1=-2(x-2)$，整理得 $2x+y-5=0$.

设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，由 $OA\perp OB$ 得 $x_1x_2+y_1y_2=0$，

$x_1x_2+(5-2x_1)(5-2x_2)=0$，

$5x_1x_2-10(x_1+x_2)+25=0$，即 $x_1x_2-2(x_1+x_2)+5=0$.

由 $\begin{cases}y=-2x+5,\\y^2=2px,\end{cases}$ 消去 y，得 $4x^2-(20+2p)x+25=0$，

$x_1+x_2=\frac{20+2p}{4}$，$x_1x_2=\frac{25}{4}$.

由 $x_1x_2-2(x_1+x_2)+5=0$，

得 $\frac{25}{4}-2\times\frac{20+2p}{4}+5=0$，解得 $p=\frac{5}{4}$.

典题 16　解　点(－2，3)关于 x 轴的对称点坐标为(－2，－3)，

设反射光线的斜率为 k，

可得反射光线为 $y+3=k(x+2)$，

即 $kx-y+2k-3=0$.

∵反射光线与圆 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$ 相切，

∴圆心到反射光线的距离 $d=r$，即 $\frac{|5k-5|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，

整理得 $(3k-4)(4k-3)=0$，解得 $k=\frac{4}{3}$ 或 $k=\frac{3}{4}$，

则反射光线的方程为 $3x-4y-6=0$ 或 $4x-3y-1=0$.

真题再现　D　[由已知，得点(－2，－3)关于 y 轴的对称点为(2，－3)，由入射光线与反射光线的对称性，知反射光线一定过点(2，－3).

设反射光线所在直线的斜率为 k，则反射光线所在直线的方程为 $y+3=k(x-2)$，

即 $kx-y-2k-3=0$.

由反射光线与圆相切，则有 $d=\frac{|-3k-2-2k-3|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，

解得 $k=-\frac{4}{3}$或 $k=-\frac{3}{4}$.]

典题 17　解　设点 M 的坐标为$(x，y)$，因为点 A 的坐标是$(-5，0)$，所以直线 AM 的斜率 $k_{AM}=\frac{y}{x+5}(x\neq-5)$，

同理，直线 BM 的斜率 $k_{BM}=\frac{y}{x-5}(x\neq5)$.

由已知，有$\frac{y}{x+5}\times\frac{y}{x-5}=-\frac{4}{9}(x\neq\pm5)$，

化简，得点 M 的轨迹方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{100}{9}}=1(x\neq\pm5)$，

点 M 的轨迹是除去$(-5，0)$，$(5，0)$两点的椭圆.

真题再现　解　由题设得$\frac{y}{x+2}\cdot\frac{y}{x-2}=-\frac{1}{2}$,

化简得$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1(|x|\neq2)$，

所以 C 为中心在坐标原点，焦点在 x 轴上的椭圆，不含左、右顶点.

典题 18　解　∵椭圆方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，

∴焦点分别为 $F_1(-1，0)$，$F_2(1，0)$.

∵直线 AB 过左焦点 F_1，倾斜角为 60°，

∴直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}(x+1)$.

将 AB 方程与椭圆方程联立，消去 y，得 $7x^2+12x+4=0$，

设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，可得 $x_1+x_2=-\frac{12}{7}$，$x_1x_2=\frac{4}{7}$.

∴$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+3}\sqrt{\left(-\frac{12}{7}\right)^2-4\times\frac{4}{7}}=\frac{8\sqrt{2}}{7}$,

∴线段 AB 的长为$\frac{8\sqrt{2}}{7}$.

真题再现　解　设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

由题意知 $y_1>0$，$y_2<0$.

(1)$F(-c，0)$，则直线 l 的方程为 $y=\sqrt{3}(x+c)$.

联立$\begin{cases} y=\sqrt{3}(x+c), \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \end{cases}$ 得$(3a^2+b^2)y^2-2\sqrt{3}b^2cy-3b^4=0$.

解得 $y_1=\dfrac{\sqrt{3}b^2(c+2a)}{3a^2+b^2}$，$y_2=\dfrac{\sqrt{3}b^2(c-2a)}{3a^2+b^2}$.

因为$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，所以$-y_1=2y_2$，

即$-\dfrac{\sqrt{3}b^2(c+2a)}{3a^2+b^2}=2\dfrac{\sqrt{3}b^2(c-2a)}{3a^2+b^2}$，

解得离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{3}$.

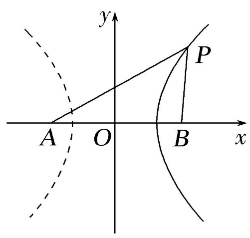
(2)因为$|AB|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\cdot|y_2-y_1|$，

$\therefore\dfrac{15}{4}=\sqrt{1+\dfrac{1}{3}}\cdot\dfrac{4\sqrt{3}ab^2}{3a^2+b^2}$.

由$\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{3}$得 $b=\dfrac{\sqrt{5}}{3}a$，所以$\dfrac{5}{4}a=\dfrac{15}{4}$，解得 $a=3$，$b=\sqrt{5}$，

故椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

典题 19　解　如图，建立平面直角坐标系 Oxy，使 A，B 两点在 x 轴上，并且原点 O 与线段 AB 的中点重合.



设炮弹爆炸点 P 的坐标为$(x，y)$，则$|PA|-|PB|=340\times2=680$，

即 $2a=680$，$a=340$.

又$|AB|=800$，

所以 $2c=800$，$c=400$，$b^2=c^2-a^2=44\ 400$.

因为$|PA|-|PB|=680>0$，所以点 P 的轨迹是双曲线的右支，因此 $x\geqslant340$.

所以炮弹爆炸点的轨迹方程为$\dfrac{x^2}{115\ 600}-\dfrac{y^2}{44\ 400}=1(x\geqslant340)$.

真题再现　解　因为$|MF_1|-|MF_2|=2<|F_1F_2|=2\sqrt{17}$，

所以点 M 的轨迹 C 是以 F_1，F_2 分别为左、右焦点的双曲线的右支.

设双曲线的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$，半焦距为 c，则 $2a=2$，$c=\sqrt{17}$，得 $a=1$，$b^2=c^2-a^2=16$，

所以点 M 的轨迹 C 的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{16}=1(x\geqslant1)$.

典题 20　解　(1)当 $m=n>0$ 时，方程$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$ 表示圆；

(2)当 $m>0$，$n>0$，$m\neq n$ 时，

①$m>n>0$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆；

②$n>m>0$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆；

(3)①$m>0$，$n<0$ 表示焦点在 x 轴上的双曲线；

②$m<0$，$n>0$ 表示焦点在 y 轴上的双曲线.

真题再现　ACD　[对于 A，当 $m>n>0$ 时，有$\frac{1}{n}>\frac{1}{m}>0$，方程化为$\frac{x^2}{\frac{1}{m}}+\frac{y^2}{\frac{1}{n}}=1$，表示焦点在 y 轴上的椭圆，故 A 正确；

对于 B，当 $m=n>0$ 时，方程化为 $x^2+y^2=\frac{1}{n}$，表示半径为$\sqrt{\frac{1}{n}}$的圆，故 B 错误；

对于 C，当 $m>0$，$n<0$ 时，方程化为$\frac{x^2}{\frac{1}{m}}-\frac{y^2}{-\frac{1}{n}}=1$，表示焦点在 x 轴上的双曲线，其中 $a=\sqrt{\frac{1}{m}}$，$b=\sqrt{-\frac{1}{n}}$，渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{-\frac{m}{n}}x$；当 $m<0$，$n>0$ 时，方程化为$\frac{y^2}{\frac{1}{n}}-\frac{x^2}{-\frac{1}{m}}=1$，表示焦点在 y 轴上的双曲线，其中 $a=\sqrt{\frac{1}{n}}$，$b=\sqrt{-\frac{1}{m}}$，渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{-\frac{m}{n}}x$，故 C 正确；

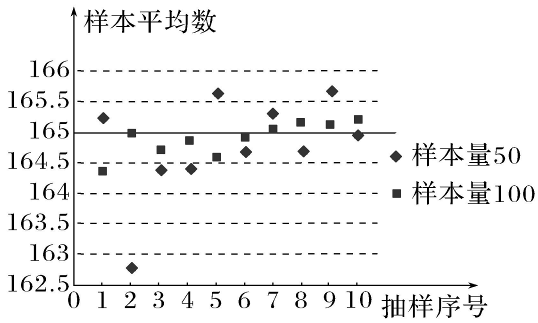
对于 D，当 $m=0$，$n>0$ 时，方程化为 $y=\pm\sqrt{\frac{1}{n}}$，表示两条平行于 x 轴的直线，故 D 正确．]

第九章　统计与成对数据的统计分析

教材探究思考

探究 1　提示：不放回地摸出 50 个球，以 50 个球中红球所占的比例估计袋中红球所占的比例.

探究 2　提示：为了更方便地观察数据，以便我们分析样本平均数的特点以及与总体平均数的关系，我们把这 20 次试验的平均数用图形表示出来，如图所示．图中的实线表示树人中学高一年级全体学生身高的平均数.

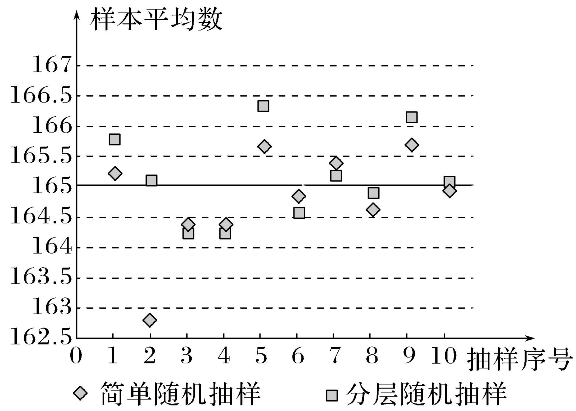


从试验结果看，不管样本量为50，还是为100，不同样本的平均数往往是不同的.由于样本的选取是随机的，因此样本平均数也具有随机性，这与总体平均数是一个确定的数不同．虽然在所有20个样本平均数中，与总体平均数完全一致的很少，但除了样本量为50的第2个样本外，样本平均数偏离总体平均数都不超过1 cm，即大部分样本平均数离总体平均数不远，在总体平均数附近波动．比较样本量为50和样本量为100的样本平均数，还可以发现样本量为100的波动幅度明显小于样本量为50的，这与我们对增加样本量可以提高估计效果的认识是一致的．

探究3　**提示：**把分层随机抽样的平均数与样本量为50的简单随机抽样的平均数用图形进行表示(如下图)，其中实线表示整个年级学生身高的平均数．

从试验结果看，分层随机抽样的样本平均数围绕总体平均数波动，与简单随机抽样的结果比较，分层随机抽样并没有明显优于简单随机抽样．但相对而言，分层随机抽样的样本平均数波动幅度更均匀，简单随机抽样中出现了一个(第2个)偏离总体平均数的幅度比较大的样本平均数，即出现了比较“极端”的样本，而分层随机抽样没有出现．

实际上，在个体之间差异较大的情形下，只要选取的分层变量合适，使得各层间差异明显、层内差异不大，分层随机抽样的效果一般会好于简单随机抽样，也好于很多其他抽样方法．分层随机抽样的组织实施也比简单随机抽样方便，而且除了能得到总体的估计外，还能得到每层的估计．



探究 4　提示：从图中可以看出，同一组数据，组数不同，得到的直方图形状也不尽相同．图(1)中直方图的组数少、组距大，从图中容易看出，数据分布的整体规律是随着月均用水量的增加，居民用户数的频率在降低，而且月均用水量在区间[1.2，10.2)内的居民用户数的频率，远大于在另两个区间[10.2，19.2)和[19.2，28.2]内的频率，这说明大部分居民用户的月均用水量都少于 10.2 t．图(2)中直方图的组数多、组距小，从图中可以看出，数据主要集中在低值区，尤其在区间[5.2，6.2)内最为集中．从总体上看，随着月均用水量的增加，居民用户数的频率呈现下降趋势，但存在个别区间频率变大或者缺失的现象．

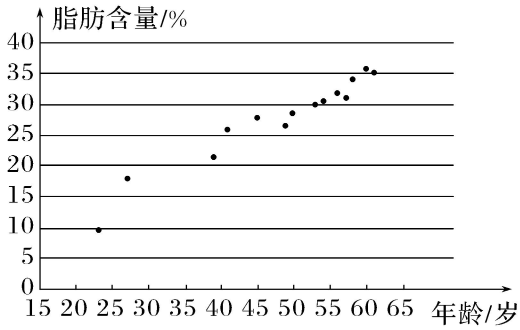
从上述分析可见，当频率分布直方图的组数少、组距大时，容易从中看出数据整体的分布特点，但由于无法看出每组内的数据分布情况，损失了较多的原始数据信息；当频率分布直方图的组数多、组距小时，保留了较多的原始数据信息，但由于小长方形较多，有时图形会变得非常不规则，不容易从中看出总体数据的分布特点．

因此，我们要注意积累数据分组、合理使用图表的经验．

探究 5　提示：一般来说，对一个单峰的频率分布直方图来说，如果直方图的形状是对称的(图(1))，那么平均数和中位数应该大体上差不多；如果直方图在右边“拖尾”(图(2))，那么平均数大于中位数；如果直方图在左边“拖尾”(图(3))，那么平均数小于中位数，也就是说，和中位数相比，平均数总是在“长尾巴”那边．

探究 6　提示：为了更加直观地描述上述成对样本数据中脂肪含量与年龄之间的关系，类似于用直方图描述单个变量样本数据的分布特征，我们用图形展示成对样本数据的变化特征．用横轴表示年龄，纵轴表示脂肪含量，则表中每个编号下的成对样本数据都可用直角坐标系中的点表示出来，由这些点组成了如图所示的

统计图．我们把这样的统计图叫做散点图．



可以发现，这些散点大致落在一条从左下角到右上角的直线附近，表明随年龄值的增加，相应的脂肪含量值呈现增高的趋势．这样，由成对样本数据的分布规律，我们可以推断脂肪含量变量和年龄变量之间存在着相关关系．如果从整体上看，当一个变量的值增加时，另一个变量的相应值也呈现增加的趋势．

教材典题重温

典题 1　D　[由样本的数字特征与总体的数字特征的关系，可知全市居民用户日用电量的平均数约为 5.5 kW·h.]

典题 2　**证明**　$\because \sum\limits_{i=1}^{m}x_i=x_1+x_2+x_3+\cdots+x_m=m\overline{x}$，

$\sum\limits_{i=1}^{n}y_i=y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n=n\overline{y}$，

$\therefore \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}x_i+\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{m+n}=\dfrac{m\overline{x}+n\overline{y}}{m+n}=\dfrac{m}{m+n}\overline{x}+\dfrac{n}{m+n}\overline{y}$.

典题 3　**证明**　$\because \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\overline{x}$，$\dfrac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=\overline{y}$，

$\therefore x_1+x_2+\cdots+x_n=n\overline{x}$，$y_1+y_2+\cdots+y_n=n\overline{y}$.

$\because y_1=ax_1+b$，$y_2=ax_2+b$，…，$y_n=ax_n+b$，

$\therefore y_1+y_2+\cdots+y_n=a(x_1+x_2+\cdots+x_n)+nb$，

$\therefore n\overline{y}=a\cdot n\overline{x}+nb$，$\therefore \overline{y}=a\overline{x}+b$.

典题 4　**证明**　令 x_1，x_2，…，x_n 的平均数为$\overline{x}$，y_1，y_2，…，y_n 的平均数为$\overline{y}$，且$\overline{y}=a\overline{x}+b$，

$s_x^2=\dfrac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$，

$s_x=\sqrt{\frac{1}{n}[（x_1-\overline{x}）^2+（x_2-\overline{x}）^2+\cdots+（x_n-\overline{x}）^2]}$，

$s_y^2=\frac{1}{n}[(y_1-\overline{y})^2+(y_2-\overline{y})^2+\cdots+(y_n-\overline{y})^2]$

$=\frac{1}{n}[(ax_1+b-a\overline{x}-b)^2+(ax_2+b-a\overline{x}-b)^2+\cdots+(ax_n+b-a\overline{x}-b)^2]$

$=\frac{1}{n}[a^2(x_1-\overline{x})^2+a^2(x_2-\overline{x})^2+\cdots+a^2(x_n-\overline{x})^2]$

$=a^2\left[\frac{1}{n}（x_1-\overline{x}）^2+\frac{1}{n}（x_2-\overline{x}）^2+\cdots+\frac{1}{n}（x_n-\overline{x}）^2\right]$

$=a^2s_x^2$，

即 $s_y=|a|s_x$.

真题再现 CD [设样本数据 x_1，x_2，…，x_n 的平均数、中位数、标准差、极差分别为$\overline{x}$，m，σ，t，依题意得，新样本数据 y_1，y_2，…，y_n 的平均数、中位数、标准差、极差分别为$\overline{x}+c$，$m+c$，σ，t，因为 $c\neq0$，所以 A，B 不正确，C，D 正确．]

典题 5 (1)0.004 4 (2)70 [(1)依题意及频率分布直方图知，

0．002 4×50＋0.003 6×50＋0.006 0×50＋x×50＋0.002 4×50＋0.001 2×50＝1.

解得 x＝0.004 4.

(2)样本数据落在[100，150)内的频率为 0.003 6×50＝0.18，

样本数据落在[150，200)内的频率为 0.006×50＝0.3，

样本数据落在[200，250)内的频率为 0.004 4×50＝0.22，

故在这些用户中，用电量落在区间[100，250)内的户数为(0.18＋0.30＋0.22)×100＝70.]

真题再现 B [因为直径落在区间[5.43，5.47)内的频率为 0.02×(6.25＋5.00)＝0.225，所以个数为 0.225×80＝18.]

典题 6 **解** 把 27 名女生的样本数据按从小到大排序，可得

148．0	149.0	154.0	154.0	155.0	155.0	155.5	157.0
157．0	158.0	158.0	159.0	161.0	161.0	162.0	162.5
162．5	163.0	163.0	164.0	164.0	164.0	165.0	170.0
171．0	172.0	172.0					

由 $25\%\times27=6.75$，$50\%\times27=13.5$，$75\%\times27=20.25$，可知样本数据的第 25，50，75 百分位数为第 7，14，21 项数据，分别为 155.5，161，164.

据此可以估计树人中学高一年级女生的第 25，50，75 百分位数分别约为 155.5，161 和 164.

典题 7　解　由频率分布表可知，月均用水量在 13.2 t 以下的居民用户所占比例为 $23\%+32\%+13\%+9\%=77\%$.

在 16.2 t 以下的居民用户所占的比例为 $77\%+9\%=86\%$.

因此，80%分位数一定位于[13.2，16.2)内.

由 $13.2+3\times\dfrac{0.80-0.77}{0.86-0.77}=14.2$，

可以估计月均用水量的样本数据的 80%分位数约为 14.2.

类似的，由 $22.2+3\times\dfrac{0.95-0.94}{0.98-0.94}=22.95$.

可以估计月均用水量的样本数据的 95%分位数约为 22.95.

典题 8　解　(1)频率分布直方图中，样本平均数可以用每个小矩形底边中点的横坐标与小矩形的面积的乘积之和表示，平均数近似值为 $0.077\times3\times\left(\dfrac{1.2+4.2}{2}\right)+0.107\times3\times\left(\dfrac{4.2+7.2}{2}\right)+\cdots+0.007\times3\times\dfrac{(25.2+28.2)}{2}=8.96$.

(2)根据中位数的意义，在样本中，有 50%的个体小于或等于中位数，也有 50%的个体大于或等于中位数.

因此中位数左边和右边的直方图的面积应该相等，由于 $0.077\times3=0.231$，$(0.077+0.107)\times3=0.552$，

因此中位数落在区间[4.2，7.2)内，设中位数为 x，

由 $0.077\times3+0.107\times(x-4.2)=0.5$，

得到 $x\approx6.71$，因此中位数约为 6.71.

(3)频率分布直方图中，月均用水量在区间[4.2，7.2)内的居民最多，可以将这个区间的中点 $\dfrac{4.2+7.2}{2}=5.7$ 作为众数的估计值.

典题 9　解　在(1)中，一队每场比赛平均失球数是 1.5，二队每场比赛平均失球数是 2.1，

∴平均说来一队比二队防守技术好，故(1)正确；

在(2)中，一队全年比赛失球个数的标准差为 1.1，二队全年比赛失球个数的标准差为 0.4，

∴二队比一队技术水平更稳定，故(2)正确；

在(3)中，一队全年比赛失球个数的标准差为 1.1，二队全年比赛失球个数的标准差为 0.4，

∴一队有时表现很差，有时表现又非常好，故(3)正确；

在(4)中，二队每场比赛平均失球数是 2.1，全年比赛失球个数的标准差为 0.4，

∴二队很少不失球就是二队经常失球，故(4)正确.

典题 10　C　[对于 A，当投掷骰子出现结果为 1，1，2，5，6 时，满足平均数为 3，中位数为 2，可以出现点数 6，故 A 错误；

对于 B，当投掷骰子出现结果为 2，2，3，4，6 时，满足中位数为 3，众数为 2，可以出现点数 6，故 B 错误；

对于 C，若平均数为 2，且出现 6 点，则方差 $S^2>\frac{1}{5}\times(6-2)^2=3.2>2.4$，

∴平均数为 2，方差为 2.4 时，一定没有出现点数 6，故 C 正确；

对于 D，当投掷骰子出现结果为 1，2，3，3，6 时，满足中位数为 3，平均数为$\overline{x}=\frac{1}{5}(1+2+3+3+6)=3$.

方差为 $S^2=\frac{1}{5}[(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(3-3)^2+(6-3)^2]=2.8$，可以出现点数 6，故 D 错误．]

真题再现　A　[根据题意，从 9 个原始评分中去掉 1 个最高分，1 个最低分，得到 7 个有效评分，7 个有效评分与 9 个原始评分相比，最中间的一个数不变，即中位数不变．]

典题 11　**解**　先画出散点图，观察散点图，可以看出样本点都集中在一条直线附近，由此推断脂肪含量和年龄线性相关.

根据样本相关系数的定义，

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{14}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{14}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{14}(y_i-\overline{y})^2}}$$

$=\frac{\sum_{i=1}^{14}x_iy_i-14\overline{x}\ \overline{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{14}x_i^2-14\overline{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{14}y_i^2-14\overline{y}^2}}$.①

利用计算工具计算可得

$\overline{x}\approx48.07$，$\overline{y}\approx27.26$，$\sum_{i=1}^{14}x_iy_i=19\,403.2$，

$\sum_{i=1}^{14}x_i^2=34\,181$，$\sum_{i=1}^{14}y_i^2=11\,051.77$.

代入①式，得 $r\approx$

$\frac{19\,403.2-14\times48.07\times27.26}{\sqrt{34\,181-14\times48.07^2}\times\sqrt{11\,051.77-14\times27.26^2}}\approx0.97$.

由样本相关系数 $r\approx0.97$，可以推断脂肪含量和年龄这两个变量正线性相关，且相关程度很强.

真题再现　解　(1)由已知得样本平均数$\overline{y}=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}y_i=60$，从而该地区这种野生动物数量的估计值为 $60\times200=12\,000$.

(2)样本$(x_i，y_i)(i=1，2，\cdots，20)$的相关系数

$r=\frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{20}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{800}{\sqrt{80\times9\,000}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx0.94$.

(3)分层随机抽样：根据植物覆盖面积的大小对地块分层，再对 200 个地块进行分层随机抽样.

理由如下：由(2)知各样区的这种野生动物数量与植物覆盖面积有很强的正相关性．由于各地块间植物覆盖面积差异很大，从而各地块间这种野生动物数量差异也很大，采用分层随机抽样的方法较好地保持了样本结构与总体结构的一致性，提高了样本的代表性，从而可以获得该地区这种野生动物数量更准确的估计.

典题 12　解　零假设为 H_0：疗法与疗效独立，即两种疗法效果没有差异.

将所给数据进行整理，得到两种疗法治疗数据的列联表，如下表所示.

单位：人

疗法	疗效		合计
	未治愈	治愈	
甲	15	52	67

乙	6	63	69
合计	21	115	136

根据列联表中的数据，经计算得到

$$\chi^2=\frac{136\times(15\times63-52\times6)^2}{67\times69\times21\times115}\approx4.881<7.879=x_{0.005}.$$

根据小概率值$\alpha=0.005$的独立性检验，没有充分证据推断H_0不成立，因此可以认为H_0成立，即认为两种疗法效果没有差异.

真题再现　解　(1)根据表中数据知，甲机床生产的产品中一级品的频率是$\frac{150}{200}=0.75$，乙机床生产的产品中一级品的频率是$\frac{120}{200}=0.6$.

(2)根据列联表中的数据可得

$$\chi^2=\frac{400\times(150\times80-120\times50)^2}{200\times200\times270\times130}=\frac{400}{39}$$

$\approx10.256>6.635=x_{0.01}$.

根据小概率值$\alpha=0.01$的独立性检验，认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异.此推断犯错误的概率不超过0.01.

第十章　计数原理、概率、随机变量及其分布

教材探究思考

探究1　提示：(1)$m_1+m_2+m_3$.

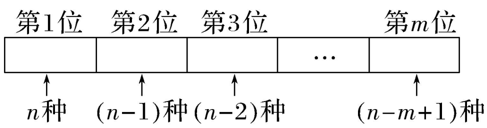
(2)假设第1类方案中有m_1种不同方法，第2类方案中有m_2种不同方法，…，第n类方案有m_n种不同方法，则一共有$m_1+m_2+\cdots+m_n$种不同方法.

探究2　提示：(1)$m_1\cdot m_2\cdot m_3$.

(2)假设做第1步有m_1种不同的方法，做第2步有m_2种不同的方法，…，做第n步有m_n种不同的方法，则一共有$m_1\cdot m_2\cdot m_3\cdot\cdots\cdot m_n$种不同的方法.

探究3　提示：求排列数A_n^m可以按依次填m个空位来考虑：

假定有排好顺序的m个空位，如图所示，从n个不同元素中取出m个元素去填空，一个空位填上一个元素，每一种填法就对应一个排列.因此，所有不同填法的种数就是排列数A_n^m.



填空可以分为 m 个步骤完成：

第 1 步，从 n 个不同元素中任选 1 个填在第 1 位，有 n 种选法；

第 2 步，从剩下的$(n-1)$个元素中任选 1 个填在第 2 位，有$(n-1)$种选法；

第 3 步，从剩下的$(n-2)$个元素中任选 1 个填在第 3 位，有$(n-2)$种选法；

……

第 m 步，从剩下的$[n-(m-1)]$个元素中任选 1 个填在第 m 位，有$(n-m+1)$种选法．

根据分步乘法计数原理，m 个空位的填法种数为

$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$．

这样，我们就得到公式

$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$．

这里，m，$n\in\mathbf{N}^*$，并且 $m\leqslant n$.这个公式叫做排列数公式．

探究 4　提示：求“从 n 个元素中取出 m 个元素的排列数 A_n^m”，可以看作由以下两个步骤得到：

第 1 步，从 n 个不同元素中取出 m 个元素作为一组，共有 C_n^m种不同的取法；

第 2 步，将取出的 m 个元素作全排列，共有 A_m^m种不同的排法．

根据分步乘法计数原理，有 $A_n^m=C_n^m\cdot A_m^m$.

因此，$C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$.

这里 n，$m\in\mathbf{N}^*$，并且 $m\leqslant n$.这个公式叫做组合数公式．

探究 5　提示：(1)我们先来分析$(a+b)^2$的展开过程．

根据多项式乘法法则，$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a(a+b)+b(a+b)=a\times a+a\times b+b\times a+b\times b=a^2+2ab+b^2$.

可以看到，$(a+b)^2$是 2 个$(a+b)$相乘，只要从一个$(a+b)$中选一项(选 a 或 b)，再从另一个$(a+b)$中选一项(选 a 或 b)，就得到展开式的一项．

于是，由分步乘法计数原理，在合并同类项之前，$(a+b)^2$的展开式共有 $C_2^1\times C_2^1=2^2$ 项，而且每一项都是 $a^{2-k}b^k(k=0，1，2)$的形式．

下面我们再来分析一下形如 $a^{2-k}b^k$ 的同类项的个数．

当 $k=0$ 时，$a^{2-k}b^k=a^2$，这是由 2 个$(a+b)$中都不选 b 得到的．

因此，a^2 出现的次数相当于从 2 个$(a+b)$中取 0 个 b(即都取 a)的组合数 C_2^0，即 a^2

只有 1 个.

当 $k=1$ 时，$a^{2-k}b^k=ab$，这是由 1 个$(a+b)$中选 a，另 1 个$(a+b)$中选 b 得到的．由于 b 选定后，a 的选法也随之确定，因此，ab 出现的次数相当于从 2 个$(a+b)$中取 1 个 b 的组合数 C_2^1，即 ab 共有 2 个.

当 $k=2$ 时，$a^{2-k}b^k=b^2$，这是由 2 个$(a+b)$中都选 b 得到的．因此，b^2 出现的次数相当于从 2 个$(a+b)$中取 2 个 b 的组合数 C_2^2，即 b^2 只有 1 个.

由上述分析可以得到$(a+b)^2=C_2^0a^2+C_2^1ab+C_2^2b^2$.

(2)$(a+b)^4=C_4^0a^4+C_4^1a^3b+C_4^2a^2b^2+C_4^3ab^3+C_4^4b^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

(3)$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

探究 6　提示：因为事件 A 与事件 B 互斥，即 A 与 B 不含有相同的样本点，所以 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$，这等价于 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

探究 7　提示：对于试验 1，因为两枚硬币分别抛掷，第一枚硬币的抛掷结果与第二枚硬币的抛掷结果互相不受影响，所以事件 A 发生与否不影响事件 B 发生的概率.

对于试验 2，因为是有放回摸球，第一次摸球的结果与第二次摸球的结果互相不受影响，所以事件 A 发生与否也不影响事件 B 发生的概率.

在试验 1 中，用 1 表示硬币“正面朝上”，用 0 表示硬币“反面朝上”，则样本空间为$\Omega=\{(1，1)，(1，0)，(0，1)，(0，0)\}$，包含 4 个等可能的样本点．而 $A=\{(1，1)，(1，0)\}$，$B=\{(1，0)，(0，0)\}$，所以 $AB=\{(1，0)\}$.

由古典概型概率计算公式，得 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$，$P(AB)=\frac{1}{4}$.

于是 $P(AB)=P(A)P(B)$.

积事件 AB 的概率 $P(AB)$恰好等于 $P(A)$与 $P(B)$的乘积.

在试验 2 中，样本空间$\Omega=\{(m，n)|m，n\in\{1，2，3，4\}\}$，而 $A=\{(1，1)，(1，2)，(1，3)，(1，4)，(2，1)，(2，2)，(2，3)，(2，4)\}$，$B=\{(1，1)，(1，2)，(2，1)，(2，2)，(3，1)，(3，2)，(4，1)，(4，2)\}$，$AB=\{(1，1)，(1，2)，(2，1)，(2，2)\}$，

所以 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$，$P(AB)=\frac{1}{4}$.

于是也有 $P(AB)=P(A)P(B)$.

积事件 AB 的概率 $P(AB)$也等于 $P(A)$，$P(B)$的乘积.

探究 8　提示：对于 A 与 $\overline{B}$，因为 $A=AB\cup A\overline{B}$，而且 AB 与 $A\overline{B}$ 互斥，所以 $P(A)=P(AB\cup A\overline{B})=P(AB)+P(A\overline{B})=P(A)P(B)+P(A\overline{B})$，

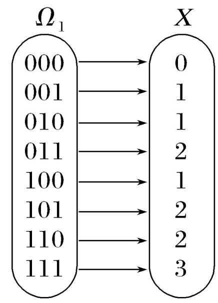
所以 $P(A\overline{B})=P(A)-P(A)P(B)=P(A)(1-P(B))=P(A)P(\overline{B})$.

由事件的独立性定义，A 与 $\overline{B}$ 相互独立.

类似地，可以证明事件 $\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都相互独立.

探究 9　提示：对于试验 1，

如果用 0 表示“元件为合格品”，1 表示“元件为次品”，用 0 和 1 构成的长度为 3 的字符串表示样本点，则样本空间 $\Omega_1=\{000，001，010，011，100，101，110，111\}$.

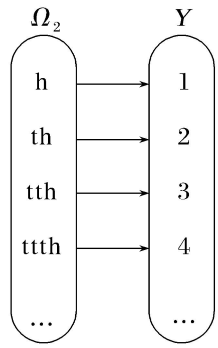


各样本点与变量 X 的值的对应关系如图所示.

对于试验 2，如果用 h 表示“正面朝上”，t 表示“反面朝上”，例如用 tth 表示第 3 次才出现“正面朝上”，则样本空间 $\Omega_2=\{$h，th，tth，ttth，…$\}$，

Ω_2 包含无穷多个样本点.

各样本点与变量 Y 的值的对应关系如图所示.



在上面两个随机试验中，每个样本点都有唯一的一个实数与之对应. 变量 X，Y 有如下共同点：

(1)取值依赖于样本点；

(2)所有可能取值是明确的.

探究 10　提示：设 X 的分布列为 $P(X=x_i)=p_i$，$i=1，2，…，n$.

根据随机变量均值的定义，

$E(X+b)=(x_1+b)p_1+(x_2+b)p_2+\cdots+(x_n+b)p_n$

$=(x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n)+b(p_1+p_2+\cdots+p_n)$

$=E(X)+b$.

类似地，可以证明 $E(aX)=aE(X)$.

$E(aX)=ax_1p_1+ax_2p_2+\cdots+ax_np_n$

$=a(x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n)=aE(X)$.

同理，$E(aX+b)=aE(X)+b$.

探究 11　提示：离散型随机变量 X 加上一个常数 b，仅仅使 X 的值产生一个平移，不改变 X 与其均值的离散程度，方差保持不变，即 $D(X+b)=D(X)$.

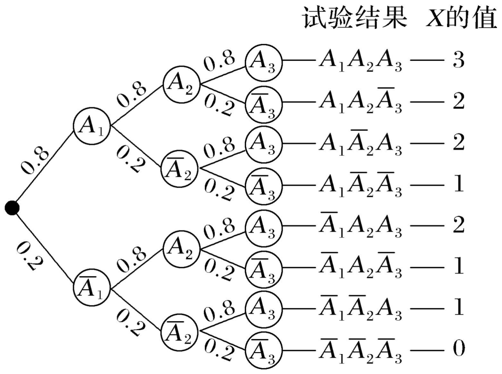
而离散型随机变量 X 乘以一个常数 a，其方差变为原方差的 a^2 倍，即 $D(aX)=a^2D(X)$.

一般地，可以证明下面的结论成立：$D(aX+b)=a^2D(X)$.

而期望性质中 $E(X+b)=E(X)+b$，$E(aX)=aE(X)$，

$E(aX+b)=aE(X)+b$.

探究 12　提示：用 A_i 表示“第 i 次射击中靶”($i=1$，2，3)，用如图的树状图表示试验的可能结果.



由分步乘法计数原理，3 次独立重复试验共有 $2^3=8$ 种可能结果，它们两两互斥，每个结果都是 3 个相互独立事件的积.

由概率的加法公式和乘法公式得

$P(X=0)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=0.2^3$，

$P(X=1)=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=3\times0.8\times0.2^2$，

$P(X=2)=P(A_1A_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)$

$=3\times0.8^2\times0.2$，

$P(X=3)=P(A_1A_2A_3)=0.8^3$.

为了简化表示，每次射击用 1 表示中靶，用 0 表示脱靶，那么 3 次射击恰好 2 次中靶的所有可能结果可表示为 011，110，101，这三个结果发生的概率都相等，均为 $0.8^2\times0.2$，并且与哪两次中靶无关.

因此，3 次射击恰好 2 次中靶的概率为 $C_3^2\times0.8^2\times0.2$.同理可求中靶 0 次、1 次、3 次的概率.

于是，中靶次数 X 的分布列为 $P(X=k)=C_3^k\times0.8^k\times0.2^{3-k}$，$k=0$，1，2，3.

探究 13 提示：X 均值为 $E(X)=np$，X 的方差为 $D(X)=np(1-p)$.

教材典题重温

典题 1 解 (1)$7\times6\times6\times6\times6\times6\times6=326\ 592$.

(2)令 $N=2\ 160=2^4\times3^3\times5^1$，

∴2 160 的正因数为 $P=2^{\alpha}\times3^{\beta}\times5^{\gamma}$，

其中$\alpha=0$，1，2，3，4，$\beta=0$，1，2，3，$\gamma=0$，1，

∴2 160 的正因数共有 $5\times4\times2=40$ 个.

典题 2 解 (1)可以先从这 5 盘菜中取 1 盘给同学甲，然后从剩下的 4 盘菜中取 1 盘给同学乙，最后从剩下的 3 盘菜中取 1 盘给同学丙.

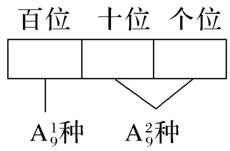
按分步乘法计数原理，不同的取法种数为 $5\times4\times3=60$.

(2)可以先让同学甲从 5 种菜中选 1 种，有 5 种选法；

再让同学乙从 5 种菜中选 1 种，也有 5 种选法；

最后让同学丙从 5 种菜中选 1 种，同样有 5 种选法．按分步乘法计数原理，不同的选法种数为 $5\times5\times5=125$.

典题 3 解 如图所示，由于三位数的百位上的数字不能是 0，所以可以分两步完成：第 1 步，确定百位上的数字，可以从 1～9 这 9 个数字中取出 1 个，有 A_9^1种取法；



第 2 步，确定十位和个位上的数字，可以从剩下的 9 个数字中按顺序取出 2 个，有 A_9^2种取法.

根据分步乘法计数原理，所求的三位数的个数为 $A_9^1\times A_9^2=9\times9\times8=648$.

典题 4 解 (1)①0，2，4，6 中不选 0 时，有 C_3^3种选法，从 1，3，5 中任取 2 个数字，有 C_3^2种选法，共有 $C_3^3\times C_3^2\times A_5^5=360$(个)；②0，2，4，6 中选 0 时，有 C_3^2种选法，从 1，3，5 中任取 2 个数字，有 C_3^2种选法，0 不能放首位，共有 $C_3^2\times C_3^2\times C_4^1\times A_4^4=864$(个)，综上，一共可以组成 $360+864=1\ 224$ 个没有重复数字的五位数.

(2)要求数字比 5 000 000 大，当首位数字从 5，6 选一位，其他的任意排.

故有 $C_2^1A_6^6=1\ 440$ 种.

真题再现 1 260 [若取的 4 个数字不包括 0，则可以组成的四位数的个数为 $C_5^2C_3^2A_4^4$；若取的 4 个数字包括 0，则可以组成的四位数的个数为 $C_5^2C_3^1C_3^1A_3^3$.综上，一共可以组成的没有重复数字的四位数的个数为 $C_5^2C_3^2A_4^4+C_5^2C_3^1C_3^1A_3^3=720+540$

$=1\,260$.]

典题 5 解 (1)$(1-2x)^5(1+3x)^4$的展开式按 x 的升幂排列的第 3 项，即展开式中含 x^2 的项为 $C_4^2(3x)^2+C_5^2(-2x)^2+C_5^1\cdot(-2x)\cdot C_4^1\cdot(3x)=-26x^2$.

(2)$\left(9x+\dfrac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$展开式的通项公式为

$T_{r+1}=C_{18}^r\cdot(9x)^{18-r}\cdot\left(\dfrac{1}{3\sqrt{x}}\right)^r=3^{36-3r}\cdot C_{18}^r\cdot x^{18-\frac{3}{2}r}$，

令 $18-\dfrac{3}{2}r=0$ 可得 $r=12$，

故展开式的常数项为 $C_{18}^{12}=C_{18}^6$.

(3)展开式中含 x^4 项的来源是：第 1 个因式取 1，第 2 个因式取 $C_{10}^4(-x)^4$；第 1 个因式取 x，第 2 个因式取 $C_{10}^3(-x)^3$；第 1 个因式取 x^2，第 2 个因式取 $C_{10}^2(-x)^2$.

故 $C_{10}^4(-x)^4+x\cdot C_{10}^3(-x)^3+x^2C_{10}^2(-x)^2=135x^4$，

故 x^4 的系数为 135.

(4)$(x^2+x+y)^5=[(x^2+x)+y]^5$

展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r(x^2+x)^{5-r}y^r$，取 $r=2$，即 $T_3=C_5^2(x^2+x)^3y^2$.

$(x^2+x)^3$ 展开式的通项公式为 $T_{k+1}=C_3^k(x^2)^{3-k}x^k=C_3^kx^{6-k}$，

取 $k=1$，$T_2=C_3^1x^5=3x^5$，

$\therefore x^5y^2$ 的系数为 $3C_5^2=30$.

真题再现 (1)A (2)240 (3)C [(1)展开式中含 x^3 的项可以由“1 与 x^3”和“$2x^2$ 与 x”的乘积组成，则 x^3 的系数为 $1\times C_4^3+2C_4^1=12$.

(2)$\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^6$的展开式的通项为

$T_{r+1}=C_6^r(x^2)^{6-r}\cdot\left(\dfrac{2}{x}\right)^r=C_6^r2^rx^{12-3r}$，

令 $12-3r=0$，解得 $r=4$，得常数项为 $C_6^42^4=240$.

(3)当 $x+\dfrac{y^2}{x}$中取 x 时，x^3y^3 的系数为 C_5^3，

当 $x+\dfrac{y^2}{x}$中取$\dfrac{y^2}{x}$时，x^3y^3 的系数为 C_5^1，

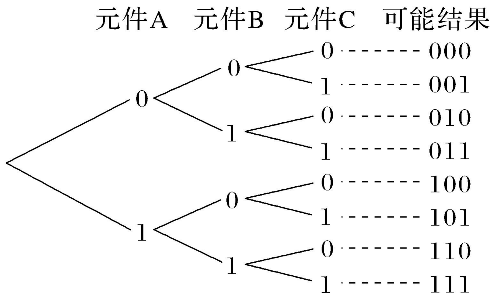
$\therefore x^3y^3$ 的系数为 $C_5^3+C_5^1=10+5=15$.]

典题 6 解 (1)分别用 x_1，x_2 和 x_3 表示元件 A，B 和 C 的可能状态，则这个电路

的工作状态可用$(x_1，x_2，x_3)$表示．

进一步地，用1表示元件的“正常”状态，用0表示“失效”状态，则样本空间$\Omega=\{(0，0，0)，(1，0，0)，(0，1，0)，(0，0，1)，(1，1，0)，(1，0，1)，(0，1，1)，(1，1，1)\}$．

如图，还可以借助树状图帮助我们列出试验的所有可能结果．



(2)“恰好两个元件正常”等价于$(x_1，x_2，x_3)\in\Omega$，且$x_1，x_2，x_3$中恰有两个为1，所以$M=\{(1，1，0)，(1，0，1)，(0，1，1)\}$．

“电路是通路”等价于$(x_1，x_2，x_3)\in\Omega$，$x_1=1$，且$x_2，x_3$中至少有一个是1，所以$N=\{(1，1，0)，(1，0，1)，(1，1，1)\}$．

同理，“电路是断路”等价于$(x_1，x_2，x_3)\in\Omega$，$x_1=0$，或$x_1=1$，$x_2=x_3=0$.

所以$T=\{(0，0，0)，(0，1，0)，(0，0，1)，(0，1，1)，(1，0，0)\}$．

典题7　解　因为样本空间$\Omega=\{(m，n)|m，n\in\{1，2，3，4\}，且\ m\neq n\}$，

$A=\{(1，2)，(1，3)，(1，4)，(2，1)，(2，3)，(2，4)\}$，

$B=\{(1，2)，(2，1)，(3，1)，(3，2)，(4，1)，(4，2)\}$，

所以$P(A)=P(B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$，$P(AB)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

此时$P(AB)\neq P(A)P(B)$，因此，事件A与事件B不独立．

真题再现　B　[事件甲发生的概率$P(甲)=\frac{1}{6}$，事件乙发生的概率$P(乙)=\frac{1}{6}$，事件丙发生的概率$P(丙)=\frac{5}{6\times6}=\frac{5}{36}$，事件丁发生的概率$P(丁)=\frac{6}{6\times6}=\frac{1}{6}$.事件甲与事件丙是互斥事件，不是相互独立事件，故A错误；事件甲与事件丁同时发生的概率为$\frac{1}{6\times6}=\frac{1}{36}$，$P(甲丁)=P(甲)P(丁)$，故B正确；事件乙与事件丙同时发生的概率为$\frac{1}{6\times6}=\frac{1}{36}$，$P(乙丙)\neq P(乙)P(丙)$，故C错误；事件丙与事件丁是互斥事件，

不是相互独立事件，故 D 错误．]

典题 8　解　(1)设从 10 篇课文中随机抽 3 篇该同学能背诵的篇数为 X, 则 X 可取 0，1，2，3，且服从超几何分布．

$P(X=0)=\frac{C_6^0C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$，$P(X=1)=\frac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$，

$P(X=2)=\frac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$，$P(X=3)=\frac{C_6^3C_4^0}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$.

∴X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

(2)该同学能及格，表示他能背诵 2 篇或 3 篇，故概率为 $P(X\geqslant 2)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

典题 9　解　(1)X 的取值分别为 1，2，3，

$P(X=1)=0.6$, $P(X=2)=(1-0.6)\times 0.7=0.28$, $P(X=3)=(1-0.6)\times(1-0.7)=0.12$，

∴X 的分布列为

X	1	2	3
P	0.6	0.28	0.12

(2)李明在一年内领到资格证书的概率为 $1-(1-0.6)\times(1-0.7)\times(1-0.8)=0.976$.

典题 10　解　各种方案在不同状态下的总损失如下表所示

		天气状况		
		大洪水	小洪水	没有洪水
概率		0.01	0.25	0.74
总损失/元	方案 1	3 800	3 800	3 800
	方案 2	62 000	2 000	2 000
	方案 3	60 000	10 000	0

设方案 1、方案 2、方案 3 的总损失分别为 X_1，X_2，X_3.

采用方案 1，无论有无洪水，都损失 3 800 元．

因此，$P(X_1=3\,800)=1$.

采用方案 2，遇到大洪水时，总损失为 $2\,000+60\,000=62\,000$ 元；没有大洪水时，

总损失为 2 000 元.

因此，$P(X_2=62\,000)=0.01$，$P(X_2=2\,000)=0.99$.

采用方案 3，$P(X_3=60\,000)=0.01$，$P(X_3=10\,000)=0.25$，$P(X_3=0)=0.74$.

于是，$E(X_1)=3\,800$，$E(X_2)=62\,000\times0.01+2\,000\times0.99=2\,600$，$E(X_3)=60\,000\times0.01+10\,000\times0.25+0\times0.74=3\,100$.

因此，从期望损失最小的角度，应采取方案 2.

真题再现　解　(1)由题意得，X 的所有可能取值为 0，20，100，

$P(X=0)=1-0.8=0.2$，

$P(X=20)=0.8\times(1-0.6)=0.32$，

$P(X=100)=0.8\times0.6=0.48$，

所以 X 的分布列为

X	0	20	100
P	0.2	0.32	0.48

(2)当小明先回答 A 类问题时，由(1)可得

$E(X)=0\times0.2+20\times0.32+100\times0.48=54.4$.

当小明先回答 B 类问题时，记 Y 为小明的累计得分，

则 Y 的所有可能取值为 0，80，100，

$P(Y=0)=1-0.6=0.4$，

$P(Y=80)=0.6\times(1-0.8)=0.12$，

$P(Y=100)=0.6\times0.8=0.48$，

所以 Y 的分布列为

Y	0	80	100
P	0.4	0.12	0.48

$E(Y)=0\times0.4+80\times0.12+100\times0.48=57.6$.

因为 $57.6>54.4$，即 $E(Y)>E(X)$，所以为使累计得分的期望最大，小明应选择先回答 B 类问题.

典题 11　解　(1)股票 A 和股票 B 投资收益的期望分别为

$E(X)=(-1)\times0.1+0\times0.3+2\times0.6=1.1$，

$E(Y)=0\times0.3+1\times0.4+2\times0.3=1$.

因为 $E(X)>E(Y)$，所以投资股票 A 的期望收益较大.

(2)股票A和股票B投资收益的方差分别为

$D(X)=(-1)^2\times0.1+0^2\times0.3+2^2\times0.6-1.1^2=1.29$，

$D(Y)=0^2\times0.3+1^2\times0.4+2^2\times0.3-1^2=0.6$.

因为$E(X)$和$E(Y)$相差不大，且$D(X)>D(Y)$，所以投资股票A比投资股票B的风险高.

典题12　解　设A=“向右下落”，则$\overline{A}$=“向左下落”，且$P(A)=P(\overline{A})=0.5$.

因为小球最后落入格子的号码X等于事件A发生的次数，而小球在下落的过程中共碰撞小木钉10次，所以$X\sim B(10，0.5)$.

于是，X的分布列为$P(X=k)=C_{10}^{k}\times0.5^{10}$，$k=0，1，2，\cdots，10$.

典题13　解　采用3局2胜制，不妨设赛满3局，用X表示3局比赛中甲胜的局数，则$X\sim B(3，0.6)$.

甲最终获胜的概率为$p_1=P(X=2)+P(X=3)=C_3^2\times0.6^2\times0.4+C_3^3\times0.6^3=0.648$.

采用5局3胜制，不妨设赛满5局，用X表示5局比赛中甲胜的局数，则$X\sim B(5，0.6)$.

甲最终获胜的概率为$p_2=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=C_5^3\times0.6^3\times0.4^2+C_5^4\times0.6^4\times0.4+C_5^5\times0.6^5=0.682\ 56$.

因为$p_2>p_1$，所以5局3胜制对甲有利.

实际上，比赛局数越多，对实力较强者越有利.

典题14　解　(1)记X为击中目标的次数，则$X\sim B(10，0.3)$，恰好击中目标3次的概率为

$P(X=3)=C_{10}^{3}\times0.3^3\times0.7^7\approx0.267$.

(2)目标被击中的次数$X\sim B(n，0.3)$，

目标至少被击中一次可以表示为$\{X>0\}$，它的对立事件是$\{X=0\}$，

所以“目标至少被击中一次”的概率为

$P(X>0)=1-P(X=0)=1-(1-0.3)^n$.

为使目标被击中的概率超过95%，需使$1-(1-0.3)^n>95\%$，解得$n>8.4$.

根据实际意义，至少需要9门大炮才能使目标至少被击中一次的概率超过95%.

典题15　解　因为$\mu=75$，$\sigma=8$.

$$P(X>\mu+\sigma)=\frac{1-P（\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma）}{2}\approx\frac{1-0.682\ 7}{2}\approx0.16=16\%，$$

所以 A 等级的分数线为$\mu+\sigma=75+8=83$分以上.

$P(\mu\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)=P(X\geqslant\mu)-P(X\geqslant\mu+\sigma)\approx0.5-0.16=0.34=34\%$，

所以 B 等级的分数线为$[\mu，\mu+\sigma)$，

即[75，83).

同理可得，C 等级分数线为[67，75)，D 等级的分数线为 67 分以下.

典题 16　解　记第 n 次传球后球在甲手中的概率为 $P(n)$，则第 $n-1$ 次传球后球在甲手中的概率为 $P(n-1)$，开始时球在甲手中，则 $P(0)=1$.

若第 n 次传球后球在甲手中，则第 $n-1$ 次传球后球不在甲手中，即第 $n-1$ 次传球后球在乙或丙手中，所以第 $n-1$ 次传球后球不在甲手中的概率为 $1-P(n-1)$，

又乙或丙在第 n 次把球传到甲手上的概率为$\frac{1}{2}$，

于是有$\frac{1}{2}[1-P(n-1)]=P(n)$，

即 $P(n)=-\frac{1}{2}P(n-1)+\frac{1}{2}$，

所以 $P(n)-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left[P(n-1)-\frac{1}{3}\right]$，

所以$\left\{P(n)-\frac{1}{3}\right\}$是首项为 $P(1-1)-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列，

所以 $P(n)-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$，所以 $P(n)=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}$.

典题 17　解　(1)设每个人需要的化验次数为 X.

若混合血样呈阴性，则 $X=\frac{1}{5}$；

若混合血样呈阳性，则 $X=\frac{6}{5}$.

因此，X 的分布列为 $P\left(X=\frac{1}{5}\right)=0.95^5$，

$P\left(X=\frac{6}{5}\right)=1-0.95^5$.

$E(X)=\frac{1}{5}[0.95^5+6\times(1-0.95^5)]\approx0.426\ 2$.

说明每 5 个人一组，平均每个人需要化验 0.426 2 次，10 000 个人大约需要化验 4

262 次，新的化验方法能减少化验次数.

(2)假设 k 个人一组，设每个人需要的化验次数为 Y.

若混合血样呈阴性，则 $Y=\frac{1}{k}$;

若混合血样呈阳性，则 $Y=1+\frac{1}{k}$.

因此，Y 的分布列为 $P\left(X=\frac{1}{k}\right)=0.98^k$,

$P\left(X=1+\frac{1}{k}\right)=1-0.98^k$.

$E(Y)=\frac{1}{k}[0.98^k+(k+1)\times(1-0.98^k)]=\frac{1}{k}+(1-0.98^k)$.

利用计算器或计算机，对 k 取 1，2，3，…逐一计算$\frac{1}{k}+1-0.98^k$，发现当 k 取 8 时，$E(Y)$取到最小值 0.274 2.

此时，10 000 个人大约需要化验 2 742 次.