武汉市 2026 届高三年级五月供题

数学试卷参考答案及评分标准

2026.5

选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
答案	B	C	C	B	D	D	B	D	ACD	AD	BCD

填空题：

12. $\frac{1}{3}$　　13. $\sqrt{2}$　　14. $\frac{1}{3}$

解答题：

15.（13 分）

解：

（1）由余弦定理得：$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC}=\sqrt{4+1-2\times2\times1\times(-\frac{1}{2})}=\sqrt{7}$，

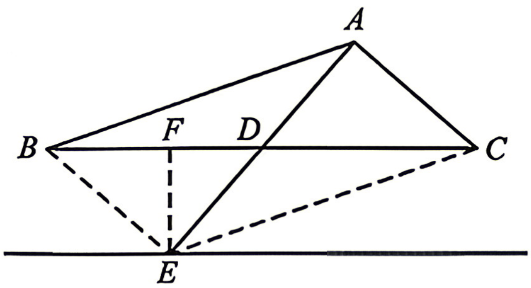
$\because$ 延长 AD 至点 E，使得 $AD=DE$，$\therefore$ E 到 BC 的距离为定值，且与 A 到 BC 的距离相等，

又$\because$ $\triangle BEC$ 与 $\triangle ABC$ 的底边相同，$\therefore$ $S_{\triangle BEC}=S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times AC\times\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

设 E 在 BC 边上的高为 h，则 $h=\frac{2S_{\triangle BEC}}{BC}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，

即 E 在平行于 BC 且距离为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$ 的直线上运动.

过 E 作 $EF\perp BC$ 于 F，设 $BF=\frac{\sqrt{7}}{2}+x$，$CF=\frac{\sqrt{7}}{2}-x$，$\angle BEF=\beta$，$\angle CEF=\gamma$，则 $\angle BEC=\beta+\gamma$.



由正切定义：$\tan\beta=\dfrac{BF}{h}=\dfrac{\frac{\sqrt{7}}{2}+x}{\frac{\sqrt{21}}{7}}$，$\tan\gamma=\dfrac{CF}{h}=\dfrac{\frac{\sqrt{7}}{2}-x}{\frac{\sqrt{21}}{7}}$，

$\therefore \tan\angle BEC=\tan(\beta+\gamma)=\dfrac{\tan\beta+\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma}=\dfrac{28\sqrt{3}}{28x^2-37}$，

令 $u=28x^2-37$，则 $\tan\angle BEC=\dfrac{28\sqrt{3}}{u}$，

可得 $\cos\angle BEC=\dfrac{u}{\sqrt{u^2+(28\sqrt{3})^2}}=\dfrac{u}{\sqrt{u^2+2352}}$，令函数 $f(u)=\dfrac{u}{\sqrt{u^2+2352}}$，

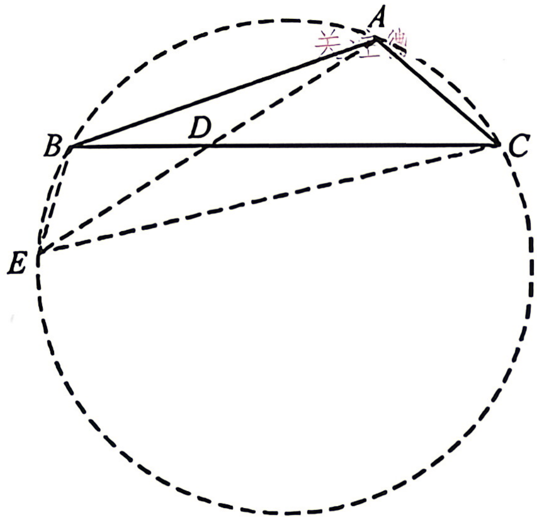
可知 $f(u)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，而 $u=28x^2-37\geqslant-37$，即 u 的最小值为 -37，

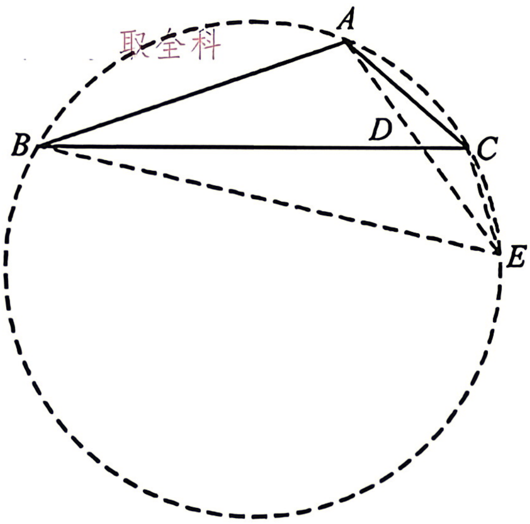
故当 $u=-37$（即 $x=0$，E 在 BC 中垂线上）时，$\cos\angle BEC$ 取得最小值，

$\therefore \cos\angle BEC_{\min}=\dfrac{-37}{\sqrt{(-37)^2+2352}}=-\dfrac{37}{61}$. …………6 分

（2）$\because$ 在四边形 $ABCE$ 中，$\angle BAC=\dfrac{2\pi}{3}$，$\angle BEC=\dfrac{\pi}{3}$，有 $\angle BAC+\angle BEC=\pi$，

$\therefore A,B,C,E$ 四点共圆，则在四边形 $ABCE$ 中有 $BD\cdot CD=AD\cdot DE=AD^2$，





设 $BD=t$，则 $CD=\sqrt{7}-t$，

在 $\triangle ABD$ 中，$\cos\angle ADB=\dfrac{AD^2+BD^2-AB^2}{2\cdot AD\cdot BD}=\dfrac{AD^2+BD^2-4}{2\cdot AD\cdot BD}$，

在 $\triangle ACD$ 中，$\cos\angle ADC=\dfrac{AD^2+CD^2-AC^2}{2\cdot AD\cdot CD}=\dfrac{AD^2+CD^2-1}{2\cdot AD\cdot CD}$，

$\because \cos\angle ADB=\cos(\pi-\angle ADC)$，$\therefore \cos\angle ADB+\cos\angle ADC=0$，

则 $\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=\dfrac{AD^2+BD^2-4}{2\cdot AD\cdot BD}+\dfrac{AD^2+CD^2-1}{2\cdot AD\cdot CD}=\dfrac{AD^2+BD^2-4}{BD}+\dfrac{AD^2+CD^2-1}{CD}$

$$=\frac{t(\sqrt{7}-t)+t^2-4}{t}+\frac{t(\sqrt{7}-t)+(\sqrt{7}-t)^2-1}{\sqrt{7}-t}=\sqrt{7}-\frac{4}{t}+\frac{6-\sqrt{7}t}{\sqrt{7}-t}=0,$$

整理得 $2\sqrt{7}t^2-17t+4\sqrt{7}=0$,解得 $t=\dfrac{17\sqrt{7}\pm\sqrt{455}}{28}$,

$\therefore$ BD 的长为$\dfrac{17\sqrt{7}+\sqrt{455}}{28}$或$\dfrac{17\sqrt{7}-\sqrt{455}}{28}$. …………13 分

16.(15 分)

解:

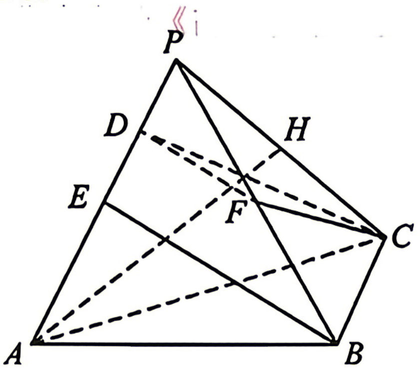
(1)$\because$ E,F,H 分别为 AP,BP,CP 的中点,

$\therefore$ 有 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HP})-\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{BE}$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FP})-\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CF}+\frac{1}{8}\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BE}\quad ①,$$

而 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BE}$,代入①得:$\overrightarrow{AB}=\frac{4}{7}\overrightarrow{AH}-\frac{6}{7}\overrightarrow{BE}+\frac{2}{7}\overrightarrow{CF}$. …………4 分

(2)取 EP 的中点 D,连接 DF,DC.



$\because$ D 为 EP 的中点,F 为 BP 的中点,$\therefore$ $DF/\!/BE$.

又$\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{2}{3}$,故 $ME/\!/DC$.

又 $DF,DC\subset$平面 DFC,$ME,BE\subset$平面 BME,$DF\cap DC=D$,$ME\cap BE=E$,

$\therefore$ 平面 $DFC/\!/$平面 BME,

$\therefore$ $CF/\!/$平面 BEM. …………9 分

(3)$\because$ $CF/\!/$平面 BEM,故存在直线 $l\subset$平面 BEM,$CF/\!/l$,

又 $CF\perp AH$,$\therefore$ $AH\perp l$,

又 $AH\perp BE$,BE 与 l 不平行,$\therefore$ $AH\perp$平面 BEM,即 $\overrightarrow{AH}$ 是平面 BEM 的一个法向量,

设平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}=\lambda\overrightarrow{AH}+\mu\overrightarrow{BE}+\gamma\overrightarrow{CF}$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$,

又 $\overrightarrow{AB}=\frac{4}{7}\overrightarrow{AH}-\frac{1}{7}\overrightarrow{BE}+\frac{2}{7}\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{BC}=\frac{4}{7}\overrightarrow{BE}-\frac{1}{7}\overrightarrow{CF}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AH}$,

故可取 $\lambda=\frac{1}{|\overrightarrow{AH}|^2}$, $\mu=\frac{1}{|\overrightarrow{BE}|^2}$, $\gamma=\frac{1}{|\overrightarrow{CF}|^2}$.

此时 $|\cos\theta|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AH}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{AH}|}=\frac{1}{|\overrightarrow{AH}|^2\cdot\sqrt{\frac{1}{|\overrightarrow{AH}|^2}+\frac{1}{|\overrightarrow{BE}|^2}+\frac{1}{|\overrightarrow{CF}|^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{|\overrightarrow{AH}|^2}{|\overrightarrow{BE}|^2}+\frac{|\overrightarrow{AH}|^2}{|\overrightarrow{CF}|^2}}}$

$=\frac{1}{\sqrt{3+\frac{|\overrightarrow{CF}|^2}{|\overrightarrow{BE}|^2}+\frac{|\overrightarrow{BE}|^2}{|\overrightarrow{CF}|^2}}}\leqslant\frac{\sqrt{5}}{5}$,当且仅当 $|\overrightarrow{CF}|=|\overrightarrow{BE}|$ 时取等,

则 $|\sin\theta|=\sqrt{1-\cos^2\theta}\geqslant\frac{2\sqrt{5}}{5}$,又 $\because\ \theta\in(0,\frac{\pi}{2}]$, $\therefore\ \sin\theta\geqslant\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

即平面 ABC 与平面 BEM 所成角的正弦值的最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. …………15 分

17. (15 分)

解:

(1) 设 $A(2\cos\theta,\sin\theta)$,则 $B(-2\cos\theta,-\sin\theta)$,

已知右顶点 $M(2,0)$,下顶点 $N(0,-1)$,

直线 AM 的其方程为: $y=\frac{\sin\theta}{2\cos\theta-2}(x-2)=-\frac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}(x-2)$,

直线 BN 的方程为: $y+1=\frac{-1+\sin\theta}{2\cos\theta}x$,得 $y=\frac{\sin\theta-1}{2\cos\theta}x-1$,

设 $t=\tan\frac{\theta}{2}$,则 $\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $1-\cos\theta=\frac{2t^2}{1+t^2}$, $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{1}{t}$, $\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta}=\frac{t-1}{t+1}$,

代入方程得 $-\frac{1}{t}(x-2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{t-1}{t+1}x-1$,

两边乘以 $2t(t+1)$ 整理得: $-(t+1)(x-2)=t(t-1)x-2t(t+1)$,

联立两直线方程解交点 $Q(x,y)$ 为: $x=\frac{2(t+1)^2}{t^2+1}$, $y=\frac{1}{2}\cdot\frac{t-1}{t+1}x-1=-\frac{2}{t^2+1}$,

由于 $t^2+1=\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$,可得 $y=-2\cos^2\frac{\theta}{2}=-(1+\cos\theta)$, $x=2(t+1)^2\cos^2\frac{\theta}{2}=2(1+\sin\theta)$,

因此 Q 的参数方程为：$x=2(1+\sin\theta)$，$y=-(1+\cos\theta)$，

由$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{x}{2}-1\\ \cos\theta=-y-1\\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1\end{cases}$，可得$(\dfrac{x}{2}-1)^2+(-y-1)^2=1$，即$\dfrac{(x-2)^2}{4}+(y+1)^2=1$，

$\because$ $\cos\theta\in[-1,1]$，

$\therefore$ Q 点的轨迹方程为$\dfrac{(x-2)^2}{4}+(y+1)^2=1$ 且不过$(2,-2)$和$(4,-1)$两点.

…………9 分

(2) 由 $A(2\cos\theta,\sin\theta)$，$B(-2\cos\theta,-\sin\theta)$，$Q(2(1+\sin\theta),-(1+\cos\theta))$，

可得$\triangle ABQ$ 面积：$S_{\triangle ABQ}=|x_Q\sin\theta-y_Q\cdot 2\cos\theta|$，

代入坐标得：$S_{\triangle ABQ}=|2(1+\sin\theta)\sin\theta-(-(1+\cos\theta))\cdot 2\cos\theta|$

$=2|(1+\sin\theta)\sin\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta|=2|\sin\theta+\sin^2\theta+\cos\theta+\cos^2\theta|$

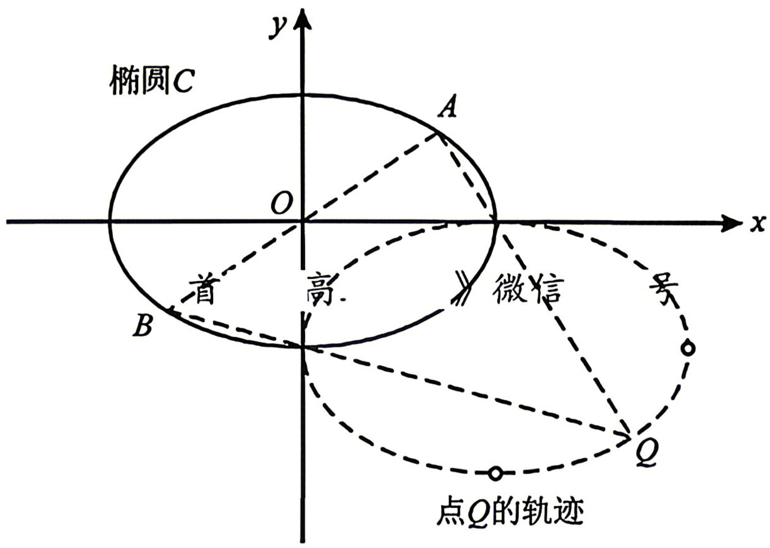
$=2|1+\sin\theta+\cos\theta|$，

$\because$ $1+\sin\theta+\cos\theta=1+\sqrt{2}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})$，其取值范围为$[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}]$，

$\therefore$ $S_{\triangle ABQ}$ 的最大值为 $1+\sqrt{2}$（当 $\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})=1$ 时，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$时取到），

$\therefore$ $S_{\triangle ABQ\max}=2(1+\sqrt{2})=2+2\sqrt{2}$.

…………15 分



18.（17 分）

解：

(1)

(ⅰ) p_1 表示已连续不中 1 次后最终成功的概率，则下一步投篮：

$\begin{cases}\text{投中(概率 }p\text{),则变为连续中 1 次,成功概率为 }q_1,\\ \text{投不中(概率 }1-p\text{),则连续不中次数变为 2,即达到 }n=2\text{,失败,成功概率为 0,}\end{cases}$

因此 $p_1=p\cdot q_1+(1-p)\cdot 0=pq_1$,代入 $p=\frac{2}{3}$ 得 $p_1=\frac{2}{3}q_1$. …………3 分

(ⅱ)记 $q_i(i=0,1,2)$ 为已连续投中 i 次后最终成功的概率,$q_3=1$;$p_j(j=0,1)$ 为已连续不中 j 次后最终成功的概率,$p_2=0$,

由题意:$\begin{cases}q_2=p\cdot 1+(1-p)p_1=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}p_1,\\ q_1=pq_2+(1-p)p_1=\frac{2}{3}q_2+\frac{1}{3}p_1,\\ p_1=\frac{2}{3}q_1,\end{cases}$

将 $p_1=\frac{2}{3}q_1$ 代入 q_2 得 $q_2=\frac{2}{3}+\frac{2}{9}q_1$,再代入 q_1:

$q_1=\frac{2}{3}(\frac{2}{3}+\frac{2}{9}q_1)+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}q_1=\frac{4}{9}+\frac{4}{27}q_1+\frac{2}{9}q_1=\frac{4}{9}+\frac{10}{27}q_1$,

移项:$q_1-\frac{10}{27}q_1=\frac{4}{9}$,即 $\frac{17}{27}q_1=\frac{4}{9}$,解得 $q_1=\frac{12}{17}$,于是 $p_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{12}{17}=\frac{8}{17}$,

初始状态(尚未投篮,连续中 0 次)的成功概率为 q_0.

$q_0=pq_1+(1-p)p_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{12}{17}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{17}=\frac{24}{51}+\frac{8}{51}=\frac{32}{51}$.

故该同学成功的概率为 $\frac{32}{51}$. …………9 分

(2)设 $q_i(i=0,1,\cdots,m-1)$ 为已连续中 i 次后最终成功概率,$q_m=1$;$p_j(j=1,\cdots,n-1)$ 为已连续不中 j 次后最终成功概率,$p_n=0$. 递推关系:

$\begin{cases}\text{对 }i=0,\cdots,m-1\text{,有 }q_i=pq_{i+1}+(1-p)p_1\text{. 特别地,}q_{m-1}=p\cdot 1+(1-p)p_1,\\ \text{对 }j=1,\cdots,n-1\text{,有 }p_j=pq_1+(1-p)p_{j+1}\text{. 特别地,}p_{n-1}=pq_1,\end{cases}$

先解 p_1,由 $p_{n-1}=pq_1$ 及递推 $p_j=pq_1+(1-p)p_{j+1}$ 得:

$p_1=pq_1\sum_{k=0}^{n-2}(1-p)^k=pq_1\cdot\frac{1-(1-p)^{n-1}}{p}=q_1[1-(1-p)^{n-1}]$.

记 $\alpha=1-(1-p)^{n-1}$,则 $p_1=\alpha q_1$,

再解 q_i. 由 $q_i=pq_{i+1}+(1-p)\alpha q_1$ 及 $q_m=1$,作变换 $q_i-\alpha q_1=p(q_{i+1}-\alpha q_1)$,故:

$q_i=\alpha q_1+p^{m-i}(1-\alpha q_1)$,$i=0,1,\cdots,m-1$,

取 $i=1$ 得 $q_1=\alpha q_1+p^{m-1}(1-\alpha q_1)$,解出:$q_1=\frac{p^{m-1}}{1-\alpha(1-p^{m-1})}=\frac{p^{m-1}}{p^{m-1}+(1-p)^{n-1}(1-p^{m-1})}$,

于是 $p_1=\alpha q_1$，进而：$q_0=\alpha q_1+p^m(1-\alpha q_1)=p^m+(1-p^m)\alpha q_1$，

代入 α 和 q_1 化简：$q_0=\dfrac{p^{m-1}(1-(1-p)^n)}{p^{m-1}+(1-p)^{n-1}(1-p^{m-1})}$，

所以初始状态（连续中 0 次）的成功概率为：$\dfrac{p^{m-1}(1-(1-p)^n)}{p^{m-1}+(1-p)^{n-1}(1-p^{m-1})}$. …………17 分

19.（17 分）

解：

(1) $f(1)=e^a-ae$，

令 $g(a)=e^a-ae$，$g'(a)=e^a-e$，故 $g(a)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

$g(a)\geqslant g(1)=0$，故 $f(1)\geqslant 0$. …………3 分

(2) ①$a>0$ 时，

$x\geqslant 2$ 时，$f(x)\leqslant e^{\frac{a}{2}}-ae^x+ae$，令 $h(x)=e^{\frac{a}{2}}-ae^x+ae$.

取 $x_0=\max\{2,\ln(\dfrac{e^{\frac{a}{2}}+ae}{a}+1)\}$，故 $e^{x_0}\geqslant\dfrac{e^{\frac{a}{2}}+ae}{a}+1$，

故 $h(x_0)\leqslant -a<0$，矛盾.

②$a=0$ 时，$f(x)=1$，符合.

③$a<0$ 时，

$x>0$ 时，利用 $e^x\geqslant ex$，

$f(x)>-ae^x-ae^{\frac{2}{x}-1}+ae\geqslant -aex-ae\cdot\dfrac{2}{x}+ae+ae=-ae(x+\dfrac{2}{x}-2)\geqslant -ae(2\sqrt{2}-2)$ 无零点.

$x<0$ 时，$f'(x)=-\dfrac{a}{x^2}e^{\frac{a}{x}}-ae^x+\dfrac{2a}{x^2}e^{\frac{2}{x}-1}$，

$$\begin{cases}\dfrac{a}{x}>0\\ \dfrac{2}{x}-1<-1\\ -ae^x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{a}{x^2}e^{\frac{a}{x}}>-\dfrac{a}{x^2}\\ \dfrac{2a}{x^2}e^{\frac{2}{x}-1}>\dfrac{2a}{ex^2}\\ -ae^x>0\end{cases}\Rightarrow f'(x)>\dfrac{(2-e)a}{ex^2}>0$$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增，

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a(e-e^{-1})+1\geqslant 0\Rightarrow a\geqslant\dfrac{e}{1-e^2}$，

综上，$a\in[\dfrac{e}{1-e^2},0]$. …………9 分

(3) ①由题(2)，$a\in[-\dfrac{e}{e^2-1},0]$ 时，无零点.

②当 $x<0$ 时,若 $a>0$,则 $f(x)=e^{\frac{a}{x}}+a(e-e^{x}-e^{\frac{2}{x}-1})>0$,故没有零点.

若 $a<-\dfrac{e}{e^{2}-1}$,则 $f'(x)=a(\dfrac{2e^{\frac{2}{x}-1}-e^{\frac{a}{x}}}{x^{2}}-e^{x})>0$,从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增.

且 $x\to-\infty$ 时,$f(x)\to1+a\cdot\dfrac{e^{2}-1}{e}<0$,当 $x\to0$ 时,$f(x)\to+\infty>0$,

故此时在 $(-\infty,0)$ 上有 1 个零点.

③当 $x>0$ 时,若 $a\leqslant0$,则 $f(x)=-a(e^{x}+e^{\frac{2}{x}-1})+ae+e^{\frac{a}{x}}>0$,从而无零点.

接下来对 $x>0,a>0$ 的情况详细讨论:

$f'(x)=a(\dfrac{2e^{\frac{2}{x}-1}-e^{\frac{a}{x}}}{x^{2}}-e^{x})$,令 $\dfrac{1}{x}=t$,

则 $f'(x)=at^{2}(2e^{2t-1}-e^{at}-\dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t^{2}})$,令 $H(t)=2e^{2t-1}-e^{at}-\dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t^{2}}$.

(ⅰ)当 $0<a<1$ 时,

若 $0<x<1$,则 $t>1$,故 $H(t)>2e^{2t-1}-e^{t}-\dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t^{2}}=(e^{2t-1}-e^{t})+(e^{2t-1}-\dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t^{2}})>0$.

若 $x>1$,则 $0<t<1$,此时 $H'(t)=4e^{2t-1}-ae^{at}+\dfrac{2e^{\frac{1}{t}}}{t^{3}}+\dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t^{4}}>4e^{2t-1}-e^{t}+\dfrac{2e^{\frac{1}{t}}}{t^{3}}+\dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t^{4}}>0$.

又 $H(1)=e-e^{a}>0$,$t\to0$ 时,$H(t)\to-\infty$,故存在 $t_0\in(0,1)$,$H(t_0)=0$.

故 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{t_0})$ 单调递增,$(\dfrac{1}{t_0},+\infty)$ 单调递减.

又 $f(\dfrac{1}{t_0})>f(1)\geqslant0$,$x\to0$ 时 $f(x)\to-\infty$,$x\to+\infty$ 时 $f(x)\to+\infty$,

故此时有两个零点.

(ⅱ)当 $a=1$ 时,$f(x)=e^{\frac{1}{x}}-e^{x}-e^{\frac{2}{x}-1}+e$,令 $H(t)=2e^{2t-1}-e^{t}-\dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t^{2}}$.

由(ⅰ)的分析,此时 $t_0=1$,$f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增,$(1,+\infty)$ 单调递减,

$f(x)\leqslant f(1)=0$,故仅有一零点.

(ⅲ)当 $a\in(1,2)$ 时,完全同理(ⅰ)的分析,此时有两个零点.

(ⅳ)当 $a\geqslant2$ 时,若 $0<x\leqslant1$,则 $t\geqslant1$,此时 $at\geqslant2t>t$,故 $2e^{2t-1}-e^{at}\leqslant(2-e)e^{2t-1}<0$,

从而 $H(t)<0$,$f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减,无零点.

若 $x>1$,则 $t<1$,此时仍有 $H(t)<0$,$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减,仅有一零点.

综上:$a\in[\dfrac{e}{1-e^{2}},0]$ 时无零点;$a\in(-\infty,\dfrac{e}{1-e^{2}})\cup\{1\}\cup[2,+\infty)$ 时有 1 个零点;

$a\in(0,1)\cup(1,2)$ 时有 2 个零点. …………17 分