Z20⁺名校联盟（浙江省名校新高考研究联盟）2026 届高三第三次学情诊断

数学参考答案

一、单项选择题

1	2	3	4	5	6	7	8
C	B	A	D	B	C	A	B

二、多项选择题

9	10	11
BD	ABD	BCD

三、填空题

12．4　　13．$\sqrt{2}-1$　　14．$\left(\dfrac{17}{4},0\right)$

四、解答题

15．（1）$\tan B=\dfrac{\sin B}{\cos B}=\dfrac{\sin A}{2\cos B-\cos A}$，即 $\sin A\cos B=2\sin B\cos B-\cos A\sin B$，

化简可得 $\sin(A+B)=\sin 2B=\sin C$.

若 $B=\dfrac{\pi}{4}$，$\sin 2B=1=\sin C$，此时 $C=\dfrac{\pi}{2}$，$A=\dfrac{\pi}{4}$.

$S_{\triangle ABC}=2$--6 分

（2）由 $\sin 2B=\sin C$ 可得 $2B=C$ 或 $2B+C=\pi$.

①若 $2B+C=\pi$，由 $A+B+C=\pi$ 可得 $A=B$，与条件矛盾；

②若 $2B=C$，则 $A=\pi-3B>B$，解得 $0<B<\dfrac{\pi}{4}$.则 $\cos B\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

$\cos C-3\cos B=\cos 2B-3\cos B=2\cos^2 B-3\cos B-1=2\left(\cos B-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{17}{8}\in\left[-\dfrac{17}{8},-2\right)$----13 分

16．（1）由渐近线方程为 $y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$ 得 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

左顶点 A 坐标为 $(-a,0)$，则点 A 到渐近线的距离 $d=\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}a}{\sqrt{1+\frac{5}{4}}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{5}$，

解得 $a=2,b=\sqrt{5},c=3$

双曲线 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$.--6 分

（2）设点 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

过点 F 的直线 $l:x=ty+3$，与双曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 联立，

化简得 $(5t^2-4)y^2+30ty+25=0$

根据韦达定理，可得$\begin{cases} y_1 y_2 = \dfrac{25}{5t^2-4} \\ y_1 + y_2 = \dfrac{-30t}{5t^2-4} \end{cases}$ --9 分

点 A 坐标为 $(-2,0)$

直线 $AM: y = \dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$ 与直线 $x=1$ 的交点 P 坐标为 $\left(1, \dfrac{3y_1}{x_1+2}\right)$，同理可得点 $Q\left(1, \dfrac{3y_2}{x_2+2}\right)$.---11 分

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{\frac{3y_1}{x_1+2}}{1-3} \cdot \frac{\frac{3y_2}{x_2+2}}{1-3} = \frac{9y_1y_2}{4(x_1+2)(x_2+2)} = \frac{9y_1y_2}{4(ty_1+5)(ty_2+5)}$$

$$= \frac{9y_1y_2}{4\left[t^2y_1y_2 + 5t(y_1+y_2) + 25\right]} = -\frac{9}{16}$$ --15 分

17.（1）证明：当 $n=1$ 时，$S_1 = 2\sqrt{S_1} - 1$，解得 $a_1 = S_1 = 1$.

当 $n \geq 2$ 时，$S_n > S_1 = 1$

$S_{n-1} = 2\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \cdots + \sqrt{S_{n-1}}\right) - (n-1)$.

与 $S_n = 2\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \cdots + \sqrt{S_n}\right) - n$ 作差可得：$S_n - S_{n-1} = 2\sqrt{S_n} - 1$，则 $S_{n-1} = \left(\sqrt{S_n} - 1\right)^2$.

$\because S_n > S_1 = 1,$

$\therefore \sqrt{S_n} - 1 = \sqrt{S_{n-1}}$.

即数列 $\left\{\sqrt{S_n}\right\}$ 是等差数列.--6 分

（2）$\sqrt{S_n} = \sqrt{S_1} + n - 1 = n$

$S_n = n^2$

当 $n \geq 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n-1$

$\because a_1 = 1,$

$\therefore a_n = 2n-1\left(n \in \mathbf{N}^*\right)$.--9 分

$$\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}} \cdot 2^n = \frac{2n-1}{(2n+1)(2n+3)} \cdot 2^n = \frac{2(2n+1)-(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} \cdot 2^n = \frac{2^{n+1}}{2n+3} - \frac{2^n}{2n+1}.$$

$$T_n = \left(\frac{2^{n+1}}{2n+3} - \frac{2^n}{2n+1}\right) + \cdots + \left(\frac{2^2}{5} - \frac{2}{3}\right) = \frac{2^{n+1}}{2n+3} - \frac{2}{3}$$ ---15 分

18．（1）$\triangle ABC$ 的外心为 AB 中点 O_1，$\triangle ACP$ 的外心为 CP 中点 O_2，

取线段 AC 中点 E，则 $\angle O_1EO_2 = \dfrac{\pi}{2}$. $EO_1 = EO_2 = \dfrac{1}{2}$

设三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心为点 O，则 $OO_1\perp$ 平面 ABC， $OO_2\perp$ 平面 ACP，$OO_1=OO_2=\frac{1}{2}$.

$R^2=OO_1^{\ 2}+\left(\frac{AB}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

$S=4\pi R^2=3\pi$ --5 分

（2）以点 A 为原点，$\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AC}$ 的方向为 x,y 轴正方向，建立空间直角坐标系.

$B(1,1,0),C(0,1,0)$，设二面角 $P-AC-B$ 的平面角为 α，则 $P(\cos\alpha,0,\sin\alpha)$.

$\overrightarrow{AP}=(\cos\alpha,0,\sin\alpha),\overrightarrow{AC}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{BP}=(\cos\alpha-1,-1,\sin\alpha)$

设平面 ACP 的法向量为 $\overrightarrow{m_1}$，平面 ACN 的法向量为 $\overrightarrow{m_2}$，

由 $\overrightarrow{m_1}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{m_1}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

解得 $\overrightarrow{m_1}=(\sin\alpha,0,-\cos\alpha)$.

由平面 $ACP\perp$ 平面 ACN，可得 $\overrightarrow{m_1}\cdot\overrightarrow{m_2}=0$，解得 $\overrightarrow{m_2}=(\cos\alpha,0,\sin\alpha)$.

点 N 为线段 PB 上靠近点 B 的三等分点，可得

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BP}=(1,1,0)+\frac{1}{3}(\cos\alpha-1,-1,\sin\alpha)=\left(\frac{2+\cos\alpha}{3},\frac{2}{3},\frac{\sin\alpha}{3}\right)$

由 $\overrightarrow{m_2}\cdot\overrightarrow{AN}=0$，解得 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$

即二面角 $P-AC-B$ 的平面角为 $\frac{2}{3}\pi$.--8 分

此时 $\overrightarrow{AN}=\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$，$\overrightarrow{m_1}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{1}{2}\right)$

点 N 到平面 ACP 的距离 $d=\frac{\left|\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{m_1}\right|}{\left|\overrightarrow{m_1}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ --11 分

（3）已知 $\overrightarrow{BP}=(\cos\alpha-1,-1,\sin\alpha)$，点 B 横坐标为 1.

点 M 在平面 yCz 上，所以点 M 横坐标为 0.

可得 $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{\cos\alpha-1}\overrightarrow{PB}$.

设 $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BP}=(1,1,0)+\lambda(\cos\alpha-1,-1,\sin\alpha)=(\lambda\cos\alpha-\lambda+1,1-\lambda,\lambda\sin\alpha)(0<\lambda<1)$，

由（2）得平面 ACN 的法向量 $\overrightarrow{m_2}=(\cos\alpha,0,\sin\alpha)$.

由 $\overrightarrow{m_2}\cdot\overrightarrow{AN}=0$，解得 $\lambda=\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-1}$

即 $\overrightarrow{BN}=\lambda\overrightarrow{BP}=\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-1}\overrightarrow{BP}=\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\overrightarrow{PB}$.

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BM}=\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\overrightarrow{PB}-\frac{1}{\cos\alpha-1}\overrightarrow{PB}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\overrightarrow{PB}$

根据条件$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{PB}$，得$\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1}{4}$，解得$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$

在翻折过程中，存在$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{PB}$，此时平面$ACP$与平面$ABC$所成角的余弦值为$\frac{3}{5}$

-------------------------------17 分

19. （1）当$a=1$时，$f(x)=\frac{x+1}{e^x}$，求导可得$f'(x)=\frac{-x}{e^x}$

函数$f(x)$在$(-\infty,0)$单调递增，在$[0,+\infty)$单调递减.

函数有最大值$f(0)=1$，无最小值. ---5 分

（2）函数$y=f(x)-f(-x)$是奇函数，$x=0$始终是方程$f(x)=f(-x)$的一个解.

不妨令$x>0$，

$f(x)=\frac{x+a}{e^x}=f(-x)=(-x+a)e^x$，可化简为$x+a+(x-a)e^{2x}=0$

构造函数$g(x)=(x-a)e^{2x}+x+a$，

求导可得$g'(x)=(2x-2a+1)e^{2x}+1$，$g''(x)=4(x-a+1)e^{2x}$

$g'(0)=2-2a$，$g(0)=0$

① 当$a\le 1$，$g''(x)=4(x-a+1)e^{2x}>4(1-a)e^{2x}\ge 0$恒成立，因此$g'(x)$在$(0,+\infty)$单调递增.

故$g'(x)>g'(0)\ge 0$，$g(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，故$g(x)>g(0)=0$.

即方程$f(x)=f(-x)$在$(0,+\infty)$无解.

根据函数$y=f(x)-f(-x)$是奇函数可知在$(-\infty,0)$也无解-------------------------------------8 分

② 当$a>1$，由$g''(x)=4(x-a+1)e^{2x}$，可得$g'(x)$在$(0,a-1)$单调递减，在$[a-1,+\infty)$单调递增.

由$g'(0)=2-2a<0$，$g'(a-1)<0$，$g'\left(a-\frac{1}{2}\right)=1$可得，存在$x_0\in\left(a-1,a-\frac{1}{2}\right)$使$g'(x_0)=0$.

当$x\in(0,x_0)$，$g(x)$单调递减；当$x\in(x_0,+\infty)$，$g(x)$单调递增.

$g(0)=0$，$g(a)=2a>0$，函数$g(x)$在$(a-1,a)$有一个零点.

即方程$f(x)=f(-x)$在$(a-1,a)$有一个解.

根据函数$y=f(x)-f(-x)$是奇函数可知在$(-a,1-a)$有另一个根. ----------------------11 分

综上，当$a\le 1$，方程有一个解；当$a>1$，方程有三个解.

（3）由（2）可得此时$a>1$，且$x_1+x_2=0,-a<x_1<1-a$.

$f'(x)=\frac{1-x-a}{e^x}$，$f'(x_1)>0>f'(x_2)$.

即证：$f'(x_1)+f'(-x_1)>0$.

因为x_1是方程$f(x)=\frac{x+a}{e^x}=f(-x)=(-x+a)e^x$的解，代入可得$a=\frac{e^{2x_1}+1}{e^{2x_1}-1}\cdot x_1$.

$$f'(x_1)+f'(-x_1)=\frac{1-x_1-a}{e^{x_1}}+(1+x_1-a)e^{x_1}=\frac{\left(e^{2x_1}+1\right)(1-a)+\left(e^{2x_1}-1\right)x_1}{e^{x_1}}$$

消 a 可得 $f'(x_1)+f'(-x_1)=\dfrac{e^{4x_1}-4e^{2x_1}x_1-1}{e^{x_1}\left(e^{2x_1}-1\right)}$

设 $h(x)=e^{4x}-4e^{2x}\cdot x-1(x<0)$， $h(0)=0$

$h'(x)=4e^{4x}-4(2x+1)e^{2x}=4e^{2x}\left(e^{2x}-2x-1\right)>0$

函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增，所以 $h(x_1)=e^{4x_1}-4e^{2x_1}x_1-1<h(0)=0$.

又因为 $e^{x_1}\left(e^{2x_1}-1\right)<0$，

所以 $f'(x_1)+f'(-x_1)>0$.--17 分