《浙江省新高考研究卷》数学（二）

第 I 卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $A=\left\{x\left|\sqrt{x}<2\right.\right\}$， $B=\left\{x\left|\ln x>0\right.\right\}$，则 $A\cap B=$

A．$\left\{x\left|0\leqslant x<1\right.\right\}$　　B．$\left\{x\left|1<x<2\right.\right\}$

C．$\left\{x\left|0\leqslant x<4\right.\right\}$　　D．$\left\{x\left|1<x<4\right.\right\}$

2．已知复数 $z=2+\dfrac{2}{\mathrm{i}}$，则 $z\cdot\overline{z}=$

A．-8　　B．0　　C．8　　D．8i

3．在 $\triangle ABC$ 中， $AB=3$， $AC=4$， $BC=\sqrt{13}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$

A．6　　B．-6　　C．$6\sqrt{3}$　　D．$-6\sqrt{3}$

4．已知正三棱台的体积为 $\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$，其上下底面的边长分别为 1 和 2，则这个正三棱台侧面积为

A．$\dfrac{\sqrt{39}}{4}$　　B．$\dfrac{\sqrt{39}}{2}$

C．$\dfrac{3\sqrt{39}}{4}$　　D．$\sqrt{39}$

5．已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个焦点为 $F(\sqrt{6},0)$，直线 $x=m$ 与椭圆 Γ 交于 M，N 两点，$\triangle MNF$ 的周长的最大值为 $8\sqrt{2}$，则 C 的离心率为

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

6．已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足：$a_1=a$， $a_2=2-a$， $a_{n+2}=2a_n+1$，记 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_{2n}=$

A．$2^{n+2}-2n-4$　　B．$2^{n+1}-2$

C．$2^{n+3}-2n-4$　　D．$2^{2n+1}-2n-4$

7．已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}2^x, & x\leqslant a,\\ \dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{1}{2}, & a<x\leqslant 3,\end{cases}$ 若 $f\left(x\right)$ 的值域为 $\left[0,2\right]$，则实数 a 的取值范围是

A．$\left[-1,1\right]$　　B．$\left[-1,1\right)$　　C．$\left[0,1\right)$　　D．$\left(1,3\right)$

8．定义在 $\left(0,+\infty\right)$ 上的函数 $f\left(x\right)$ 满足：对 $\forall x_1$， $x_2\in\left(0,+\infty\right)$，且 $x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{x_2f\left(x_1\right)-x_1f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}>0$ 成立，则

A．$f\left(1\right)+f\left(2\right)<f\left(3\right)$　　B．$f\left(1\right)+f\left(2\right)>f\left(3\right)+f\left(4\right)$

C．$f\left(2\right)+f\left(3\right)<f\left(4\right)$　　D．$f\left(1\right)+f\left(2\right)<f\left(3\right)+f\left(4\right)$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对得部分分，有选错的得 0 分。

9．若函数 $f\left(x\right)=\sin\left(x+\varphi\right)\ \left(0<\varphi<\pi\right)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 对称，则

A．$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$

B．$f\left(x\right)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增

C．函数 $g\left(x\right)=2\left|f\left(x\right)\right|+f\left(x\right)$ 的值域为 $\left[0,3\right]$

D．$y=f\left(x\right)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位可以得到 $y=\cos x$ 的图象

10．已知点 P 为圆 C：$\left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2=8$ 上任意一点，点 $A\left(3,2\right)$，$B\left(5,2\right)$

A．$\left|AP\right|\in\left[2\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right),2\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\right]$

B．直线 AB 与圆 C 没有公共点

C．过点 A 的直线 l 与圆 C 交于 M，N 两点，若 $\triangle CMN$ 为直角三角形，则直线 l 方程为 $3x-4y-1=0$

D．$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\in\left[0,48\right]$

11．在等腰 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=\sqrt{3},\angle BAC=120°$，点 D 满足 $2\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$，将 $\triangle BAD$ 沿 AD 折到 $\triangle B'AD$ 的位置，设二面角 $B'-AD-C$ 为 α，则以下结论正确的是

A．当 $B'D\perp CD$ 时，$\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$

B．当 $\alpha=90°$ 时，$AC\perp B'D$

C．当 $\alpha=120°$ 时，三棱锥 $B'-ADC$ 的外接球半径 $R=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

D．当 $\alpha=90°$ 时，$B'C$ 与平面 ADC 所成的角最大

第Ⅱ卷

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12．数据 13，9，18，12，27，17，21，31 的上四分位数是___▲___.

13．已知 $f\left(x\right)=x+\dfrac{4}{x}$，若对任意的 $x\in\left[1,\mathrm{e}\right]$，$f\left(x\right)\geqslant\dfrac{m}{x}-\ln x$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是___▲___.

14．在平面四边形 $ABCD$ 中，两对角线交于 O 点且互相垂直，$OE\perp AD$，$AD=2$，$OE=OB=OC$，则四边形 $ABCD$ 面积的取值范围是___▲___.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．（13 分）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=t\ (t\neq1)$，$a_n=2-\dfrac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant2)$，令$b_n=\dfrac{1}{a_n-1}$．

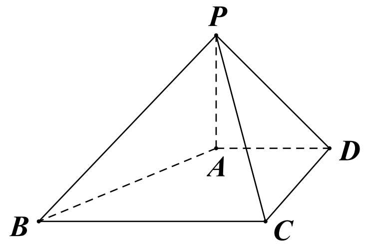
（1）证明：数列$\{b_n\}$是等差数列；

（2）已知数列$\{b_n\}$的前 n 项和为S_n，若$S_n\geqslant S_{2026}$对$\forall n\in\mathbf{N}^*$恒成立，求实数 t 的取值范围．

16．（15 分）如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$平面 $ABCD$，$AD\,//\,BC$，$AP=AD=2$，$AB=BC=4$，直线 PC 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为$\dfrac{1}{2}$．

（1）求证：$CD\perp$平面 PAD；

（2）求平面 PBC 与平面 PAD 的夹角的余弦值．



第 16 题图

17．（15 分）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的短轴长为 2，点 $P\left(2,1\right)$ 在双曲线 C 上．

（1）求双曲线 C 的方程；

（2）若直线 l 交双曲线 C 于 A，B 两点，直线 PA，PB 的斜率分别为 k_1，k_2，且 $k_1+k_2=4k_1k_2$，求证：直线 l 过定点，并求出该定点的坐标．

18．（17 分）已知函数 $f(x)=\left(x+a\right)\cos x$，$g\left(x\right)=x-\dfrac{x^3}{2}$．

（1）若 $a=0$，求证：当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$f\left(x\right)>g\left(x\right)$；

（2）若 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上存在两个极值点 x_1，$x_2\ \left(x_1<x_2\right)$，

（i）求实数 a 的取值范围；

（ii）若 $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=0$，求 $f'\left(x_1+x_2\right)$ 的值．

19．（17 分）甲、乙两人进行乒乓球练习，每个球胜者得 1 分，负者得 0 分．设每个球甲胜概率为 $p\left(\dfrac{1}{2}<p<1\right)$，乙胜的概率为 q，$p+q=1$，且各球的胜负相互独立．对正整数 $k\geqslant 2$，记 p_k 为打完 k 个球后甲比乙至少多得 2 分的概率，q_k 为打完 k 个球后乙比甲至少多得 2 分的概率．

（1）若对任意正整数 m，$p_{2m}<p_{2m+2}$ 恒成立，求 p 的取值范围；

（2）求证：对任意正整数 m，$p_{2m}+q_{2m}<p_{2m+2}+q_{2m+2}$，$p_{2m+1}+q_{2m+1}<p_{2m+3}+q_{2m+3}$；

（3）若存在正整数 m，使 $p_{2m}+q_{2m}<p_{2m+3}+q_{2m+3}<p_{2m+2}+q_{2m+2}$ 成立，求 p 的取值范围．