2026 年高考模拟卷　数学

参考答案、提示及评分细则

（一）

1. A　因为 $2+\frac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=2+\frac{(2+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}=2+\mathrm{i}$，所以复数 $2+\frac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$ 在复平面内对应的点为 $(2,1)$，位于第一象限，故选 A.

2. C　令 $2x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $x=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}k\pi,k\in\mathbf{Z}$，令 $k=-1$，得 $x=-\frac{\pi}{4}$，故选 C.

3. C　直线 $y=\pm2$ 与圆 $x^2+(y+1)^2=9$ 共有 3 个交点，所以 $A\cap B$ 共有 3 个元素，子集有 8 个，故选 C.

4. B　因为 $f(x)=x^3+\frac{a}{x^2}$，所以 $f'(x)=3x^2-\frac{2a}{x^3}$，因为 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线过原点，所以 $f'(1)=\frac{f(1)}{1}$，即 $3-2a=1+a$，所以 $a=\frac{2}{3}$，故选 B.

5. A　由 D 是 AC 的中点得 $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+2y\overrightarrow{AD}$，因为 B,H,D 三点共线，所以 $x+2y=1(x>0,y>0)$，所以 $x^2+y^2=(1-2y)^2+y^2=5y^2-4y+1=5\left(y-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}\geqslant\frac{1}{5}$，当且仅当 $x=\frac{1}{5},y=\frac{2}{5}$ 时取等号，故 x^2+y^2 的最小值为 $\frac{1}{5}$，故选 A.

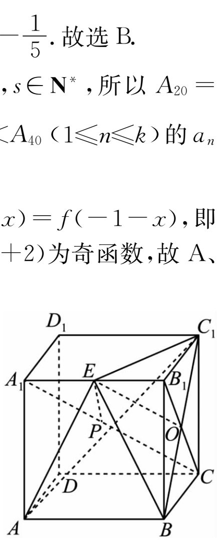
6. D　因为 $x^5=y^7=9$，所以 $x,y\in(1,+\infty)$，且 $5\ln x=7\ln y=\ln 9$，$\ln x-\ln y=\frac{\ln 9}{5}-\frac{\ln 9}{7}>0$，则 $\frac{x}{y}>1$，所以 $x>y>1$，$z=\log_x y<1$，所以 $z<y<x$，故选 D.

7. B　因为 $2\alpha+\beta=(\alpha+\beta)+\alpha,\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$，所以 $2\cos(\alpha+\beta+\alpha)=3\cos(\alpha+\beta-\alpha)$.
$2\cos(\alpha+\beta+\alpha)=2[\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha-\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha]=2\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha-2\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$，
$3\cos(\alpha+\beta-\alpha)=3[\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha]=3\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+3\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$.
所以 $2\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha-2\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=3\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+3\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$，
即 $5\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=-\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha$. 所以 $\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha}=-\frac{1}{5}$，即 $\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha=-\frac{1}{5}$. 故选 B.

8. D　因为 A_{10} 不在这组数据中，所以 $0.1k$ 为整数，则 k 为 10 的正整数倍，设 $k=10s,s\in\mathbf{N}^*$，所以 $A_{20}=\frac{a_{2s}+a_{2s+1}}{2}=\frac{2s+2s+1}{2}=2s+\frac{1}{2}$，$A_{40}=\frac{a_{4s}+a_{4s+1}}{2}=\frac{4s+4s+1}{2}=4s+\frac{1}{2}$，满足 $A_{20}<a_n<A_{40}(1\leqslant n\leqslant k)$ 的 a_n 的个数为 $2s$ 个，所以 $2s=10,s=5,k=50$，故选 D.

9. ABC　由题意知：$f(-x-1)+f(x+1)=0$ 且 $f(-x+1)+f(x+1)=0$，$\therefore f(1-x)=f(-1-x)$，即 $f(x-1)=f(x+1)$，可得 $f(x)=f(x+2)$，$\therefore f(x)$ 是周期为 2 的函数，且 $f(x-1)$、$f(x+2)$ 为奇函数，故 A、B 正确，D 错误；由上知 $f(x+1)=f(x+3)$，即 $f(x+3)$ 为奇函数，C 正确. 故选 ABC.

10. BCD　对于 A，假设存在，则 B,B_1,E,P 四点共面，而点 P 不在平面 BB_1E 内，故 A 错误；
对于 B，因为 $BC\parallel AD$，所以 $BC\parallel$ 平面 AED，所以当 P 是直线 A_1C 与平面 AED 的交点时就满足要求，故 B 正确；
对于 C，因为 A_1B_1 的中点 E 在平面 PBE 内，所以点 A_1 与点 B_1 到平面 PBE 的距离总相等，故 C 正确；
对于 D，连接 B_1C，交 BC_1 于 O，则 O 为 B_1C 中点，所以 $EO\parallel A_1C$，又 $EO\subset$ 平面 BC_1E，$A_1C\not\subset$ 平面 BC_1E，所以 $A_1C\parallel$ 平面 BC_1E，所以点 P 到平面 BC_1E 的距离为定值，又 $\triangle BC_1E$ 的面积为定值，从而三棱锥 $P-BC_1E$ 的体积为定值，即三棱锥 C_1-PBE 的体积为定值，故 D 正确. 故选 BCD.



11. BC　当 $x>0$ 时曲线 C 化为 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$，当 $x<0$ 时曲线 C 化为 $y^2-\frac{x^2}{a^2}=1$，它们的渐近线都是 $y=\pm\frac{1}{a}x$.
对于 A，因为 $a=1,-2<-\frac{1}{a}$，$y=-2x$ 与 C 的公共点在第二象限，A 错误；$y=2x$ 与 C 没有公共点，则

$\frac{1}{a}=2,a=\frac{1}{2}$,B正确;对于C,直线 $y=-2$ 与 C 有2个公共点,C正确;对于D,直线 $y=kx$ 与 C 最多有1个公共点,D错误,故选BC.

12. 4　由 $|AF|=|EF|$ 得 $2+\frac{p}{2}=p,p=4,y_0^2=16,|y_0|=4$.

13. 5　$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{24}$ 的通项为 $T_{r+1}=C_{24}^r x^{\frac{24-r}{3}}x^{-\frac{r}{2}}=C_{24}^r x^{8-\frac{5}{6}r}$,其中 $r=0,1,2,\cdots,24$,r 的取值只需满足 $8-\frac{5}{6}r\in\mathbf{Z}$,则 $r=0,6,12,18,24$,即有理项共有5项.

14. 120°　由正弦定理得 $(c-1)c=2(a+b)$,所以 $a+b=\frac{1}{2}(c^2-c)$,①

由 $c+2b-2a+3=0$ 得 $a-b=\frac{1}{2}(c+3)$,②

由①②得 $2b=\frac{1}{2}c^2-c-\frac{3}{2},2a=\frac{1}{2}c^2+\frac{3}{2}$.

由②知 $a-b=\frac{1}{2}(c+3)>0$,所以 $a>b$.

由 $2b=\frac{1}{2}c^2-c-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(c+1)(c-3)>0$ 得 $c>3$,

则 $a-c=\frac{1}{4}c^2+\frac{3}{4}-c=\frac{1}{4}(c-1)(c-3)>0$,所以 $a>c$,故边 a 最大,则角 A 最大.

由①×②得 $b^2-a^2=-\frac{1}{4}c(c-1)(c+3)$,

由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{c^2-\frac{1}{4}c(c-1)(c+3)}{c(\frac{1}{2}c^2-c-\frac{3}{2})}=\frac{-\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{2}c+\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}c^2-c-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}$,

又 $A\in(0,180°)$,所以 $A=120°$,故△ABC 的最大内角的度数为120°.

15. 解:(1)因为 $\{a_n\}$ 的公差为 -3,

所以 $a_2=a_1-3,a_3=a_1-6$,…… 2分

代入 $1+\sqrt{a_1a_3}=-a_2$,得 $1+\sqrt{a_1^2-6a_1}=-a_1+3$,

解得 $a_1=-2$,…… 5分

所以 $a_n=-2+(n-1)(-3)=-3n+1$. …… 7分

(2)由(1)得 $a_1=-2,a_3=-8,b_1=-32$,…… 9分

所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 -32,公比为4的等比数列, …… 11分

所以 $S_n=\frac{-32(1-4^n)}{1-4}=\frac{32-2^{2n+5}}{3}$. …… 13分

16. 解:(1)点击新闻的210名用户中有120名是由算法 A 推荐的,故 p 的估计值为 $\frac{120}{210}=\frac{4}{7}$. …… 2分

(2)零假设 H_0:用户点击行为与算法类型无关联, …… 3分

根据列联表中的数据,得 $\chi^2=\frac{300\times(120\times60-30\times90)^2}{150\times150\times210\times90}=\frac{100}{7}>10.828$, …… 5分

依据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验,可以推断 H_0 不成立,

所以用户点击行为与算法类型有关联. …… 7分

(3)因为300名用户中点击新闻的有210人,未点击新闻的有90人,

按照是否点击新闻分组,采用按比例分配的分层随机抽样,从中抽取10人,

则点击新闻的用户抽取7人,未点击新闻的用户抽取3人, …… 9分

X 的可能取值为0,1,2,3.

$P(X=0)=\frac{C_7^0C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120},P(X=1)=\frac{C_7^1C_3^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{40},P(X=2)=\frac{C_7^2C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{21}{40}$,

$P(X=3)=\frac{C_7^3C_3^0}{C_{10}^3}=\frac{7}{24}$, …… 13分

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{120}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{24}$

………………………………………………………… 14 分

所以 $E(X)=1\times\frac{7}{40}+2\times\frac{21}{40}+3\times\frac{7}{24}=\frac{21}{10}$. ………………………… 15 分

17.(1)证明:由题意可得 $\triangle BB_1D$ 是边长为 2 的正三角形,

设 $AC\cap BD=O$,则 $OB_1\perp BD$,且 $OB_1=\sqrt{3}$, ………………………… 2 分

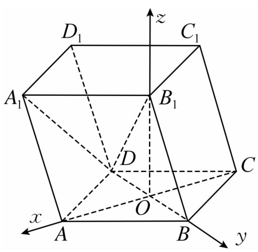
因为四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的高为 $\sqrt{3}$,

所以点 B_1 到平面 ABD 的距离为 $\sqrt{3}$, ………………………… 3 分

所以 $OB_1\perp$ 平面 ABD. ………………………… 4 分

因为 $OB_1\subset$ 平面 BB_1D,

所以平面 $ABD\perp$ 平面 BB_1D. ………………………… 5 分



(2)解:由题意可得 OA,OB,OB_1 两两垂直,且 $OA=OB_1=\sqrt{3}$,$OB=1$,以 O 为坐标原点,OA,OB,OB_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系如图.

则 $O(0,0,0)$,$A(\sqrt{3},0,0)$,$B(0,1,0)$,$C(-\sqrt{3},0,0)$,$D(0,-1,0)$,$B_1(0,0,\sqrt{3})$,
$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},-1,0)$,$\overrightarrow{BB_1}=(0,-1,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{DB_1}=(0,1,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1,0)$. ………………………… 8 分

设平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0\end{cases}$,

即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x_1-y_1=0\\-y_1+\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$,

取 $z_1=1$,得 $\boldsymbol{m}=(-1,\sqrt{3},1)$. ………………………… 10 分

设平面 A_1B_1D 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB_1}=0\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0\end{cases}$,即 $\begin{cases}y_2+\sqrt{3}z_2=0\\-\sqrt{3}x_2+y_2=0\end{cases}$,

取 $z_2=-1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},-1)$. ………………………… 12 分

设平面 A_1B_1D 与平面 BCC_1B_1 的夹角为 θ,

则 $\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|(-1)\times1+\sqrt{3}\times\sqrt{3}+1\times(-1)|}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{1}{5}$,

所以平面 A_1B_1D 与平面 BCC_1B_1 夹角的余弦值为 $\frac{1}{5}$. ………………………… 15 分

18.解:(1)当 $a=1$ 时,$f'(x)=3-e^x$,

令 $f'(x)=0$,解得 $x=\ln 3$, ………………………… 1 分

当 $x\in(-\infty,\ln 3)$ 时,$f'(x)>0$,当 $x\in(\ln 3,+\infty)$ 时,$f'(x)<0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln 3)$ 上单调递增,在 $(\ln 3,+\infty)$ 上单调递减, ………………………… 3 分

当 $x=\ln 3$ 时,$f(x)$ 取得极大值 $f(\ln 3)=3\ln 3-e^{\ln 3}=3\ln 3-3$, ………………………… 5 分

故 $f(x)$ 的极大值为 $3\ln 3-3$,无极小值. ………………………… 6 分

(2)由题意可知,不等式 $e^x+(4-3a)x-\cos x\geqslant0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立, ………………………… 7 分

设 $g(x)=e^x+(4-3a)x-\cos x$,$x\in[0,+\infty)$,

则 $g'(x)=e^x+4-3a+\sin x$, ………………………… 8 分

令 $\varphi(x)=e^x+4-3a+\sin x(x\geqslant0)$,则 $\varphi'(x)=e^x+\cos x\geqslant1+\cos x\geqslant0$,

所以 $\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,即 $g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增. ………………………… 9 分

所以 $g'(x)\geqslant g'(0)=1+4-3a=5-3a$. ………………………… 10 分

当 $5-3a\geqslant0$，即 $a\leqslant\frac{5}{3}$ 时，$g'(x)\geqslant0$，此时 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $g(x)\geqslant g(0)=0$，符合题意；……………………………………………………………… 12 分

当 $5-3a<0$，即 $a>\frac{5}{3}$ 时，$g'(0)<0$，且 $g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $x\to+\infty$，$g'(x)\to+\infty$，所以存在 $x_0>0$，使得 $g'(x_0)=0$，则 $g(x)$ 在 $[0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，………………………………………………………………………………………………… 15 分

所以当 $x\in[0,x_0)$ 时，$g(x)\leqslant g(0)=0$，不符合题意. ………………………………………… 16 分

综上可知，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,\frac{5}{3}]$. …………………………………………………… 17 分

19.（1）解：由椭圆的几何性质可知，以椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的四个顶点为顶点的四边形是菱形，

$\begin{cases}4\sqrt{a^2+b^2}=4\sqrt{7},\\ \frac{1}{2}\times2a\times2b=4\sqrt{3},\end{cases}$ ……………………………………………………………… 2 分

解得 $a^2=4,b^2=3$ 或 $a^2=3,b^2=4$（舍去），……………………………………………………… 3 分

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………… 4 分

（2）设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

（ⅰ）证明：因为 M 为 PQ 的中点，所以 $M(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$，

由题意可知，PQ 的斜率存在且不为 0，则 $k_3=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，$k_2=\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}$，…………………… 5 分

由 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$，$\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$，得 $\frac{x_2^2-x_1^2}{4}+\frac{y_2^2-y_1^2}{3}=0$，……………………………… 6 分

即 $\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{4}+\frac{(y_2-y_1)(y_2+y_1)}{3}=0$，所以 $\frac{(y_2-y_1)(y_2+y_1)}{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}=-\frac{3}{4}$，

即 $k_2k_3=-\frac{3}{4}$，……………………………………………………………………………………… 8 分

又 $3k_1=4k_2$，且 $k_2\neq0$，则 $k_1\neq0$，所以 $k_1k_3=-1$，……………………………………… 9 分

则 $\angle OPQ=90°$，故 $\triangle OPQ$ 为直角三角形. ………………………………………………… 10 分

（ⅱ）解：易知直线 OP 的方程为 $y=k_1x$，与 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 联立，消去 y 得 $(4k_1^2+3)x^2=12$，

所以 $x_1^2=\frac{12}{4k_1^2+3}$，则 $|OP|=\sqrt{1+k_1^2}\cdot|x_1|=\sqrt{1+k_1^2}\cdot\sqrt{\frac{12}{4k_1^2+3}}$. ………………… 11 分

易得直线 PQ 的方程为 $y-y_1=-\frac{1}{k_1}(x-x_1)$，又 $y_1=k_1x_1$，所以 $y=-\frac{1}{k_1}x+(k_1+\frac{1}{k_1})x_1$，

与 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 联立，消去 y 得 $(3+\frac{4}{k_1^2})x^2-\frac{8}{k_1}(k_1+\frac{1}{k_1})x_1x+4(k_1+\frac{1}{k_1})^2x_1^2-12=0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{\frac{8}{k_1}(k_1+\frac{1}{k_1})x_1}{3+\frac{4}{k_1^2}}$，则 $x_2=\frac{\frac{8}{k_1}(k_1+\frac{1}{k_1})x_1}{3+\frac{4}{k_1^2}}-x_1$，…………………… 12 分

则 $|PQ|=\sqrt{1+\frac{1}{k_1^2}}\cdot|x_1-x_2|=\frac{4\sqrt{3}\times\sqrt{1+\frac{1}{k_1^2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{4k_1^2+3}}}{3+\frac{4}{k_1^2}}$，…………………… 13 分

所以 $\triangle OPQ$ 的面积为

$$S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}|OP|\cdot|PQ|=\frac{1}{2}\times\sqrt{1+k_1^2}\cdot\sqrt{\frac{12}{4k_1^2+3}}\times\frac{4\sqrt{3}\times\sqrt{1+\frac{1}{k_1^2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{4k_1^2+3}}}{3+\frac{4}{k_1^2}}=\frac{12|k_1|(1+k_1^2)}{12k_1^4+25k_1^2+12}$$

$=\dfrac{12\left(\dfrac{1}{|k_1|}+|k_1|\right)}{12\left(\dfrac{1}{|k_1|}+|k_1|\right)^2+1}$, ………………………………………………………………………… 15 分

令 $t=\dfrac{1}{|k_1|}+|k_1|(t\geqslant 2)$,则 $S_{\triangle OPQ}=\dfrac{12t}{12t^2+1}=\dfrac{12}{12t+\dfrac{1}{t}}\leqslant\dfrac{12}{12\times 2+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{24}{49}$,当且仅当 $t=2$,即 $k_1=\pm 1$ 时取得等号,

故$\triangle OPQ$面积的最大值为$\dfrac{24}{49}$. ………………………………………………………………………… 17 分

（二）

1. D　因为 $A=\{x|\sqrt{x}<2\}=\{x|0\leqslant x<4\}$,$B=\left\{x\middle|y=\dfrac{1}{\lg(x-1)}\right\}=\{x|x>1且x\neq 2\}$,所以 $A\cap B=(1,2)\cup(2,4)$,故选 D.

2. C　因为$\dfrac{i}{z-i}=2-i$,所以 $z=\dfrac{i}{2-i}+i=\dfrac{i(2+i)}{5}+i=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{7}{5}i$,$\bar{z}=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{7}{5}i$,故选 C.

3. A　因为数据 $3x_1,3x_2,\cdots,3x_{12}$ 的中位数为 9,方差为 36,所以数据 $x_1,x_2,\cdots,x_{12}$ 的中位数为 3,方差为$\dfrac{36}{3^2}=4$,所以数据 $x_1-1,x_2-1,\cdots,x_{12}-1$ 的中位数为 $3-1=2$,方差为 4. 故选 A.

4. B　常数项为 $C_6^4\cdot(x^2)^2\left(-\dfrac{2}{x}\right)^4=15\times 16=240$. 故选 B.

5. C　因为 $\boldsymbol{a}=(x,1)$,$\boldsymbol{b}=(x-1,x)$,所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,1-x)$,又 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,所以 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=x-1+x(1-x)=0$,解得 $x=1$,所以 $\boldsymbol{a}=(1,1)$,$\boldsymbol{b}=(0,1)$,所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times 1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,所以向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\dfrac{\pi}{4}$,故选 C.

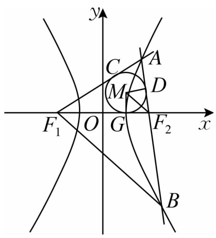
6. B　因为 $a=5,b=4,c=\sqrt{21}$,所以由余弦定理得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{1}{2}$,所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$,所以$\triangle ABC$ 的面积为$\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 5\times 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$,故选 B.

7. B　由 $2a>0$ 及 $4-\dfrac{2}{a}<0$ 得 $0<a<\dfrac{1}{2}$,所以 $0<2a<1$,$y=\log_{2a}\left[\left(4-\dfrac{2}{a}\right)x\right]$在$(-\infty,0)$上单调递增,所以 $1-4a<0$,$a>\dfrac{1}{4}$. 综上得$\dfrac{1}{4}<a<\dfrac{1}{2}$,故选 B.

8. D　设圆锥内接圆柱的底面半径为 r_1,高为 h_1,由题可得$\dfrac{h}{r}=\dfrac{h_1}{r-r_1}$,$r_1\in(0,r)$,解得 $h_1=\dfrac{(r-r_1)h}{r}$,则圆柱的体积 $V=\pi r_1^2h_1=\pi r_1^2\ \dfrac{(r-r_1)h}{r}=\pi hr_1^2-\dfrac{\pi hr_1^3}{r}$, $V'=2\pi hr_1-\dfrac{3\pi hr_1^2}{r}=\pi hr_1\left(2-\dfrac{3r_1}{r}\right)$,令 $V'=0$,得 $r_1=\dfrac{2r}{3}$,所以当 $0<r_1<\dfrac{2r}{3}$时,$V'>0$,则 V 在$\left(0,\dfrac{2r}{3}\right)$上单调递增;当$\dfrac{2r}{3}<r_1<r$ 时,$V'<0$,则 V 在$\left(\dfrac{2r}{3},r\right)$上单调递减. 所以当 $r_1=\dfrac{2r}{3}$时,$V_{\max}=\pi h\left(\dfrac{2r}{3}\right)^2-\dfrac{\pi h}{r}\cdot\left(\dfrac{2r}{3}\right)^3=4\pi$,所以 $r^2h=27$. 所以圆锥的体积为$\dfrac{1}{3}\pi r^2h=9\pi$,故选 D.

9. BC　当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=3^{n-1}-3^{n-2}=2\cdot 3^{n-2}(n\geqslant 2)$,则 $a_2=2$,$a_3=6$,由于$\{a_n\}$是等比数列,所以公比为 $q=3$,$a_1=\dfrac{a_2}{q}=\dfrac{2}{3}$,故 A 错误,B 正确;$a_1=S_1=1+r=\dfrac{2}{3}$,则 $r=-\dfrac{1}{3}$,故 C 正确;$a_n=2\cdot 3^{n-2}$,故 D 错误. 故选 BC.

10. AD　由题知,$\begin{cases}\dfrac{b}{a}=\sqrt{3},\\ c=4,\\ c^2=a^2+b^2,\end{cases}$ 解得 $a=2$,$b=2\sqrt{3}$,$c=4$,所以双曲线 C:$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$.



对于 A,离心率为 $e=\dfrac{c}{a}=2$,故 A 正确;

对于 B,若 $AB\perp x$ 轴,则直线 AB 的斜率不存在,直线 AB 的方程为 $x=4$,此时,$A(4,6)$,$B(4,-6)$,则$|AB|=12$,故 B 错误;

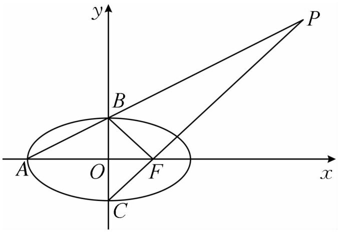
对于 C,当直线 AB 的斜率为 0 时,$|AB|=4$,故 C 错误;

对于 D,设圆 M 分别与 AF_1,AF_2,F_1F_2 相切于点 C,D,G,则 $|AC|=|AD|$,$|CF_1|=|GF_1|$,$|DF_2|=|GF_2|$. 因为 $|AF_1|-|AF_2|=2a=4$,所以 $|AF_1|-|AF_2|=|GF_1|-|GF_2|=4$. 令 G 的横坐标为 x_1,则 $(x_1+c)-(c-x_1)=2x_1=4\Rightarrow x_1=2$,即 G 为双曲线 E 的右顶点,即$\triangle AF_1F_2$ 内切圆圆心 M 在定直线 $x=2$ 上,故 D 正确. 故选 AD.

11. ABC　因为 $f(x)$的图象关于点$(1,3)$对称,所以 $f(x+1)+f(-x+1)=6$,所以 $f(x)=6-f(2-x)$,所以 $f(-x)=6-f(2+x)$,因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,所以 $f(1)=3$,又因为 $f(x+2)$为偶函数,所以 $f(-x+2)=f(x+2)$,则 $f(x)$的图象关于 $x=2$ 对称,所以 $f(x)=6-f(2-x)=6-f(2+x)$,又 $f(-x)=6-f(2+x)$,所以$f(x)=f(-x)$,所以 $f(x)$为偶函数,故 A 正确;由 $f(x+2)=f(-x+2)$,可得 $f(-x)=f(x+4)$,即 $f(x)=f(x+4)$,所以函数 $f(x)$的周期 $T=4$,所以 $f(2\,025)=f(1)=3$,故 B 正确;所以 $f(-1)=f(1)=3$,$f(0)=-2$,所以 $f(2)=6-f(0)=8$,故 C 正确;又因为 $f(3)=f(-1)=3$,所以 $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=12$,所以$\sum\limits_{i=0}^{100}f(i)=25\times12+f(0)=298$,故 D 错误. 故选 ABC.

12. $\sqrt{3}$　由题知 $\tan\alpha=-\sqrt{3}$,$\tan 2\alpha=\dfrac{-2\sqrt{3}}{1-3}=\sqrt{3}$.

13. 4　设 $F(c,0)(c>0)$,由已知得直线 AB 的方程为$-\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$,直线 CF 的方程为$\dfrac{x}{c}-\dfrac{y}{b}=1$,



两直线方程联立,可解得点 P 的坐标为$\left(\dfrac{2ac}{a-c},\dfrac{(a+c)b}{a-c}\right)$.

由$|PF|=\dfrac{5}{2}|AF|$,得$\left(\dfrac{2ac}{a-c}-c\right)^2+\left[\dfrac{(a+c)b}{a-c}\right]^2=\dfrac{25}{4}(a+c)^2$,

可得$\dfrac{(a+c)^2c^2}{(a-c)^2}+\dfrac{(a+c)^2b^2}{(a-c)^2}=\dfrac{25}{4}(a+c)^2$,整理得$\dfrac{b^2+c^2}{(a-c)^2}=\dfrac{25}{4}$,即$\dfrac{a^2}{(a-c)^2}=\dfrac{25}{4}$,解得 $a=\dfrac{5}{3}c$.

所以 P 点的纵坐标为$\dfrac{(a+c)b}{a-c}=4b$,得$\dfrac{S_{\triangle PAF}}{S_{\triangle ABF}}=4$.

14. $(-\infty,0]$　由题可得 $f'(x)=2x-ae^x=0$ 恰有唯一实数解,且在解的两边导数值正负相反,即 $a=\dfrac{2x}{e^x}$有唯一解,令 $g(x)=\dfrac{2x}{e^x}$,函数定义域为 $\mathbf{R}$,可得 $g'(x)=\dfrac{2e^x-2xe^x}{e^{2x}}=\dfrac{2(1-x)}{e^x}=0$,当 $x<1$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增;当 $x>1$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,所以当 $x=1$ 时,函数 $g(x)$取得极大值,极大值 $g(1)=\dfrac{2}{e}$,当 $x\to-\infty$时,$g(x)\to-\infty$;当 $x\to+\infty$时,$g(x)\to0$,所以 $a=\dfrac{2}{e}$(舍去)或 $a\leqslant0$,经检验 $a\leqslant0$ 符合题意,所以实数 a 的取值范围为$(-\infty,0]$.

15. 解:(1)$f(x)=\cos^2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin^2x=\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x$

$=2(\cos 2x\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin 2x\sin\dfrac{\pi}{3})=2\cos(2x+\dfrac{\pi}{3})$, ………………………… 2 分

由$-\pi+2k\pi\leqslant2x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant2k\pi,k\in\mathbf{Z}$, ………………………… 4 分

解得$-\dfrac{2\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant-\dfrac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$, ………………………… 6 分

所以 $f(x)$的单调递增区间为$[-\dfrac{2\pi}{3}+k\pi,-\dfrac{\pi}{6}+k\pi],k\in\mathbf{Z}$. ………………………… 7 分

(2)$x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$时,$2x+\dfrac{\pi}{3}\in[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}]$,

当 $x=\dfrac{\pi}{3}$时,$f(x)$有最小值,且 $f(x)_{\min}=f(\dfrac{\pi}{3})=-2$, ………………………… 11 分

因为 $f(0)=1$,$f(\dfrac{\pi}{2})=-1$,所以 $f(x)_{\max}=1$, ………………………… 12 分

所以当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时，$f(x)$的值域为$[-2,1]$. …………………………………………………………………… 13 分

16. 解：(1)抛物线焦点为 $F(\frac{p}{2},0)$，准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，

由抛物线定义可知 $|GF|=1+\frac{p}{2}=2$，$\therefore p=2$，所以抛物线 E 的方程为 $y^2=4x$. ………………………… 3 分

将 $G(1,t)$代入抛物线方程可得 $t^2=4\Rightarrow t=\pm2$. ……………………………………………………………… 5 分

(2)设 $P(x_P,y_P)$，$Q(x_Q,y_Q)$，联立$\begin{cases}y=x+a\\y^2=4x\end{cases}$得 $x^2+(2a-4)x+a^2=0$，…………………………………… 7 分

所以 $\Delta=(2a-4)^2-4a^2=16-16a>0$，所以 $a<1$，

所以 $x_P+x_Q=4-2a$，$x_Px_Q=a^2$. ………………………………………………………………………………………… 9 分

因为 $OP\perp OQ$，所以$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$，

则 $x_Px_Q+y_Py_Q=x_Px_Q+(x_P+a)(x_Q+a)=2x_Px_Q+a(x_P+x_Q)+a^2=0$，

$\therefore 2a^2+a(4-2a)+a^2=0$，即 $a^2+4a=0$，

解得 $a=0$ 或 $a=-4$. ……………………………………………………………………………………………………… 13 分

又当 $a=0$ 时，直线与抛物线的交点中有一点与原点 O 重合，不符合题意，故舍去.

所以实数 a 的值为-4. ……………………………………………………………………………………………………… 15 分

17. (1)证明：因为 $CC_1\perp$平面 ABC，$CC_1\subset$平面 ACC_1A_1，

所以平面 $ACC_1A_1\perp$平面 ABC. …………………………………………………………………………………… 1 分

因为 $AB=BC$，点 D 为 AC 中点，所以 $BD\perp AC$. ……………………………………………………………… 2 分

因为平面 $ACC_1A_1\cap$平面 $ABC=AC$，所以 $BD\perp$平面 ACC_1A_1. ………………………………………… 3 分

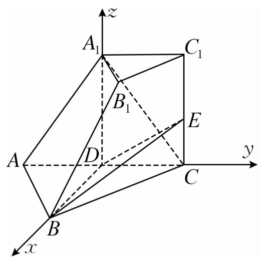
因为 $A_1C\subset$平面 ACC_1A_1，所以 $BD\perp A_1C$. ………………………………………………………………… 4 分

因为$\frac{A_1C_1}{CC_1}=\frac{CE}{CD}$，所以 $\tan\angle A_1CC_1=\tan\angle EDC$，$\angle A_1CC_1=\angle EDC$，

因为$\angle EDC+\angle DEC=90^\circ$，所以$\angle A_1CC_1+\angle DEC=90^\circ$，

所以 $A_1C\perp DE$. …… 6 分

因为 $BD\cap DE=D$，$BD,DE\subset$平面 BDE，所以 $A_1C\perp$平面 BDE. ……………………………………… 7 分



(2)解：因为点 D 为 AC 中点，且点 A 到平面 BDE 的距离为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以点 C 到直线 DE 的距离为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以 $CD\times CE=\frac{\sqrt{6}}{3}\times\sqrt{CD^2+CE^2}$，即 $CD\times1=\frac{\sqrt{6}}{3}\times\sqrt{CD^2+1}$，解得 $CD=\sqrt{2}$，

所以 $A_1C_1=\sqrt{2}$，$CC_1=2$. ………………………………………………………………………… 9 分

连接 DA_1，则 DB,DC,DA_1 两两垂直，以 DB,DC,DA_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(0,-\sqrt{2},0)$，$B(\sqrt{2},0,0)$，$A_1(0,0,2)$，$C(0,\sqrt{2},0)$，

$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,\sqrt{2},2)$，…………………………………………………………………… 10 分

设平面 ABB_1A_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则有$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0\\\sqrt{2}y+2z=0\end{cases}$，

取 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},1)$. ………………………………………………………………………… 12 分

由(1)知$\overrightarrow{CA_1}=(0,-\sqrt{2},2)$是平面 BDE 的法向量. 设平面 BDE 与平面 ABB_1A_1 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA_1}|}{|\boldsymbol{n}|\,|\overrightarrow{CA_1}|}=\frac{\left|\sqrt{2}\times0+(-\sqrt{2})\times(-\sqrt{2})+1\times2\right|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}\sqrt{0^2+(-\sqrt{2})^2+2^2}}=\frac{2\sqrt{30}}{15}$，

所以平面 BDE 与平面 ABB_1A_1 夹角的余弦值为$\frac{2\sqrt{30}}{15}$. ……………………………………………… 15 分

18. 解：(1)设"抽取的零部件为甲工厂生产"为事件 A_1，"抽取的零部件为乙工厂生产"为事件 A_2，"抽取的零部件为次品"为事件 B，……………………………………………………………………………………………… 1 分

则 $P(A_1)=\frac{2}{3}, P(A_2)=\frac{1}{3}, P(B|A_1)=0.06, P(B|A_2)=0.03$， …………………………… 2 分

所以 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\frac{2}{3}\times0.06+\frac{1}{3}\times0.03=0.05$， ………………… 3 分

检测该零部件为次品，则该零部件是甲工厂生产的概率为

$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{3}\times0.06}{0.05}=0.8$. …………………………… 5 分

(2)用频率代替概率，从某天甲、乙两个工厂生产的所有零部件中随机抽取 3 件，则正品数 $X\sim B(3,0.95)$，

$X+Y=3, \xi=X-Y=2X-3$， …………………………………………… 6 分

ξ 的取值依次为 $-3,-1,1,3$，

$P(\xi=-3)=P(X=0)=0.05^3=0.000\ 125$，

$P(\xi=-1)=P(X=1)=C_3^1\times0.95\times0.05^2=0.007\ 125$，

$P(\xi=1)=P(X=2)=C_3^2\times0.95^2\times0.05=0.135\ 375$，

$P(\xi=3)=P(X=3)=C_3^3\times0.95^3=0.857\ 375$. …………………………………… 10 分

所以 ξ 的分布列为

ξ	-3	-1	1	3
P	0.000 125	0.007 125	0.135 375	0.857 375

$E(X)=3\times0.95=2.85$，

$E(\xi)=E(2X-3)=2E(X)-3=2\times2.85-3=2.7$. …………………………………… 12 分

(3)由 x 的取值依次为 1,2,3,4,5，得 $\overline{x}=3, \sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=10$， ………………………… 13 分

因为回归直线方程为 $\hat{y}=-0.45x+6.25$，

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{10}=-0.45$，

所以 $\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=-4.5$， ……………………………………… 15 分

所以 $r=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2}}\approx\frac{-4.5}{3.16\times1.43}\approx-0.996$. ………………………… 16 分

因为 $|r|\approx0.996>0.75$，所以该回归直线方程有价值. ……………………………… 17 分

19. (1)证明：当 $a=1$ 时，$f(x)=xe^x-2x+1, x\geqslant0$，

则 $f'(x)=(x+1)e^x-2, x\geqslant0$， …………………………………………… 1 分

令 $m(x)=(x+1)e^x-2, x\geqslant0$，

则 $m'(x)=(x+2)e^x>0, x\geqslant0$，

所以 $m(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $m(0)=-1, m(1)=2e-2$，

所以存在唯一 $x_0\in(0,1)$，使得 $m(x_0)=0$， ………………………………… 2 分

所以 $m(x_0)=(x_0+1)e^{x_0}-2=0$，即 $x_0e^{x_0}=2-e^{x_0}$. ……………………………… 3 分

又当 $x\in[0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)\geqslant f(x_0)=x_0e^{x_0}-2x_0+1=3-e^{x_0}-2x_0, x_0\in(0,1)$，………………… 4 分

易知函数 $p(x)=3-e^x-2x$ 在 $(0,1)$ 上是减函数，

所以 $p(x)>p(1)=1-e$，所以 $f(x_0)>1-e$， …………………………………… 5 分

所以 $f(x)>1-e$. ……………………………………………………… 6 分

(2)(i)解：$F(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$，

显然 $x=1$ 不是函数 $F(x)$ 的零点，

当 $x\neq 1$ 时,方程 $F(x)=0$ 等价于 $-a=e^x\cdot\dfrac{x-2}{(x-1)^2}$, ………………………………………… 7 分

设 $n(x)=e^x\cdot\dfrac{x-2}{(x-1)^2}$,则 $n'(x)=e^x\cdot\dfrac{x^2-4x+5}{(x-1)^3}$,

所以函数 $n(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增, ………………………………………… 9 分

因为函数 $n(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上的值域为 $(-\infty,0)$,在 $(1,+\infty)$ 上的值域为 $(-\infty,+\infty)$,

所以当 $-a<0$ 时,函数 $F(x)$ 有两个零点, ………………………………………… 10 分

故实数 a 的取值范围为 $(0,+\infty)$. ………………………………………… 11 分

(ii)证明:根据(i)的结果,不妨设 $x_1<1<x_2$,则只需证明 $x_2<2-x_1$, ………………………………………… 12 分

考虑函数 $F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

于是只需证明 $F(x_2)<F(2-x_1)$,即 $F(x_1)<F(2-x_1)$, ………………………………………… 13 分

接下来证 $\forall x<1, F(x)-F(2-x)<0$,

即 $\forall x<1, e^x(x-2)+xe^{2-x}<0$, ………………………………………… 14 分

令 $h(x)=e^x(x-2)+xe^{2-x}$,

则 $h'(x)=(e^x-e^{2-x})(x-1)$,

当 $x<1$ 时,有 $e^x-e^{2-x}<0$,所以 $h'(x)>0$,

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增,

所以 $h(x)<h(1)=0$, ………………………………………… 16 分

因此原命题得证. ………………………………………… 17 分

(三)

1. B　$(1-4i)\left(\dfrac{1}{2}-i\right)=\dfrac{1}{2}-i-2i+4i^2=-\dfrac{7}{2}-3i$,故选 B.

2. C　由题意,因为 $A\subseteq B$,则 $\begin{cases}1-m>0\\1+2m>0\end{cases}\Rightarrow -\dfrac{1}{2}<m<1$. 故选 C.

3. A　由"$a>b>0$"得 $\sqrt{a}>0, a-b>0$,则"$\sqrt{a}(a-b)>0$",充分性成立;若 $\sqrt{a}(a-b)>0$,则 $a>0$ 且 $a>b$,必要性不成立,∴"$a>b>0$"是"$\sqrt{a}(a-b)>0$"的充分不必要条件. 故选 A.

4. B　由 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$,则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=7=4+9-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$,于是 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4+9+6=19$,故 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{19}$. 故选 B.

5. D　由题可知抛物线焦点为 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$,准线方程为 $x=-\dfrac{1}{2}$,假设等边三角形的边长为 a,所以 $a\cos 30^\circ+1=a$ 或 $1-a\cos 30^\circ=a$,则 $a=4\pm 2\sqrt{3}$. 故选 D.

6. C　求导可得 $f'(x)=\dfrac{a}{x}-e^x$,由题意可知 $f'(x)=\dfrac{a}{x}-e^x\leqslant 0$ 在区间 $(2,4)$ 上恒成立,所以 $a\leqslant xe^x$ 在区间 $(2,4)$ 上恒成立,令 $g(x)=xe^x$,易知 $g(x)=xe^x$ 在区间 $(2,4)$ 上单调递增,所以 $2e^2<g(x)<4e^4$,所以 $a\leqslant 2e^2$,故选 C.

7. D　由题意可知密码共有六位,其中第一、二、四位已知,分别为 3,4,2,
由原则①知剩余三位数字的可能情况有 $5\times5\times5=125$ 种,
其中数字 1 或 5 重复三次的情况有 2 种;
数字 2 或 3 或 4 重复三次的情况有 $3\times C_3^2\times C_4^1=36$ 种;
数字 2 或 3 或 4 重复四次的情况有 3 种,
所以符合两个原则输入密码时,至多需要尝试的密码种数为 $125-2-36-3=84$. 故选 D.

8. B　因为 $\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=\dfrac{a_n+2}{a_n}$,所以 $a_nS_{n+1}=(a_n+2)S_n=a_nS_n+2S_n$,即 $a_n(S_{n+1}-S_n)=2S_n$,即 $a_na_{n+1}=2S_n$,则 $a_{n+1}a_{n+2}=2S_{n+1}$,与上式作差后可得 $a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=2(S_{n+1}-S_n)=2a_{n+1}$,因为 $a_{n+1}>0$,所以 $a_{n+2}-a_n=2$,所以 $\dfrac{1}{a_na_{n+2}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a_{n+2}-a_n}{a_na_{n+2}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+2}}\right)$. 因为 $a_1=1, a_na_{n+1}=2S_n\Rightarrow a_1a_2=2a_1\Rightarrow a_2=2$,所以 $\dfrac{1}{a_1a_3}+\dfrac{1}{a_2a_4}+\cdots+\dfrac{1}{a_na_{n+2}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_4}+\dfrac{1}{a_3}-\dfrac{1}{a_5}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+2}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_{n+2}}\right)=\dfrac{1}{2}\times$

$\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+2}}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+2}}\right)<\frac{3}{4}$，所以实数 M 的最小值为 $\frac{3}{4}$，故选 B.

9. ABD　以 F_1F_2 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=c^2$，因为圆 $x^2+y^2=c^2$ 与椭圆 C 有公共点，所以 $c^2\geqslant b^2$，即 $9-b^2\geqslant b^2$，所以 $b^2\leqslant\frac{9}{2}$，即 $0<b\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}$，故选 ABD.

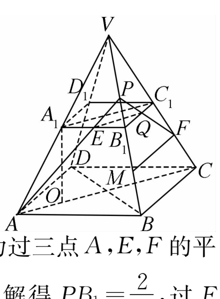
10. AD　由题知 $\frac{1}{4}\times\frac{2\pi}{\omega}=\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6}$，$\therefore\omega=2$，$\because$ 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的一个最高点为 $(\frac{\pi}{6},2)$，且 $A>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore A=2$，$2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{6}$，$\therefore f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，故 A 正确；将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到函数 $g(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象，$\therefore g(x)$ 不是奇函数，故 B 错误；当 $x\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{3},\pi]$，由正弦函数的图象可知，$g(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$ 上不是单调函数，故 C 错误；$\because g(\frac{\pi}{3})=2\sin\pi=0$，$\therefore g(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{3},0)$ 中心对称，故 D 正确. 故选 AD.

11. ABC　由题意可知每次抽取号码小于等于 5 的小球与抽取号码大于 5 的小球概率相等，概率均为 $\frac{1}{2}$，易知 $p_1=\frac{1}{2}$. 一共前进 2 步，包含两种情况：一是抽取号码大于 5 的小球，概率为 $\frac{1}{2}$，二是连续两次抽取号码小于或等于 5 的小球，概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，所以由互斥事件的概率加法公式可得 $p_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$，故 A 正确；一共前进 n 步的情况有两种：一是前进了 $(n-1)$ 步后抽取号码小于或等于 5 的小球，二是前进了 $(n-2)$ 步后抽取号码大于 5 的小球，所以由互斥事件的概率加法公式可得 $p_n=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{2}p_{n-2}(n\geqslant3)$，故 B 正确；由对立事件的角度考虑，得不到 n 步的情况只有一种：在前进 $(n-1)$ 步后抽取号码大于 5 的小球，所以 $1-p_n=\frac{1}{2}p_{n-1}$，即 $p_n=1-\frac{1}{2}p_{n-1}(n\geqslant2)$，故 C 正确；由 $p_n=1-\frac{1}{2}p_{n-1}$，依据待定系数法可得 $p_n-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}(p_{n-1}-\frac{2}{3})$，所以 $\{p_n-\frac{2}{3}\}$ 是等比数列，首项为 $-\frac{1}{6}$，公比为 $-\frac{1}{2}$，所以 $p_n-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}\times(-\frac{1}{2})^{n-1}$，得 $p_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{2})^n$，显然 $n=2$ 时，$p_2=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$ 最大，故 D 错误. 综上，选 ABC.

12. $\frac{2}{5}$　由 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=5$，得 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{5}$，则 $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{2}{5}$.

13. 26　因为 $g(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称，所以 $g(x)=g(2-x)$，所以 $\begin{cases}f(x)-g(x)=1,\\f(x+1)+g(x)=1\end{cases}$，两式相加可得 $f(x)+f(x+1)=2$，故 $f(x+1)+f(x+2)=2$，可得 $f(x)=f(x+2)$，故函数 $f(x)$ 的周期为 2.
因为 $f(x)-g(x)=1$，$g(1)=3$，所以 $f(1)=g(1)+1=4$，所以 $\sum_{i=1}^{23}f(x)=[f(1)+f(2)]+[f(3)+f(4)]+\cdots+[f(21)+f(22)]+f(23)=2\times\frac{22}{2}+f(23)=22+f(1)=22+4=26$.

14. $\frac{\sqrt{61}}{5}$　设正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的高为 h，由正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $\frac{28\sqrt{2}}{3}$ 可知，$\frac{1}{3}(2^2+4^2+\sqrt{2^2\times4^2})\cdot h=\frac{28\sqrt{2}}{3}$，所以 $h=\sqrt{2}$，因为 $AB=4$，$A_1B_1=2$，所以 $AC=4\sqrt{2}$，$A_1C_1=2\sqrt{2}$，在梯形 ACC_1A_1 中，作 $A_1O\perp AC$ 于点 O，则 $A_1O=\sqrt{2}$，$AO=\sqrt{2}$，所以 $AA_1=2$. 将正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 补成正四棱锥 $V-ABCD$，连接 AE，并延长 AE 交 VB_1 于点 P，连接 PF 交 B_1C_1 于 Q，连接 EQ，则 EQ 为过三点 A,E,F 的平面与上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的交线. 由 $\frac{PB_1}{PB}=\frac{EB_1}{AB}=\frac{1}{4}$ 得 $PB=4PB_1$，即 $PB_1+2=4PB_1$，解得 $PB_1=\frac{2}{3}$，过 F



作 $FM\parallel BC\parallel B_1C_1$，则 $MF=\frac{2+4}{2}=3$，$PM=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$，由 $\frac{PB_1}{PM}=\frac{B_1Q}{MF}$ 得 $B_1Q=\frac{2}{5}\times3=\frac{6}{5}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle EB_1Q$ 中，$EQ=\sqrt{1^2+(\frac{6}{5})^2}=\frac{\sqrt{61}}{5}$.

15. 解：(1)由 $\begin{vmatrix}\sin A & \sin B\\ 1 & 2\sin C\end{vmatrix}=0$ 得 $\sin B=2\sin A\sin C$， …………………………………… 2 分

结合正弦定理可得 $b=2a\sin C$，…………………………………………………………………… 4 分

又 $b=3$，所以 $a\sin C=\frac{3}{2}$，…………………………………………………………………… 5 分

所以△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times3a\sin C=\frac{9}{4}$. …………………………………… 7 分

(2)当 $C=\frac{\pi}{4}$ 时，$\sin B=2\sin A\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\sin A$，即 $b=\sqrt{2}a$， …………………………… 9 分

由余弦定理可得 $c^2=a^2+(\sqrt{2}a)^2-2a\times\sqrt{2}a\times\frac{\sqrt{2}}{2}$， ……………………………………… 11 分

即 $c=a$，所以 $\frac{c}{a}=1$. ……………………………………………………………………………… 13 分

16. 解：(1)这 2 000 户农户家庭年收入的样本平均数 $\overline{x}=5\times0.1+6\times0.15+7\times0.2+8\times0.25+9\times0.2+10\times0.1=7.6$. ……………………………………………………………………………………………… 2 分

这 2 000 户农户家庭年收入的样本方差 $s^2=0.1\times(-2.6)^2+0.15\times(-1.6)^2+0.2\times(-0.6)^2+0.25\times0.4^2+0.2\times1.4^2+0.1\times2.4^2=2.14$. ……………………………………………………………… 5 分

(2)(i)这 2 000 户农户家庭年收入 X 近似服从正态分布 $N(7.6,2.14)$.

因为 $7.6+\sqrt{2.14}\approx9.06$，所以 $P(X\geqslant9.06)=0.5-\frac{P(\mu-\sigma<x<\mu+\sigma)}{2}=0.5-0.341\ 35=0.158\ 65$.

…… 8 分

因为 $2\ 000\times0.158\ 65=317.3\approx317$，

所以这 2 000 户农户家庭年收入不低于 9.06 万元的户数为 317. …………………………………… 10 分

(ii)年收入低于 9.06 万元的农户家庭数 ξ 服从二项分布 $\xi\sim B(4,0.841\ 35)$. ………………………… 12 分

所以 $P(\xi\leqslant3)=1-P(\xi=4)=1-\mathrm{C}_4^4\,(0.841\ 35)^4\approx1-0.501=0.499$. ……………………… 15 分

17. 解：(1)因为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp AC$，$AA_1\perp AC$，

所以 $AC\perp$ 平面 ABB_1A_1， …………………………………………………………………………… 1 分

因为 $A_1B\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $AC\perp A_1B$. ……………………………………………………… 2 分

连接 AB_1，因为 $A_1B\perp B_1C$，$AC\cap B_1C=C$，所以 $A_1B\perp$ 平面 AB_1C. …………………………… 3 分

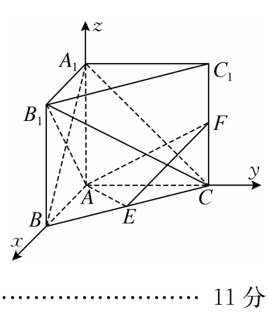
因为 $AB_1\subset$ 平面 AB_1C，所以 $A_1B\perp AB_1$，

因为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中侧面 ABB_1A_1 是矩形，

所以四边形 ABB_1A_1 是正方形，则 $A_1B_1=A_1C_1=2$. ……………………………………………… 5 分

所以 $V_{C_1-A_1B_1C}=V_{C-A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times A_1B_1\times A_1C_1\times CC_1=\frac{1}{6}\times2\times2\times2=\frac{4}{3}$. ………………… 7 分

(2)易知 AB,AC,AA_1 两两垂直，以 A 为原点，直线 AB,AC,AA_1 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$，$E(1,1,0)$，$F(0,2,1)$，$C(0,2,0)$，$A_1(0,0,2)$，$B_1(2,0,2)$，

所以 $\overrightarrow{AE}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AF}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{A_1C}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{A_1B_1}=(2,0,0)$.

…………………………………………………………………………………………… 9 分

设平面 AEF 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1+y_1=0\\ 2y_1+z_1=0\end{cases}$，

取 $z_1=2$，得 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,2)$， …………………………………………………………………… 11 分

设平面 A_1B_1C 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{A_1C}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2x_2=0\\ 2y_2-2z_2=0\end{cases}$，

取 $z_2=1$，得 $\boldsymbol{n}_2=(0,1,1)$， ………………………………………………………………………………… 13 分

设平面 A_1B_1C 与平面 AEF 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{|1\times0-1\times1+2\times1|}{\sqrt{6}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，

所以平面 A_1B_1C 与平面 AEF 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. ………………………………………………………… 15 分

18. (1)解：由题意可知 $\begin{cases}2b=2\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\\ a^2+b^2=c^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$， ………………………………………………………… 4 分

故 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$. ……………………………………………………………………………………… 5 分

(2)证明：设 $G(x_1,y_1)$，$H(x_2,y_2)$，$E(m,t)$.

由于 $\overrightarrow{DG}=(x_1-1,y_1)$，$\overrightarrow{GE}=(m-x_1,t-y_1)$，且 $\overrightarrow{DG}=\lambda\overrightarrow{GE}$，

所以 $\begin{cases}x_1-1=m\lambda-\lambda x_1\\ y_1=\lambda t-\lambda y_1\end{cases}$，则 $\begin{cases}x_1=\dfrac{m\lambda+1}{1+\lambda}\\ y_1=\dfrac{t\lambda}{1+\lambda}\end{cases}$，即 $G(\dfrac{m\lambda+1}{1+\lambda},\dfrac{t\lambda}{1+\lambda})$. ……………………………………… 8 分

同理可得 $H(\dfrac{m\mu+1}{1+\mu},\dfrac{t\mu}{1+\mu})$. ……………………………………………………………………………… 9 分

因为点 G 在双曲线 C 上，所以 $\dfrac{(\dfrac{m\lambda+1}{1+\lambda})^2}{4}-(\dfrac{t\lambda}{1+\lambda})^2=1$，

化简整理可得 $(m^2-4t^2-4)\lambda^2+2(m-4)\lambda-3=0$， ………………………………………………… 12 分

同理可得 $(m^2-4t^2-4)\mu^2+2(m-4)\mu-3=0$. ……………………………………………………… 13 分

所以 λ,μ 是方程 $(m^2-4t^2-4)x^2+2(m-4)x-3=0$ 的两个根，

则 $\lambda+\mu=\dfrac{2(4-m)}{m^2-4t^2-4}$，

因为 $\lambda+\mu=0$，所以 $\dfrac{2(4-m)}{m^2-4t^2-4}=0$，即 $m=4$，

因此点 E 在定直线 $x=4$ 上. ………………………………………………………………………………………… 17 分

19. (1)证明：当 $a=2$ 时，$f'(x)=2x-2\ln x-2$， …………………………………………………………………… 1 分

令 $p(x)=f'(x)=2x-2\ln x-2$，则 $p'(x)=2-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x-2}{x}$， ……………………………………………… 2 分

当 $x\in(0,1)$ 时，$p'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$p'(x)>0$，

所以 $p(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则 $f'(x)\geqslant p(x)_{\min}=p(1)=0$， ………… 3 分

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ………………………………………………………………………………… 4 分

(2)(i)解：$g(x)=x^2-ax\ln x$，$g'(x)=2x-a\ln x-a$，要使 $g(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，则方程 $2x-a\ln x-a=0$ 有两个根，

令 $h(x)=2x-a\ln x-a$，当 $a<0$ 时，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，则 $h(x)$ 至多有一个零点，即方程 $2x-a\ln x-a=0$ 至多有一个根，不合题意，所以 $a>0$. ………………………………………………………………… 5 分

$h'(x)=2-\dfrac{a}{x}=\dfrac{2x-a}{x}$，当 $x\in(0,\dfrac{a}{2})$ 时，$h'(x)<0$，当 $x\in(\dfrac{a}{2},+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,\dfrac{a}{2})$ 上递减，在 $(\dfrac{a}{2},+\infty)$ 上递增，且 $h(x)_{\min}=h(\dfrac{a}{2})=-a\ln\dfrac{a}{2}$，

要使 $h(x)$ 有两个零点，则 $-a\ln\dfrac{a}{2}<0$，解得 $a>2$. …………………………………………………………… 7 分

当 $a>2$ 时，$h(\dfrac{1}{\mathrm{e}})=\dfrac{2}{\mathrm{e}}>0$，$h(\dfrac{a}{2})<0$，所以 $h(x)$ 在 $(\dfrac{1}{\mathrm{e}},\dfrac{a}{2})$ 上有一个零点， ………………… 8 分

又 $h(a^2)=2a^2-2a\ln a-a=a(2a-2\ln a-1)>a(2a-2\ln a-2)$，

由(1)可知 $2a-2\ln a-2>0$,所以 $h(a^2)>0$,

所以 $h(x)$在$(\frac{a}{2},a^2)$上有一个零点, …………………………………………………………… 9 分

综上所述,当 $a>2$ 时,$h(x)$有两个零点,即 $g(x)$有两个极值点,

故实数 a 的取值范围为$(2,+\infty)$. ……………………………………………………………………… 10 分

(ⅱ)证明:由(ⅰ)可知,$\frac{1}{e}<x_1<\frac{a}{2}<x_2<a^2$,则 $x_2<a^2$,$-x_1<-\frac{1}{e}$,所以 $x_2-x_1<a^2-\frac{1}{e}$,……… 11 分

要证 $x_2-x_1+2\sqrt{x_1x_2}<a^2+a-\frac{1}{e}$,只需证 $2\sqrt{x_1x_2}<a$, ……………………………………… 12 分

由题意可知 $g'(x_1)=g'(x_2)=0$,所以 $2x_1-a\ln x_1-a=2x_2-a\ln x_2-a$,

所以 $a=\frac{2(x_2-x_1)}{\ln x_2-\ln x_1}$, ………………………………………………………………………………… 13 分

下证:$2\sqrt{x_1x_2}<\frac{2(x_2-x_1)}{\ln x_2-\ln x_1}$,需证 $\ln\frac{x_2}{x_1}<\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_1x_2}}=\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}-\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$,

令 $t=\frac{x_2}{x_1}(t>1)$,则需证 $\ln t<\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}$. …………………………………………………… 14 分

设 $q(t)=\ln t-\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}(t>1)$,

则 $q'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2t}(2-t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})=-\frac{1}{2t}(t^{\frac{1}{4}}-t^{-\frac{1}{4}})^2<0$,……………… 15 分

函数 $q(t)$在$(1,+\infty)$上单调递减,

所以 $q(t)<q(1)=0$,因此 $\ln t<\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}$, ………………………………………………………… 16 分

所以 $2\sqrt{x_1x_2}<a$,

故 $x_2-x_1+2\sqrt{x_1x_2}<a^2+a-\frac{1}{e}$. ………………………………………………………………… 17 分

(四)

1. A　由题知,复数 $z=\frac{2+i}{i}-i=1-3i$,其虚部为-3,故选 A.

2. B　∵集合 $A=\{-2,-1,0,1,2,3\}$,$B=\{x|0\leqslant x<3\}$,∴$A\cap B=\{0,1,2\}$,∴$A\cap B$ 的元素个数为 3,故选 B.

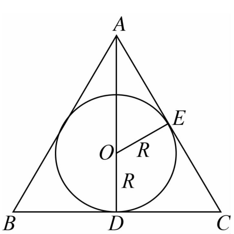
3. C　由题得 $\tan\alpha=\frac{\tan^2\alpha-1}{4}$,所以 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{\frac{\tan^2\alpha-1}{2}}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{1}{2}$. 故选 C.

4. A　∵$f(x)$的对称轴为 $x=1+m$,∴$1+m\geqslant 2$ 即 $m\geqslant 1$. 故选 A.

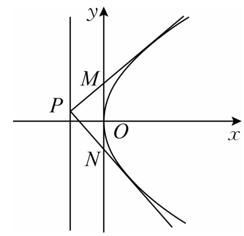
5. B　由 $f(x)=x^2+(c-2)x$ 为偶函数知 $c=2$. 设直线 $y=x+2$ 与圆 E 交于点 A,B,直线 $y=x-2$ 与圆 E 交于点 C,D,则$\angle AEB$,$\angle CED$ 都是直角,所以点 $E(a,b)$到直线 $y=x\pm 2$ 的距离都是$\sqrt{2}$,故点 E 在直线 $y=x$ 上,只有 B 项符合. 故选 B.

6. D　令 $x=-1$,则有$(a+b)^6=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6$,令 $x=1$,则有$(a-b)^6=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$,又 $a+b=1$,$a_0+a_2+a_4+a_6=\frac{65}{2}=\frac{(a+b)^6+(a-b)^6}{2}$,所以 $a-b=\pm 2$,所以$\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\b=-\frac{1}{2}\end{cases}$. 故选 D.

7. C　圆锥的侧面展开图是一个半径为 3,圆心角为$\frac{2\pi}{3}$的扇形,由题意得,扇形的弧长 $l=3\times\frac{2\pi}{3}=2\pi$,所以该圆锥的底面圆的半径 $r=\frac{l}{2\pi}=1$,所以该圆锥的高 $h=\sqrt{3^2-r^2}=2\sqrt{2}$. 设该圆锥内切球的半径为 R,圆锥的轴截面如图所示,则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times(3+3+2)\times R$,解得 $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 设该圆锥外接球的半径为 R_1,则 $R_1^2=$



$(2\sqrt{2}-R_1)^2+1^2$，解得 $R_1=\frac{9\sqrt{2}}{8}$. 所以$\frac{V}{V'}=(\frac{R}{R_1})^3=(\frac{4}{9})^3=\frac{64}{729}$. 故选 C.



8. D　由题知，点 P 在抛物线准线 $x=-\frac{1}{2}$ 上，所以两条切线斜率必存在，设点 $P(-\frac{1}{2},y_0)$，直线 PM,PN 的斜率分别为 k_1,k_2，则直线PM 的方程为 $y-y_0=k_1(x+\frac{1}{2})$，即 $y=k_1x+\frac{1}{2}k_1+y_0$，则 $M(0,\frac{1}{2}k_1+y_0)$，同理得 $N(0,\frac{1}{2}k_2+y_0)$. 联立$\begin{cases}y=k_1x+\frac{1}{2}k_1+y_0,\\ y^2=2x\end{cases}$消去 y 得$(k_1x+\frac{1}{2}k_1+y_0)^2=2x$，整理得 $k_1^2x^2+(k_1^2+2k_1y_0-2)x+\frac{1}{4}k_1^2+y_0^2+k_1y_0=0$，因为直线 PM 与抛物线相切，所以 $\Delta=(k_1^2+2k_1y_0-2)^2-4k_1^2(\frac{1}{4}k_1^2+y_0^2+k_1y_0)=0$，化简得 $k_1^2+2k_1y_0-1=0$，同理可得 $k_2^2+2k_2y_0-1=0$，所以 k_1,k_2 都是方程 $x^2+2y_0x-1=0$ 的根，则 $k_1+k_2=-2y_0,k_1k_2=-1$. 所以$|OM|\cdot|ON|=-(\frac{1}{2}k_1+y_0)(\frac{1}{2}k_2+y_0)=-\frac{1}{4}k_1k_2-\frac{y_0}{2}(k_1+k_2)-y_0^2=-\frac{1}{4}\times(-1)+\frac{y_0}{2}\cdot 2y_0-y_0^2=\frac{1}{4}$，故选 D.

9. BC　若 $X\sim B\left(30,\frac{1}{10}\right)$，则 $D(X)=30\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}=2.7$，A 正确；若 $Y\sim N(6,3)$，则 $P(Y<6)=P(Y>6)=0.5$，有 $P(Y<5)<0.5$，B 错误；对于 C，由频率分布直方图估计得出的中位数左边和右边的直方图的面积相等，C 错误；已知 $P(A)=0.8,P(B)=0.7$，且 A 与 B 独立，则 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0.56$，所以 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.8+0.7-0.56=0.94$，D 正确. 故选 BC.

10. ABD　因为 $a_1=\frac{2}{3},a_n-a_{n+1}=a_{n+1}a_n(4n+2)$，所以$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=4n+2$，所以$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\right)=\frac{3}{2}+6+10+\cdots+4n-2=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(n-1)\cdot(6+4n-2)=2n^2-\frac{1}{2}$，所以 $a_n=\frac{1}{2n^2-\frac{1}{2}}=\frac{2}{4n^2-1}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$，$\{a_n\}$不是等差数列，$\{\frac{1}{a_n}\}$不是等比数列，AB 错误；$S_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$，所以 $S_{2\,024}=\frac{4\,048}{4\,049}$，$S_{2\,025}=\frac{4\,050}{4\,051}$，C 正确，D 错误，故选 ABD.

11. BCD　由 $f(x)=2ax^3-ax^2-4ax+2b(a\neq 0,a,b\in\mathbf{R})$可得其定义域为 $x\in\mathbf{R}$，且 $f'(x)=6ax^2-2ax-4a=2a(3x+2)(x-1)$，对于 A，当 $a=-\frac{1}{2}$时，$f'(x)=-(3x+2)(x-1)$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=-\frac{2}{3}$或 $x=1$. 当 $x\in\left(-\frac{2}{3},1\right)$时，$f'(x)>0$，此时 $f(x)$在$\left(-\frac{2}{3},1\right)$上单调递增，当 $x\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$或 $x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)<0$，此时 $f(x)$在$\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$和$(1,+\infty)$上单调递减，因此可得 $x=1$ 是 $f(x)$的极大值点，A 错误；对于 B，由 $f'(x)=6ax^2-2ax-4a=2a(3x+2)(x-1)$且 $a>0$ 可得，$f(x)$在$\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$和$(1,+\infty)$上单调递增，B 正确；对于 C，$b=-a$，$f(x)=2ax^3-ax^2-4ax-2a$，设切点为$(x_0,y_0)$，则 $y_0=2ax_0^3-ax_0^2-4ax_0-2a$，$f'(x)=6ax^2-2ax-4a$，则切线的斜率 $k=2a(3x_0^2-x_0-2)$，所以切线方程为 $y-(2ax_0^3-ax_0^2-4ax_0-2a)=2a(3x_0^2-x_0-2)(x-x_0)$. 因为切线过原点，把$(0,0)$代入可得 $4x_0^3-x_0^2+2=0$. 令 $g(x)=4x^3-x^2+2$，$g'(x)=12x^2-2x=2x(6x-1)$，所以 $g(x)$在$(-\infty,0)$，$\left(\frac{1}{6},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(0,\frac{1}{6}\right)$上单调递减，$g(0)>0$，$g(\frac{1}{6})>0$，$g(-1)<0$，所以函数 $g(x)$只有唯一的零点，即过原点作函数$f(x)$的切线有且只有一条，C 正确；对于 D，当 $a=-\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}$时，$f(x)=-x^3+\frac{1}{2}x^2+2x+1$，此时 $f(x)$在$\left(-\frac{2}{3},1\right)$上单调递增，在$\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$和$(1,+\infty)$上单调递减，所以若 $f(x)$有对称中心，则对称中心的横坐标为$\frac{1}{6}$. 假设点$\left(\frac{1}{6},f\left(\frac{1}{6}\right)\right)$为曲线 $y=f(x)$的对称中心，则应满足

$f(x)+f\left(\frac{1}{3}-x\right)=2f\left(\frac{1}{6}\right)$. 所以 $f(x)+f\left(\frac{1}{3}-x\right)=\frac{145}{54}=2f\left(\frac{1}{6}\right)$，因此点 $\left(\frac{1}{6},\frac{145}{108}\right)$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称中心，D 正确. 故选 BCD.

12. $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$　因为 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，所以 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(2-2x,3)\cdot(2+x,0)=(2-2x)\cdot(2+x)=0$，解得 $x=1$（舍负），所以 $\boldsymbol{b}=(1,-1)$，所以 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(1,-1)}{\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

13. $\frac{8}{5}$　由题得 $F_2(\sqrt{a^2+b^2},0)$，将 $x=\sqrt{a^2+b^2}$ 代入双曲线方程得 $y=\pm\frac{b^2}{a}$，所以 $N\left(\sqrt{a^2+b^2},-\frac{b^2}{a}\right)$，经过第四象限的双曲线的渐近线 l 的方程为 $y=-\frac{b}{a}x$，所以 $M\left(\sqrt{a^2+b^2},-\frac{b}{a}\sqrt{a^2+b^2}\right)$，所以 $\frac{|MN|}{|MF_2|}=\frac{-\frac{b^2}{a}+\frac{b}{a}\sqrt{a^2+b^2}}{\frac{b}{a}\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{5}$，化简得 $3b=4a$，令 $b=4t$，则 $a=3t$，$\sqrt{a^2+b^2}=5t$，所以 $|MN|=\frac{4t}{3}$，$|OF_2|=5t$，令 N 到 l 的距离为 d，所以 $S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}\times\frac{4t}{3}\times5t=\frac{40}{3}=\frac{1}{2}\times d\times\sqrt{25t^2+\frac{400t^2}{9}}$，所以 $t=2$，$d=\frac{8}{5}$.

14. $\frac{3}{5}$　设 $b-a=x$，$c-b=y$，$3-c=z$，且 $0<a<b<c<3$，则 $x>0$，$y>0$，$z>0$，所以 $\begin{cases}a=3-x-y-z,\\ b=3-y-z.\end{cases}$

若 $2b\geqslant3a$，则 $2(3-y-z)\geqslant3(3-x-y-z)$，故 $3x+y+z\geqslant3$，又 $b-a$，$c-b$，$3-c$ 这三个数中的最大数为 M，所以 $\begin{cases}3M\geqslant3x,\\ M\geqslant y,\\ M\geqslant z,\end{cases}$ 所以 $5M\geqslant3x+y+z\geqslant3$，所以 $M\geqslant\frac{3}{5}$，当且仅当 $x=y=z=\frac{3}{5}$，即 $a=\frac{6}{5}$，$b=\frac{9}{5}$，$c=\frac{12}{5}$ 时，等号成立；

若 $a+2b\leqslant4$，则 $3-x-y-z+2(3-y-z)\leqslant4$，故 $x+3y+3z\geqslant5$，又 $b-a$，$c-b$，$3-c$ 这三个数中的最大数为 M，所以 $\begin{cases}M\geqslant x\\ 3M\geqslant3y\\ 3M\geqslant3z\end{cases}$，所以 $7M\geqslant x+3y+3z\geqslant5$，所以 $M\geqslant\frac{5}{7}$，当且仅当 $x=y=z=\frac{5}{7}$，即 $a=\frac{6}{7}$，$b=\frac{11}{7}$，$c=\frac{16}{7}$ 时，等号成立. 综上所述，M 的最小值为 $\frac{3}{5}$.

15. 解：(1) $f(x)=\sqrt{3}\sin 2cx-2\cos^2 cx+1=\sqrt{3}\sin 2cx-\cos 2cx=2\sin\left(2cx-\frac{\pi}{6}\right)$. ………………………… 2 分

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 时 $2cx-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2c\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right]$，………………………… 3 分

因为 $y=2\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，

所以 $\frac{2c\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $c\leqslant1$，

所以 c 的取值范围是 $(0,1]$. ………………………… 6 分

(2) 因为 $c=1$，$0<C<\pi$，$-\frac{\pi}{6}<2C-\frac{\pi}{6}<\frac{11\pi}{6}$，$f(C)=2\sin\left(2C-\frac{\pi}{6}\right)=-1$，

所以 $2C-\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$，得 $C=\frac{2\pi}{3}$，………………………… 8 分

由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

即 $1=a^2+b^2-2ab\cos\frac{2\pi}{3}=a^2+b^2+ab=(a+b)^2-ab\geqslant(a+b)^2-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{3}{4}(a+b)^2$，……… 11 分

所以 $(a+b)^2\leqslant\frac{4}{3}$，$a+b\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

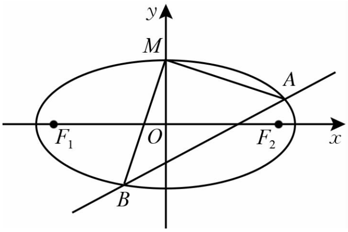
当 $a=b=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取等号，………………………… 12 分

所以 $a+b$ 的最大值为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ······························· 13 分

16. (1)解:由题知$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ b=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=2,\\ b=1,\\ c=\sqrt{3},\end{cases}$ ······························· 5 分

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ······························· 6 分

(2)证明:如图,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,



联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=kx-\frac{3}{5}\end{cases}$,得$(1+4k^2)x^2-\frac{24}{5}kx-\frac{64}{25}=0$, ··············· 8 分

$x_1+x_2=\frac{24k}{5(4k^2+1)}$,$x_1x_2=-\frac{64}{25(4k^2+1)}$, ··············· 11 分

又 $y_1=kx_1-\frac{3}{5}$,$y_2=kx_2-\frac{3}{5}$,

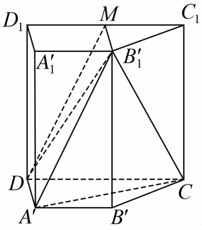
所以$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1,y_1-1)\cdot(x_2,y_2-1)=(1+k^2)x_1x_2-\frac{8}{5}k(x_1+x_2)+\frac{64}{25}$

$=(1+k^2)\frac{-64}{25(4k^2+1)}-\frac{8k}{5}\times\frac{24k}{5(4k^2+1)}+\frac{64}{25}$

$=\frac{64[-(1+k^2)-3k^2+4k^2+1]}{25(4k^2+1)}=0$,

即$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$,为定值. ······························· 15 分

17. (1)证明:如图,连接 $B_1'M$,



由题意得多面体 $A'B'CD—A_1'B_1'C_1D_1$ 是直四棱柱,

$A_1'B_1'/\!/C_1D_1$,$D_1M=\frac{1}{2}C_1D_1=1=A_1'B_1'$,

所以四边形 $A_1'B_1'MD_1$ 为平行四边形,

所以 $A_1'D_1/\!/B_1'M$,$A_1'D_1=B_1'M$, ······························· 2 分

又因为 $A_1'D_1/\!/A'D$,$A_1'D_1=A'D$,

所以 $B_1'M/\!/A'D$,$B_1'M=A'D$,

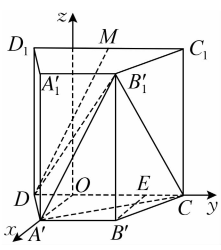
所以四边形 $A'DMB_1'$ 为平行四边形,

所以 $DM/\!/A'B_1'$, ······························· 4 分

又 $A'B_1'\subset$平面 $A'B_1'C$,$DM\not\subset$平面 $A'B_1'C$,

所以 $DM/\!/$平面 $A'B_1'C$. ······························· 6 分

(2)解:如图,过 A' 作 $A'O\perp CD$ 于点 O,过 B' 作 $B'E\perp CD$ 于点 E,



因为 $B'C=\frac{\sqrt{5}}{2}$,$\tan\angle B'CD=2$,所以 $B'E=1$,$CE=\frac{1}{2}$,

因为 $A'B'/\!/CD$,所以 $A'O=B'E=1$,$A'B'=OE=1$,

又因为 $A'O\perp CD$,$B'E\perp CD$,所以 $OD=\frac{1}{2}$,

以 O 为坐标原点,分别以 OA',OC 所在直线为 x 轴,y 轴,过点 O 且平行于 DD_1 的直线为 z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系.

则 $A'(1,0,0)$,$C(0,\frac{3}{2},0)$,$B_1'(1,1,2)$,$D(0,-\frac{1}{2},0)$,

则$\overrightarrow{A'B_1'}=(0,1,2)$,$\overrightarrow{DA'}=(1,\frac{1}{2},0)$,$\overrightarrow{A'C}=(-1,\frac{3}{2},0)$.

设平面 $DA'B_1'$ 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

所以$\begin{cases}\overrightarrow{A'B_1'}\cdot\boldsymbol{m}=0\\\overrightarrow{DA'}\cdot\boldsymbol{m}=0\end{cases}$,即$\begin{cases}y_1+2z_1=0\\x_1+\frac{1}{2}y_1=0\end{cases}$,

令 $y_1=-2$,则 $z_1=1,x_1=1$,即 $\boldsymbol{m}=(1,-2,1)$. ······ 10 分

设平面 $A'B_1'C$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

所以$\begin{cases}\overrightarrow{A'B_1'}\cdot\boldsymbol{n}=0\\\overrightarrow{A'C}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$,即$\begin{cases}y_2+2z_2=0\\-x_2+\frac{3}{2}y_2=0\end{cases}$,

令 $y_2=-2$,则 $z_2=1,x_2=-3$,即 $\boldsymbol{n}=(-3,-2,1)$. ······ 12 分

则 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{-3+4+1}{\sqrt{6}\times\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{21}}{21}$, ······ 14 分

所以平面 $DA'B_1'$ 与平面 $A'B_1'C$ 夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{21}}{21}$. ······ 15 分

18. 解:(1)由 $a_2=4,a_1a_2=4^{\frac{3}{2}}=8$,得 $a_1=2$. ······ 1 分

由 $a_na_{n+1}=4^{n+\frac{1}{2}}$ 得 $a_{n+1}a_{n+2}=4^{n+\frac{3}{2}}$. 两式相除得$\frac{a_{n+2}}{a_n}=4$, ······ 3 分

所以数列$\{a_{2n-1}\}$,$\{a_{2n}\}$都是公比为 4 的等比数列, ······ 5 分

所以 $a_{2n-1}=a_1\times4^{n-1}=2\times4^{n-1}=2^{2n-1}$,$a_{2n}=a_2\times4^{n-1}=4\times4^{n-1}=2^{2n}$, ······ 6 分

所以 $a_n=2^n$. ······ 7 分

(2)由 $a_{i+1}-a_i\geqslant\frac{a_ia_{i+1}}{2i^2}$得 $2^{i+1}-2^i\geqslant\frac{2^{2i+1}}{2i^2}$,整理得 $2^i-i^2\leqslant0$, ······ 9 分

令 $b_n=2^n-n^2$,则 $b_1=1>0,b_2=0,b_3=-1<0,b_4=0$, ······ 11 分

当 $n\geqslant5$ 时,$b_n=2^n-n^2=\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}+\mathrm{C}_n^n-n^2\geqslant\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_n^{n-2}+\mathrm{C}_n^{n-1}+\mathrm{C}_n^n-n^2=2\left[1+n+\frac{n(n-1)}{2}\right]-n^2=n+2>0$, ······ 13 分

从数列$\{a_n\}$的前 10 项中任取 3 项,共有 C_{10}^3 种取法,所取 3 项中有“和谐相邻数对”,则这 3 项中有(a_2,a_3)或(a_3,a_4)或(a_4,a_5), ······ 15 分

所以所求概率为$\frac{2+2\mathrm{C}_7^1+\mathrm{C}_6^1}{\mathrm{C}_{10}^3}=\frac{22}{120}=\frac{11}{60}$. ······ 17 分

19. (1)证明:$f'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x}$, ······ 1 分

易知函数 $y=\ln x$ 和 $y=-\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上都是增函数,

所以 $f'(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数, ······ 2 分

又 $f'(1)=0$,

当 $0<x<1$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;

当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,

所以当 $x=1$ 时,$f(x)$取到极小值 $f(1)=0$, ······ 3 分

因为 $f(1)=0$,

所以 $x=1$ 为函数 $f(x)$的零点, ······ 4 分

综上,1 既是 $y=f(x)$的一个零点,又是 $y=f(x)$的一个极小值点. ······ 5 分

(2)解:因为 $g(x)=x\ln x-\ln x-x+1$,所以 $g'(x)=\ln x-\frac{1}{x}$, ······ 6 分

显然 $g'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,

且 $g'(1)=-1<0,g'(2)=\ln2-\frac{1}{2}=\frac{\ln4-1}{2}>0$.

故根据零点存在性定理知 $g'(x)$在$(0,+\infty)$上有且仅有一个零点 x_0, ······ 7 分

且在$(0,x_0)$上,$g'(x)<0$,在$(x_0,+\infty)$上,$g'(x)>0$,

所以 $g(x)$在$(0,x_0)$上单调递减,在$(x_0,+\infty)$上单调递增, ······ 9 分

所以 $g(x)$ 的极值点个数为 1. …………………………………………………………………………………… 10 分

(3)证明：$h(x)=\ln x-ax$，要证 $x_1x_2>e^2$，两边同时取自然对数得 $\ln x_1+\ln x_2>\ln e^2=2$.

由 x_1,x_2 为零点，得 $\begin{cases}\ln x_1-ax_1=0\\ \ln x_2-ax_2=0\end{cases}$，得 $a=\dfrac{\ln x_1+\ln x_2}{x_1+x_2}=\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$.

所以原命题等价于证明 $\ln x_1+\ln x_2=\dfrac{(x_1+x_2)(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}>2$.

只需证 $\ln x_1-\ln x_2<\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}$，即 $\ln\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{2\left(\dfrac{x_1}{x_2}-1\right)}{\dfrac{x_1}{x_2}+1}<0$.

令 $t=\dfrac{x_1}{x_2}$，$0<x_1<x_2$，则 $0<t<1$，设 $\varphi(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}(0<t<1)$，只需证 $\varphi(t)<0$.

而 $\varphi'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，故 $\varphi(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $\varphi(t)<\varphi(1)=0$.

综上得 $x_1x_2>e^2$. …………………………………………………………………………………… 17 分

（五）

1. D　因为集合 $M=\{0,3\}$，$N=\{x+y\mid x\in M,y\in M\}=\{0,3,6\}$，所以 $M\cap N=\{0,3\}$，故选 D.

2. C　抛物线的方程化为 $x^2=\dfrac{1}{2\ 025}y$，则 $2p=\dfrac{1}{2\ 025}$，所以 $p=\dfrac{1}{4\ 050}$，抛物线焦点到其准线的距离为 p，故选 C.

3. D　由题意可得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B$，即 $49=9+BC^2+3BC$，整理得 $BC^2+3BC-40=0$，解得 $BC=5$ 或 $BC=-8$（舍去），所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B=\dfrac{1}{2}\times3\times5\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$. 故选 D.

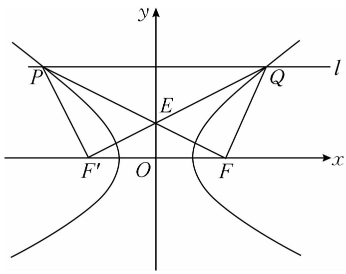
4. D　$\because\sin(\pi+\alpha)=\tan(\pi-\beta)=-\dfrac{1}{5}$，$\therefore\sin\alpha=\tan\beta=\dfrac{1}{5}$，$\therefore\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\dfrac{1}{25}=\dfrac{23}{25}$，$\tan2\beta=\dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\dfrac{2\times\dfrac{1}{5}}{1-\dfrac{1}{25}}=\dfrac{5}{12}$，$\therefore\cos2\alpha\tan2\beta=\dfrac{23}{25}\times\dfrac{5}{12}=\dfrac{23}{60}$. 故选 D.

5. C　函数 $f(x)=\begin{cases}x-1,x>a\\ ax^2+2x-3,x\leqslant a\end{cases}$ 有且只有 1 个极值点，
当 $a=0$ 时，没有极值点；
当 $a\neq0$ 时，$f'(x)=\begin{cases}1,x>a\\ 2ax+2,x\leqslant a\end{cases}$，取 $2ax+2=0$，得到 $x=-\dfrac{1}{a}$，当 $x\leqslant a$ 时，函数为二次函数，则 $-\dfrac{1}{a}<a$，故 $a>0$.
综上所述，$a\in(0,+\infty)$. 故选 C.

6. A　设 $O_1O_2=h$，球 O 半径为 r，则圆 O_2 半径为 $\dfrac{1}{2}h$，由题意知 $(h-r)^2+\left(\dfrac{1}{2}h\right)^2=r^2$，得 $r=\dfrac{5}{8}h$，所以圆锥 O_1O_2 的底面积与球 O 的表面积之比为 $\dfrac{\pi\left(\dfrac{1}{2}h\right)^2}{4\pi\left(\dfrac{5}{8}h\right)^2}=\dfrac{4}{25}$，故选 A.

7. C　对于 A，每个养老院至少一位同学去，则有 $\dfrac{C_4^2C_2^1C_1^1}{A_2^2}\cdot A_3^3=36$ 种不同的安排方法，若甲去 D 养老院且 D 养老院安排 2 人，则有 $A_3^3=6$ 种方法. 若甲去 D 养老院且 D 养老院安排 1 人，则有 $C_3^2A_2^2=6$ 种方法，所以安排甲去 D 养老院的不同安排方法共有 $6+6=12$ 种，则 $P(A)=\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$，同理 $P(B)=\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$. 若安排甲、乙同时去 D 养老院，则 E,F 养老院各安排 1 人，有 $A_2^2=2$ 种不同的安排方法，所以 $P(AB)=\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$，因为 $P(AB)\neq P(A)P(B)$，事件 A 与 B 不相互独立，故 A 错误；对于 B，在一次试验中，不可能同时发生的两个事件称为互斥事件，事件 A 与 C 可以同时发生，故事件 A 与 C 不是互斥事件，故 B 错误；对于 C，在安排甲去 D 养老院的同时安排乙去 E 养老院的不同安排方法有 $C_2^1C_3^1-1=5$ 种，所以 $P(AC)=\dfrac{5}{36}$，所以 $P(C|A)=$

$\dfrac{P(AC)}{P(A)}=\dfrac{\frac{5}{36}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{5}{12}$,故 C 正确;对于 D,$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{6}$,故 D 错误. 故选 C.



8. C　如图所示,取 C 的左焦点 F',连接 PF',根据双曲线的对称性可知,四边形 $PQFF'$ 为等腰梯形,连接 QF',设 $QF'\cap PF=E$,因为 $\angle QFO=105°$,$\angle PFQ=60°$,所以 $\angle PFF'=45°$.

设 $F(c,0)$,由等腰梯形的性质可知 $\angle QF'F=45°$,则 $PF\perp QF'$,所以 $|EF|=|EF'|=\dfrac{|OF'|}{\cos 45°}=\sqrt{2}c$,

在 Rt$\triangle QEF$ 中,$\angle EQF=30°$,则 $|QF|=2|EF|=2\sqrt{2}c$,$|QE|=\sqrt{|QF|^2-|EF|^2}=\sqrt{6}c$,所以 $|QF'|=(\sqrt{2}+\sqrt{6})c$,

根据双曲线的定义可知,$|QF'|-|QF|=(\sqrt{2}+\sqrt{6})c-2\sqrt{2}c=2a$,所以 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$,故选 C.

9. AC　当 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-2+3)^2+(1+m)^2}=\sqrt{1+(1+m)^2}=1$ 时,$1+m=0$,$m=-1$,A 正确;当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线时,$-2m-3=0$,$m=-\dfrac{3}{2}$,B 错误;当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时,$-2\times3+1\times m=0$,$m=6$,C 正确;当 $m=0$ 时,$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-6}{\sqrt{5}\times3}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,D 错误,故选 AC.

10. ACD　令 $x=-2$,$y=2$,得 $f(4)f(0)=f(-2)f(2)-2f(0)$,即 $2f(4)=-4$,$f(4)=-2$,A 正确;

令 $y=-2$,所以 $f(2-x)f(4)=f(x)f(-2)-2f(x-2)$,则 $-2f(2-x)=-2f(x-2)$,所以 $f(2-x)=f(x-2)$,即 $f(-x)=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数,B 错误;

由 $f(x)$ 为偶函数得 $f(2)=0$,令 $y=2$ 得 $f(2-x)f(0)=f(x)f(2)-2f(x+2)$,所以 $f(2-x)=-f(x+2)$,又 $f(2-x)=f(x-2)$,所以 $f(x-2)=-f(x+2)$,则 $f(x)=-f(x+4)$,所以 $f(x)=-f(x+4)=f(x+8)$,所以 $f(x)$ 的一个周期是 8,C 正确;

由 $f(x)=-f(x+4)$ 得 $f(x)+f(x+4)=0$,则 $f(1)+f(5)=0$,$f(2)+f(6)=0$,$f(3)+f(7)=0$,$f(4)+f(8)=0$,所以 $\sum\limits_{i=1}^{8}f(i)=0$,则 $\sum\limits_{i=1}^{200}f(i)=25\sum\limits_{i=1}^{8}f(i)=0$,D 正确. 故选 ACD.

11. ABD　设直线 l 的方程为 $y=kx$,则 $A(1,k)$,

设 $B(x_1,y_1)$,则 $\dfrac{y_1}{x_1}=k$,所以 $\overrightarrow{AB}=(x_1-1,y_1-k)=(x_1-1,y_1-\dfrac{y_1}{x_1})$,

设 $C(x,y)$,则 $\overrightarrow{OC}=(x,y)$,由 $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AB}=\mathbf{0}$ 得 $\begin{cases}x=-(x_1-1),\\ y=-(y_1-\dfrac{y_1}{x_1}),\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x_1=1-x,\\ y_1=\dfrac{x_1y}{1-x_1}=\dfrac{(1-x)y}{x},\end{cases}$

将点 $B(x_1,y_1)$ 代入 $(x-1)^2+y^2=1$,得 $x^2+\dfrac{(1-x)^2y^2}{x^2}=1$,所以 $x^4+(1-x)^2y^2=x^2$,

则 $(1-x)^2y^2=x^2-x^4=x^2(1-x^2)$.

又直线 $x=1$ 是曼叶蚌线的渐近线,所以 $x\neq1$,所以 $(1-x)y^2=x^2(1+x)$,所以 $y^2=\dfrac{x^2(1+x)}{1-x}$,A 正确;

因为 $y^2\geqslant0$,所以 $\dfrac{x^2(1+x)}{1-x}\geqslant0$,解得 $-1\leqslant x<1$,所以 $-1\leqslant x_0<1$,B 正确;

在曲线 Ω 方程中将 x 换为 $-x$,将 y 换为 $-y$,得 $y^2=\dfrac{x^2(1-x)}{1+x}$,所以曲线 Ω 上不存在关于原点 O 对称的两点,C 错误;

易知曲线 Ω 关于 x 轴对称,设 $f(x)=\dfrac{x^2(1+x)}{1-x}$,则 $f'(x)=\dfrac{2x(1+x-x^2)}{(1-x)^2}$,

令 $f'(x)=0$,解得 $x=0$ 或 $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 或 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,

当 P 在第二象限时,若 $x\in(-1,\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})$,则 $f'(x)>0$,若 $x\in(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},0)$,则 $f'(x)<0$,

所以 $f(x)$在$(-1,\frac{1-\sqrt{5}}{2})$上单调递增，在$(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0)$上单调递减，则 $f(x)\leqslant f(\frac{1-\sqrt{5}}{2})=\dfrac{(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2\times\frac{3-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

$=\frac{5\sqrt{5}-11}{2}$，所以 $y_0^2\leqslant\frac{5\sqrt{5}-11}{2}$，则 y_0 的最大值为$\frac{\sqrt{10\sqrt{5}-22}}{2}$，D 正确，故选 ABD.

12. -6　$3i(1+i)=3i-3=a+bi$，又 $a,b\in\mathbf{R}$，则 $a=-3,b=3$，则 $a-b=-6$.

13. $\sqrt{3}$　$2\sin\left(\omega x_i+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{3}$，$\therefore\sin\left(\omega x_i+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$i=1,2$，所以 $\omega x_i+\frac{\pi}{4}=\frac{4}{3}\pi+2k\pi$ 或$\frac{5}{3}\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，$\omega|x_1-x_2|\geqslant\frac{\pi}{3}$，$\therefore\omega\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}$，$\therefore\omega=\frac{2}{3}$，$f(x)=2\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

14. $\sqrt{2}$　设 $f(x)=t$，则 $f(t)-t+1=0$，当 $t\leqslant0$ 时，得 $t^2-1-t+1=0$，解得其根 $t_1=0$，当 $t>0$ 时得$|\ln t|-t+1=0$，由图象可得该方程只有 1 个实根 $t_2=1$. 方程 $f(x)=0$ 的根为 $x_1=-1,x_2=1$，方程$f(x)=1$ 有 3 个实根 $x_3,x_4,x_5(x_3<x_4<x_5)$，其中 $x_3=-\sqrt{2}$，$x_4x_5=1$，所以方程 $f(f(x))-f(x)=-1$的所有实根之积为$\sqrt{2}$.

15. 解：(1)由 $f(x)=e^{2x}-2x$ 得 $f'(x)=2e^{2x}-2$，…… 2 分

又 $f'(0)=0,f(0)=1$，…… 3 分

所以曲线 $y=f(x)$在$(0,1)$处的切线为 $y=1$. …… 4 分

(2)由 $f(x)>2(e-1)x+m$ 得 $e^{2x}-2x>2(e-1)x+m$，即 $e^{2x}-2ex>m$. …… 5 分

构造函数 $g(x)=e^{2x}-2ex$，则 $g'(x)=2e^{2x}-2e$，…… 6 分

令 $g'(x)=2e^{2x}-2e>0$，得 $x>\frac{1}{2}$，…… 7 分

故当 $x>\frac{1}{2}$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，$x<\frac{1}{2}$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，…… 9 分

故当 $x=\frac{1}{2}$，$g(x)$取极小值也是最小值，$g\left(\frac{1}{2}\right)=e-e=0$，…… 11 分

所以 $m<g(x)_{\min}$，即 $m<0$. …… 13 分

16. (1)解：由题意可知数列$\{\frac{1}{a_n}\}$的公差 $d>0$，…… 1 分

又 $b_3=a_3\cdot a_4=\frac{1}{35}$，则$\frac{1}{a_3\cdot a_4}=35$，…… 2 分

所以$(3+d)(3+2d)=35$，…… 3 分

解得 $d=2$ 或 $d=-\frac{13}{2}$(舍去)，

故数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的公差$d$ 为 2. …… 4 分

(2)证明：由(1)得$\frac{1}{a_n}=3+2(n-2)=2n-1$，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{1}{2n-1}$. …… 5 分

$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{2n+1}}=\frac{2n+1}{2n-1}=\frac{(2n-1)+2}{2n-1}=1+\frac{2}{2n-1}$，…… 7 分

又 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $1<1+\frac{2}{2n-1}\leqslant3$，…… 8 分

所以 $1<\frac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant3$，故 $a_{n+1}<a_n\leqslant3a_{n+1}$. …… 9 分

(3)解：由(1)得 $b_n=a_n\cdot a_{n+1}=\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$，…… 11 分

故 $S_n=\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]$ ………………………………………… 13 分

$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+1}$. ………………………………………………………… 15 分

17. 解:(1)依题可知,第一个表格中第一组频率为 $0.03>1.5\%$,

要使漏诊率 $f(k)=1.5\%$,则 k 为第一组区间的中点值,即 $k=75$, ……………………………… 3 分

所以 $g(k)=\frac{0.05}{2}+0.03=0.055=5.5\%$. …………………………………………………… 5 分

(2)当 $k\in[70,80)$时,

$f(k)=\frac{k-70}{10}\times0.03$, $g(k)=\frac{80-k}{10}\times0.05+0.03$,

所以 $h(k)=f(k)+g(k)=\frac{k-70}{10}\times0.03+\frac{80-k}{10}\times0.05+0.03=0.22-0.002k>0.06$. ……………… 8 分

当 $k\in[80,90]$时,

$f(k)=0.03+\frac{k-80}{10}\times0.06$, $g(k)=0.03\times\frac{90-k}{10}$,

所以 $h(k)=f(k)+g(k)=0.03+\frac{k-80}{10}\times0.06+0.03\times\frac{90-k}{10}=0.003k-0.18$, ……………… 11 分

当 $k=80$ 时,$h(k)_{\min}=h(80)=0.06$. …………………………………………………………… 12 分

故 $h(k)=\begin{cases}0.22-0.002k, 70\leqslant k<80\\0.003k-0.18, 80\leqslant k\leqslant90\end{cases}$, …………………………………………………… 14 分

所以 $h(k)$在区间$[70,90]$上的最小值为 0.06. ……………………………………………… 15 分

18. (1)解:因为点 $P(\sqrt{2},1)$在 C 上,所以$\frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$, …………………………………………… 1 分

因为 $A_1(-a,0)$,$A_2(a,0)$,且直线 PA_1,PA_2 斜率之积为$-\frac{1}{2}$,

所以$\frac{1}{\sqrt{2}+a}\times\frac{1}{\sqrt{2}-a}=-\frac{1}{2}$,

解得 $a^2=4$, …………………………………………………………………………………… 3 分

所以$\frac{2}{4}+\frac{1}{b^2}=1$,$b^2=2$,

所以 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. ……………………………………………………………… 5 分

(2)证明:因为直线 MN 过点 $Q(-4,0)$,设其方程为 $x=my-4$,

与$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 联立得$(m^2+2)y^2-8my+12=0$,

所以 $y_1+y_2=\frac{8m}{m^2+2}$,$y_1y_2=\frac{12}{m^2+2}$,$my_1y_2=\frac{3}{2}(y_1+y_2)$, ………………………………… 7 分

(i)直线 A_1M 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$,

直线 A_2N 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$, ……………………………………………………… 8 分

联立两方程得$\frac{x+2}{x-2}=\frac{y_2(x_1+2)}{y_1(x_2-2)}=\frac{y_2(my_1-2)}{y_1(my_2-6)}=\frac{my_1y_2-2y_2}{my_1y_2-6y_1}$

$=\frac{\frac{3}{2}(y_1+y_2)-2y_2}{\frac{3}{2}(y_1+y_2)-6y_1}=\frac{\frac{3}{2}y_1-\frac{1}{2}y_2}{-\frac{9}{2}y_1+\frac{3}{2}y_2}=-\frac{1}{3}$. …………………………………………… 10 分

解得 $x=-1$,所以点 R 在定直线 $x=-1$ 上. …………………………………………………… 11 分

(ii)由(1)得 l_1:$\frac{x_1x}{4}+\frac{y_1y}{2}=1$,$l_2$:$\frac{x_2x}{4}+\frac{y_2y}{2}=1$,

联立解得 $x=\frac{4(y_2-y_1)}{x_1y_2-x_2y_1}=\frac{4(y_2-y_1)}{(my_1-4)y_2-(my_2-4)y_1}=-1$, …………………………… 13 分

所以$-\frac{x_1-x_2}{4}=-\frac{y(y_1-y_2)}{2}$，$y=\frac{x_1-x_2}{2(y_1-y_2)}=\frac{m(y_1-y_2)}{2(y_1-y_2)}=\frac{m}{2}$，

所以$G\left(-1,\frac{m}{2}\right)$，直线$OG$的斜率为$-\frac{m}{2}$， …………………………………………………… 15分

又$\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{4m}{m^2+2}$，$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{m(y_1+y_2)}{2}-4=\frac{4m^2}{m^2+2}-4=\frac{-8}{m^2+2}$，

所以$H\left(\frac{-8}{m^2+2},\frac{4m}{m^2+2}\right)$，所以直线$OH$的斜率为$-\frac{m}{2}$，

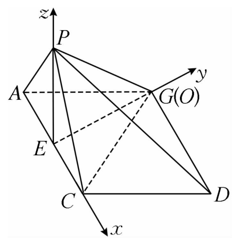
所以点O,G,H共线. …………………………………………………………………………… 17分

19.(1)证明：过A,D分别作CD,AC的平行线，交于点G，

易知四边形$ACDG$为菱形，则$GA=GD=2$. …………………………………………………… 1分

连接GC，则$GC=2$，取AC的中点E，连接GE,PE,PG，则$GE\perp AC$，$GE=\sqrt{3}$， ……………… 2分

因为平面$PAC\perp$平面ACD，所以$GE\perp$平面PAC，则$GE\perp PE$，



又$AP\perp PC$，所以$PE=\frac{1}{2}AC=1$， …………………………………………………… 3分

所以$GP^2=GE^2+PE^2=(\sqrt{3})^2+1^2=4$，则$GP=2$， ………………………………………… 4分

即$GA=GC=GD=GP=2$，所以G为球O的球心，即G与O重合，

故四点A,C,D,O共面. …………………………………………………………………… 5分

(2)解：当$PA=PC$时，$PE\perp AC$. 以E为坐标原点，以EC,EO,EP所在直线分别为x,y,z轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则$C(1,0,0)$，$P(0,0,1)$，$O(0,\sqrt{3},0)$，$D(2,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{CO}=(-1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{CP}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{CD}=(1,\sqrt{3},0)$， …………………………………………………… 6分

设平面PCD的法向量为$\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{CP}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x_1+z_1=0,\\x_1+\sqrt{3}y_1=0,\end{cases}$取$x_1=\sqrt{3}$，则$\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-1,\sqrt{3})$， …………………………… 8分

故球心O到平面PCD的距离为$d=\frac{|\overrightarrow{CO}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$. ………………………………………… 10分

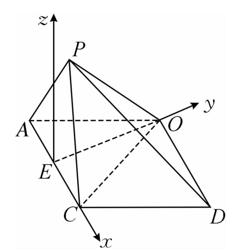
(3)解：以E为坐标原点，以EC,EO所在直线分别为x,y轴，在平面PAC内垂直于AC的直线为z轴，建立如图所示的空间直角坐标系.

设$\angle ACP=\alpha$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则$PC=AC\cos\alpha=2\cos\alpha$， …………………………………………… 11分

$D(2,\sqrt{3},0)$，$P(1-2\cos^2\alpha,0,2\cos\alpha\sin\alpha)$，$\overrightarrow{DP}=(-1-2\cos^2\alpha,-\sqrt{3},2\sin\alpha\cos\alpha)$. ……………… 12分

易知z轴$\perp$平面ACD，取平面ACD的法向量为$\boldsymbol{n}=(0,0,1)$， ……………………… 13分

设直线DP与平面ACD所成的角为θ，



$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{DP},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{(-1-2\cos^2\alpha)^2+(2\sin\alpha\cos\alpha)^2+3}}$ ………………… 14分

$=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{2\cos^2\alpha+1}}=\sqrt{\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{3\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}=\sqrt{\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(3\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}}$

$=\sqrt{\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{3\cos^4\alpha+4\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^4\alpha}}=\sqrt{\frac{1}{\frac{3}{\tan^2\alpha}+\tan^2\alpha+4}}$ ………………………… 15分

$\leqslant\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{\tan^2\alpha}\cdot\tan^2\alpha}+4}}=\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}+4}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，当且仅当$\tan\alpha=\sqrt[4]{3}$时取得等号， ………………… 16分

故直线DP与平面ACD所成角的正弦值的最大值为$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. …………………………………… 17分

1. A　依题意，$(3-\mathrm{i})(1+a\mathrm{i})=(3+a)+(3a-1)\mathrm{i}$，而 $a\in\mathbf{R}$，则 $\begin{cases}a+3=0\\3a-1\neq0\end{cases}$，解得 $a=-3$. 故选 A.

2. C　因为全集 $U=\{0,1,2,3,4\}$，集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{1,4\}$，所以 $\complement_U B=\{0,2,3\}$，所以 $A\cup(\complement_U B)=\{0,1,2,3\}$. 故选 C.

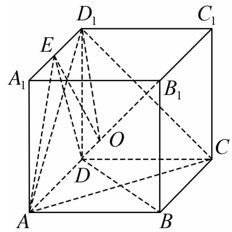
3. A　抽样比为 $6:3=2:1$，所以可以先从 A 部门抽取 2 名员工，再从 B 部门抽取 1 名员工，不同的抽样结果共有 $C_6^2C_3^1=15\times3=45$ 种. 故选 A.

4. D　因为 $x>0$ 时，$x+\frac{4}{x}\geqslant2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$，当且仅当 $x=\frac{4}{x}$，即 $x=2$ 时取等，则当命题“$\forall x>0,x+\frac{4}{x}\geqslant m$”为真命题时 $m\leqslant\left(x+\frac{4}{x}\right)_{\min}=4$，所以命题为假命题时 $m>4$. 故选 D.

5. D　当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2+2x=(x+1)^2-1$，其在 $(-1,0)$ 上单调递增，因为 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\begin{cases}a>0\\\ln a\geqslant0\end{cases}$，所以 $a\geqslant1$. 故选 D.

6. B　设 $|\overrightarrow{OA}|=R$，由 $3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+k\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$ 得 $3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{CO}$，两边平方得 $10R^2+6R^2\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle=k^2R^2$，整理得 $\frac{k^2-10}{6}=\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle$，因为 $\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle$ 为锐角，所以 $0<\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle<1$，即 $0<\frac{k^2-10}{6}<1$，所以 k 的取值范围是 $(-4,-\sqrt{10})\cup(\sqrt{10},4)$，故选 B.

7. A　如图所示，球心 O 在 B_1D 上，设 $OD=x$，$DE=\sqrt{5}$，$DB_1=2\sqrt{3}$，$\cos\angle EDO=\frac{\frac{1}{2}DB_1}{DE}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$，所以 $OE=\sqrt{DE^2+DO^2-2DE\cdot DO\cdot\cos\angle EDO}=\sqrt{x^2-2\sqrt{3}x+5}$，$\cos\angle ODD_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$，所以 $OD_1=\sqrt{DD_1^2+DO^2-2DD_1\cdot DO\cdot\cos\angle ODD_1}=\sqrt{x^2-\frac{4\sqrt{3}}{3}x+4}$，因为球 O 的半径 $R=OE=OD_1$，所以 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$R=\frac{\sqrt{11}}{2}$，球 O 表面积为 $4\pi R^2=11\pi$，故选 A.



8. C　由题知，$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\2c=2\sqrt{2},\\a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=\sqrt{2},\\c=\sqrt{2},\end{cases}$ 所以椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$. 设点 $P(x,y)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，由 $\overrightarrow{NP}=2\overrightarrow{OM}$，得 $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$，得 $\begin{cases}x=2x_1+x_2,\\y=2y_1+y_2,\end{cases}$ 因为点 M,N 在椭圆 C 上，所以 $\frac{x_1^2}{2}+\frac{y_1^2}{4}=1$，$\frac{x_2^2}{2}+\frac{y_2^2}{4}=1$，将 $\begin{cases}x_2=x-2x_1,\\y_2=y-2y_1\end{cases}$ 代入 $\frac{x_2^2}{2}+\frac{y_2^2}{4}=1$，得 $\frac{(x-2x_1)^2}{2}+\frac{(y-2y_1)^2}{4}=1$，整理得 $2x^2+y^2-8x_1x-4y_1y+8x_1^2+4y_1^2=4$，将 $\begin{cases}x=2x_1+x_2,\\y=2y_1+y_2\end{cases}$ 代入，得 $2x^2+y^2-8x_1(2x_1+x_2)-4y_1(2y_1+y_2)+8x_1^2+4y_1^2=4$，整理得 $2x^2+y^2-4(2x_1x_2+y_1y_2)-4(2x_1^2+y_1^2)=4$，又 $\frac{x_1^2}{2}+\frac{y_1^2}{4}=1$，则 $2x^2+y^2-4(2x_1x_2+y_1y_2)-16=4$，又 $k_1\cdot k_2=\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-2$，即 $2x_1x_2+y_1y_2=0$，所以 $2x^2+y^2-16=4$，即 $2x^2+y^2=20$，所以动点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{20}=1$，故选 C.

9. AD　$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+3\cos 2x=2\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 φ 个单位长度后得函数 $g(x)=2\sqrt{3}\sin(2x+2\varphi+\frac{\pi}{3})$ 的图象，若 $g(x)$ 是偶函数，则 $2\varphi+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,

又 $0<\varphi<\pi$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{12}$ 或 $\varphi=\frac{7\pi}{12}$. 故选 AD.

10. BCD　对于 A,因为 $n=6$ 时 S_n 最小,所以 $\begin{cases}a_6\leqslant 0\\a_7\geqslant 0\end{cases}$,即 $\begin{cases}18+r\leqslant 0\\21+r\geqslant 0\end{cases}$,所以 $-21\leqslant r\leqslant -18$,A 错误;对于 B,设 $\{a_n\}$ 的公差为 d,由 $S_4\geqslant 2,S_5\leqslant 15$,得 $2a_1+3d\geqslant 1,a_1+2d\leqslant 3$,所以 $S_7=7a_1+21d=-7(2a_1+3d)+21(a_1+2d)\leqslant -7+63=56$,B 正确;对于 C,因为 $a_1^2+a_4^2=10$,所以 $(a_3-2d)^2+(a_3+d)^2=10$,即 $5d^2-2a_3d+2a_3^2-10=0$,把该式看作关于 d 的一元二次方程,则 $\Delta=4a_3^2-20(2a_3^2-10)\geqslant 0$,所以 $-\frac{5\sqrt{2}}{3}\leqslant a_3\leqslant\frac{5\sqrt{2}}{3}$,$S_5=5a_3\leqslant\frac{25\sqrt{2}}{3}$,C 正确;对于 D,由题意得 $t=-1,S_n=n^2-7sn$,因为 S_7 最小,所以 $6.5\leqslant\frac{7s}{2}\leqslant 7.5$,$\frac{13}{7}\leqslant s\leqslant\frac{15}{7}$,D 正确,故选 BCD.

11. ACD　由 $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$,得 $f'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}$,当 $x\in(0,2)$ 时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$ 单调递减;当 $x\in(2,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 单调递增,所以 $f(x)\geqslant f(2)=1+\ln 2>1+\ln\sqrt{e}=\frac{3}{2}$,故 A 正确;$g(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}+\ln x(x>0)$,所以 $g'(x)=\frac{4}{x^3}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x^2-3x+4}{x^3}>0$,所以 $g(x)$ 单调递增,无极值,故 B 错误;要证 $x_1+x_2>4$,即证 $x_1>4-x_2$,不妨设 $0<x_1<x_2$,由 $f(x_1)=f(x_2)$,$x_1\in(0,2)$,$x_2>2$. 设 $t(x)=f(x)-f(4-x)=\frac{2}{x}+\ln x-\frac{2}{4-x}-\ln(4-x)$,$x\in(0,2)$,$t'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{2}{(4-x)^2}+\frac{1}{4-x}=\frac{-8(x-2)^2}{x^2(4-x)^2}<0$,所以 $t(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减,所以 $t(x)>t(2)=0$,所以 $f(x)>f(4-x)$,即 $f(x_1)>f(4-x_1)$,又 $f(x_2)=f(x_1)>f(4-x_1)$,$x_1\in(0,2)$,$4-x_1\in(2,4)$,$x_2\in(2,+\infty)$,又 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增,所以有 $x_2>4-x_1$,即 $x_1+x_2>4$,故 C 正确;当 $x\in(1,e^3)$ 时,不等式 $ax^2+2x+3>xf(x)$ 恒成立,即不等式 $ax^2+2x+3>x\ln x+2$ 恒成立,所以 $a>\frac{\ln x}{x}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$ 恒成立. 令 $m(x)=\frac{\ln x}{x}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}(1<x<e^3)$,则 $m'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}=\frac{3x-x\ln x+2}{x^3}$,令 $h(x)=3x-x\ln x+2(1<x<e^3)$,则 $h'(x)=2-\ln x$,所以当 $x\in(1,e^2)$ 时,$h'(x)>0$,当 $x\in(e^2,e^3)$ 时,$h'(x)<0$,所以 $h(x)$ 在区间 $(1,e^2)$ 上单调递增,在区间 (e^2,e^3) 上单调递减,又 $h(1)=5>0$,$h(e^3)=2>0$,所以当 $x\in(1,e^3)$ 时,$h(x)>0$,所以 $m'(x)>0$,所以函数 $m(x)=\frac{\ln x}{x}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$ 在区间 $(1,e^3)$ 上是增函数,所以 $m(x)<m(e^3)=\frac{1}{e^3}-\frac{1}{e^6}$,所以 $a\geqslant\frac{1}{e^3}-\frac{1}{e^6}$,故 D 正确. 故选 ACD.

12. 150　因为 $8\times 75\%=6$,则数据的 75% 分位数为第 6 个数与第 7 个数和的平均数,即为 $(120+180)\div 2=150$.

13. 3 900　因为 $f(x+y)=f(x)+f(y)+12xy$,所以 $f(x+y)-6(x+y)^2=f(x)-6x^2+f(y)-6y^2$,

设 $g(x)=f(x)-6x^2$,那么 $g(x+y)=g(x)+g(y)$,

因此 $g(n)=g(n-1)+g(1)=g(n-2)+g(1)+g(1)=g(n-2)+2g(1)$

$=\cdots=g(2)+(n-2)g(1)=ng(1)=n[f(1)-6]$,

因此 $f(n)=6n^2+[f(1)-6]n\geqslant 6n$,

取 $n=1$,得到 $f(1)\geqslant 6$,所以 $\sum\limits_{i=1}^{12}f(i)=6\sum\limits_{i=1}^{12}i^2+[f(1)-6]\sum\limits_{i=1}^{12}i\geqslant 6\sum\limits_{i=1}^{12}i^2=3\ 900$,

所以 $\sum\limits_{i=1}^{12}f(i)$ 的最小值是 3 900.

14. $\pm\sqrt{2}x-y+2=0$　设抛物线 $E:x^2=2py(p>0)$,则由抛物线的定义知 $|FA|=3+\frac{p}{2}=4$,解得 $p=2$,所以抛物线 $E:x^2=4y$,$F(0,1)$,所以 $B(0,2)$. 抛物线 E 上一点 (m,n) 处的切线的斜率为 $\frac{1}{2}m$,切线方程为

$y-n=\frac{1}{2}m(x-m)$，又 $m^2=4n$，可得切线方程为 $mx-2y-2n=0$. 设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，可得 C,D 处的切线方程分别为 $x_1x-2y-2y_1=0$，$x_2x-2y-2y_2=0$，两式相减可得 $x=\frac{2(y_1-y_2)}{x_1-x_2}=\frac{2\left(\frac{1}{4}x_1^2-\frac{1}{4}x_2^2\right)}{x_1-x_2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$，设直线 $l:y=kx+2$，与 $x^2=4y$ 联立，可得 $x^2-4kx-8=0$，则 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-8$，则 P 的横坐标为 $x=2k$，纵坐标为 $y=\frac{xx_1}{2}-y_1=kx_1-\frac{x_1^2}{4}=\frac{x_1(x_1+x_2)}{4}-\frac{x_1^2}{4}=\frac{x_1x_2}{4}=-2$，即 $P(2k,-2)$，可得 P 到直线 $y=kx+2$ 的距离 $d=\frac{2k^2+4}{\sqrt{1+k^2}}$，$|CD|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{16k^2+32}$，则 $\frac{1}{2}d|CD|=32$，化为 $(2+k^2)\sqrt{2+k^2}=8$，即为 $\sqrt{2+k^2}=2$，解得 $k=\pm\sqrt{2}$，所以直线 l 的方程为 $\pm\sqrt{2}x-y+2=0$.

15. 解：(1)由 $\tan B=\frac{\sqrt{3}\sin C+\cos C}{\sin C-\sqrt{3}\cos C}$ 可得 $\tan B=\frac{\sqrt{3}\tan C+1}{\tan C-\sqrt{3}}$，…………………… 2 分

所以 $\tan B(\tan C-\sqrt{3})=\sqrt{3}\tan C+1$，

所以 $\tan B\tan C-1=\sqrt{3}(\tan B+\tan C)$，…………………… 3 分

所以 $\tan(B+C)=\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，…………………… 5 分

所以 $\tan A=-\tan(B+C)=\frac{\sqrt{3}}{3}$. …………………… 6 分

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{6}$. …………………… 7 分

(2)$\triangle ABC$ 为直角三角形. 理由：由题可得 $3\sin A\cos B-\sin B\cos A=0$，$\sin A=\frac{1}{2}$，$\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，…… 9 分

化简可得 $\sin B=\sqrt{3}\cos B$，故 $\tan B=\sqrt{3}$，…………………… 10 分

又因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$，…………………… 11 分

所以 $C=\pi-B-A=\frac{\pi}{2}$，…………………… 12 分

所以$\triangle ABC$ 为直角三角形. …………………… 13 分

16. 解：(1)比赛采用 5 局 3 胜制，甲赢得比赛有以下 3 种情况：

①甲连赢 3 局，$P_1=\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$；…………………… 2 分

②前 3 局甲 2 胜 1 负，第 4 局甲赢，$P_2=C_3^2\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{162}{625}$；…………………… 4 分

③前 4 局甲 2 胜 2 负，第 5 局甲赢，$P_3=C_4^2\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{3}{5}=\frac{648}{3\,125}$，…………………… 6 分

所以甲赢得比赛的概率为 $P_1+P_2+P_3=\frac{27}{125}+\frac{162}{625}+\frac{648}{3\,125}=\frac{2\,133}{3\,125}$. …………………… 7 分

(2)X 可以取 3,4,5，…………………… 8 分

且 $P(X=3)=\left(\frac{3}{5}\right)^3+\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{27}{125}+\frac{8}{125}=\frac{7}{25}$，

$P(X=5)=C_4^2\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{6\times9\times4}{625}=\frac{216}{625}$，

$P(X=4)=1-\frac{7}{25}-\frac{216}{625}=\frac{234}{625}$，…………………… 11 分

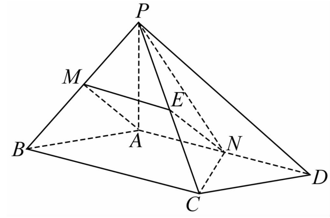
由此可得 X 的分布列如下：

X	3	4	5
P	$\frac{7}{25}$	$\frac{234}{625}$	$\frac{216}{625}$

…………………………………………… 13 分

所以 $E(X)=3\times\frac{7}{25}+4\times\frac{234}{625}+5\times\frac{216}{625}=\frac{2\,541}{625}$. …………………………………………… 15 分

17. (1)证明:取 PC 中点 E,连接 ME,NE,



因为 M 是 PB 的中点,所以 $ME/\!/BC,ME=\frac{1}{2}BC$. ………………… 1 分

因为 $AD/\!/BC,AD=BC,N$ 是 AD 的中点,

所以 $ME/\!/AN,ME=AN$, ………………………………………… 2 分

所以四边形 $AMEN$ 为平行四边形,所以 $AM/\!/EN$,………………… 3 分

又 $EN\subset$平面 $PCN,AM\not\subset$平面 PCN,

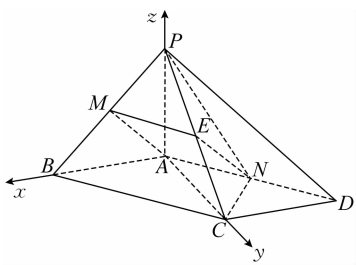
所以 $AM/\!/$平面 PCN. …………………………………………… 4 分

(2)解:①因为 $PA\perp$平面 $ABCD,BC=2,AB=CN=AN=DN=1$,

所以$\angle ACD=90^\circ,AC=\sqrt{3}$,

又 $AB/\!/CD$,所以$\angle BAC=90^\circ$,即 $AB\perp AC$, …………………………………………… 5 分

以 A 为坐标原点,分别以 AB,AC,AP 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$,



则 $A(0,0,0),B(1,0,0),C(0,\sqrt{3},0),N(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0),D(-1,\sqrt{3},0)$,

设 $P(0,0,m),m>0$,

所以$\overrightarrow{PC}=(0,\sqrt{3},-m),\overrightarrow{CN}=(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0)$,

不妨取平面 PAB 的一个法向量为$\boldsymbol{n}_1=(0,1,0)$, ………………… 6 分

设平面 PCN 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=\sqrt{3}y-mz=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CN}=-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y=0,\end{cases}$

令 $z=\sqrt{3}$,得 $x=-\sqrt{3}m,y=m$,

可得 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3}m,m,\sqrt{3})$,…………………………………………… 8 分

因为平面 PAB 与平面 PCN 夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{7}}{7}$,

所以$|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_1\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_1}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{n}_1|}\right|=\frac{m}{\sqrt{4m^2+3}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$, …………………………………………… 10 分

解得 $m=1$, …………………………………………… 11 分

所以 $P(0,0,1)$,所以 $AP=1$. …………………………………………… 12 分

②由①知,$\overrightarrow{PD}=(-1,\sqrt{3},-1),\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},1,\sqrt{3})$,

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{PD}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{PD}|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{105}}{35}$, …………………………………………… 14 分

所以直线 PD 与平面 PCN 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{105}}{35}$. …………………………………………… 15 分

18. 解:(1)由题知,$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3},\\ b=1,\\ a^2+b^2=c^2,\end{cases}$ …………………………………………… 2 分

解得$\begin{cases}a=\sqrt{3},\\ b=1,\\ c=2,\end{cases}$ …………………………………………………………………… 3 分

所以双曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{3}-y^2=1$. …………………………………………………… 4 分

(2)由题知 $F_2(2,0)$,设 $B(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$,

当直线 l 的斜率不存在时,则 $l:x=2$,

在$\frac{x^2}{3}-y^2=1$中,令 $x=2$,得 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$,则$|BD|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$\triangle BDF_1$的周长为$|BF_1|+|DF_1|+|BD|=4a+2|BD|=\frac{16\sqrt{3}}{3}$;…………………………… 6 分

当直线 l 的斜率存在时,设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$,

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{3}-y^2=1,\\ y=k(x-2),\end{cases}$ 消去 y 并整理得$(1-3k^2)x^2+12k^2x-(12k^2+3)=0$.

所以 $1-3k^2\neq0$,且 $\Delta=12(k^2+1)>0$,所以 $k^2\neq\frac{1}{3}$.

又 B,D 两点都在 C 的右支上,所以 $x_1+x_2=\frac{12k^2}{3k^2-1}>0$,$x_1x_2=\frac{12k^2+3}{3k^2-1}>0$,

所以 $k^2>\frac{1}{3}$. …………………………………………………………………………………… 8 分

$\triangle BDF_1$的周长为$|BF_1|+|DF_1|+|BD|=4a+2|BD|=4\sqrt{3}+2\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(\frac{12k^2}{3k^2-1}\right)^2-4\times\frac{12k^2+3}{3k^2-1}}$

$=4\sqrt{3}+2\sqrt{1+k^2}\sqrt{\frac{12(k^2+1)}{(3k^2-1)^2}}=4\sqrt{3}+4\sqrt{3}\times\frac{k^2+1}{3k^2-1}=\frac{16\sqrt{3}}{3}+\frac{16\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{3k^2-1}>\frac{16\sqrt{3}}{3}$. ………… 10 分

综上所述,$\triangle BDF_1$周长的取值范围为$\left[\frac{16\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$. …………………………………… 11 分

(3)由(2)知,$x_1+x_2=\frac{12k^2}{3k^2-1}$,$x_1x_2=\frac{12k^2+3}{3k^2-1}$,$k^2\neq\frac{1}{3}$,

根据对称性可知,如果直线 AB 过定点,则所过定点必在 x 轴上,……………………………… 12 分

$A(x_2,-y_2)$,不妨设定点 P 为$(x_0,0)$,则 $k_{AP}=-\frac{y_2}{x_2-x_0}$,$k_{BP}=\frac{y_1}{x_1-x_0}$,

AB 过定点 P,即 $k_{AP}=k_{BP}$ 对 $k\in\mathbf{R}$,$k\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$恒成立.

即$\frac{y_1}{x_1-x_0}+\frac{y_2}{x_2-x_0}=0$,…………………………………………………………………… 13 分

即$(y_1+y_2)x_0-y_1x_2-y_2x_1=0$.(*)

因为 $y_1=k(x_1-2)$,$y_2=k(x_2-2)$,

所以 $y_1+y_2=k[(x_1+x_2)-4]=k\left(\frac{12k^2}{3k^2-1}-4\right)=\frac{4k}{3k^2-1}$,①

所以 $y_1x_2+y_2x_1=k(x_1-2)x_2+k(x_2-2)x_1=k[2x_1x_2-2(x_1+x_2)]=\frac{6k}{3k^2-1}$.②

将①②代入(*)式得,$\frac{4kx_0}{3k^2-1}-\frac{6k}{3k^2-1}=0$,即$\frac{4k}{3k^2-1}\left(x_0-\frac{3}{2}\right)=0$. ………………… 15 分

上式对 $k\in\mathbf{R}$,$k\neq\frac{\sqrt{3}}{3}$恒成立,当且仅当 $x_0=\frac{3}{2}$,………………………………… 16 分

所以直线 AB 恒过定点$\left(\frac{3}{2},0\right)$. …………………………………………………………… 17 分

19. (1)解：因为 $f(x)=(1-x)e^{x+1}+x-2$，

所以 $f'(x)=-xe^{x+1}+1$， ………………………………………………………………………… 1 分

设 $g(x)=-xe^{x+1}+1$，则 $g'(x)=-(x+1)e^{x+1}$，

$x\in(-\infty,-1)$ 时 $g'(x)>0$，$f'(x)$ 单调递增，且 $x<0$ 时 $f'(x)>0$，

$x\in(-1,+\infty)$ 时 $g'(x)<0$，$f'(x)$ 单调递减，且 $f'(0)=1>0$，$f'\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{e^{\frac{4}{3}}}{3}+1=-\sqrt[3]{\frac{e^4}{27}}+1<0$，

所以存在 $x_0\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$，使得 $f'(x_0)=0$，$e^{x_0+1}=\frac{1}{x_0}$， ……………………………………… 3 分

当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

因为 $f(x_0)=(1-x_0)e^{x_0+1}+x_0-2=\frac{1-x_0}{x_0}+x_0-2=\frac{1}{x_0}+x_0-3>0$，

且 $f(-1)=-1<0$，$f(1)=-1<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 及 $(x_0,+\infty)$ 上各有 1 个零点，

所以 $f(x)$ 有 2 个零点. ………………………………………………………………………………… 6 分

(2)①解：因为 $a_n>0$，所以 $a_n-1>-1$，

由(1)知，$f'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f'(a_n-1)<f'(-1)$，

即 $(1-a_n)e^{a_n}+1<2$，即 $(1-a_n)e^{a_n}<1$，

所以 $\frac{e^{a_n}-1}{e^{a_n}}<a_n$，即 $a_{n+1}<a_n$. ………………………………………………………………… 10 分

②证明：由①知，$a_{n+1}<a_n$，所以 $n\geqslant2$ 时 $0<a_n<a_1=1$，$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i<n$， …………………………… 11 分

下面证明 $a_{n+1}>\frac{1}{2}a_n$，即证 $\frac{e^{a_n}-1}{e^{a_n}}>\frac{1}{2}a_n$，即证 $e^{a_n}-\frac{1}{2}a_ne^{a_n}-1>0$，

设 $h(x)=e^x-\frac{1}{2}xe^x-1\ (0<x\leqslant1)$，则 $h'(x)=(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x)e^x\geqslant0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，

所以 $h(x)>h(0)=0$，即 $a_{n+1}>\frac{1}{2}a_n$. ………………………………………………………………… 15 分

因为 $a_1=1$，所以 $n\geqslant2$ 时 $a_n>\frac{1}{2^{n-1}}$，

所以 $n\geqslant2$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i>\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{i-1}}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$.

综上得，$n\geqslant2$ 时，$2-\frac{1}{2^{n-1}}<\sum\limits_{i=1}^{n}a_i<n$. ………………………………………………………… 17 分