台州市六校2020学年第一学期高三年级期中联考试题

数学 2020.11

考生须知:

1. 本试题卷分选择题和非选择题两部分，共 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 考生答题前，务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸上。
3. 选择题的答案须用 2B 铅笔将答题纸上对应题目的答案标号涂黑，如要改动，需将原填涂处用橡皮擦净。
4. 非选择题的答案须用黑色字迹的签字笔或钢笔写在答题纸上相应区域内，答写在本试题卷上无效。

选择题部分

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{2,3,4\}$，则 $A\cup B=$

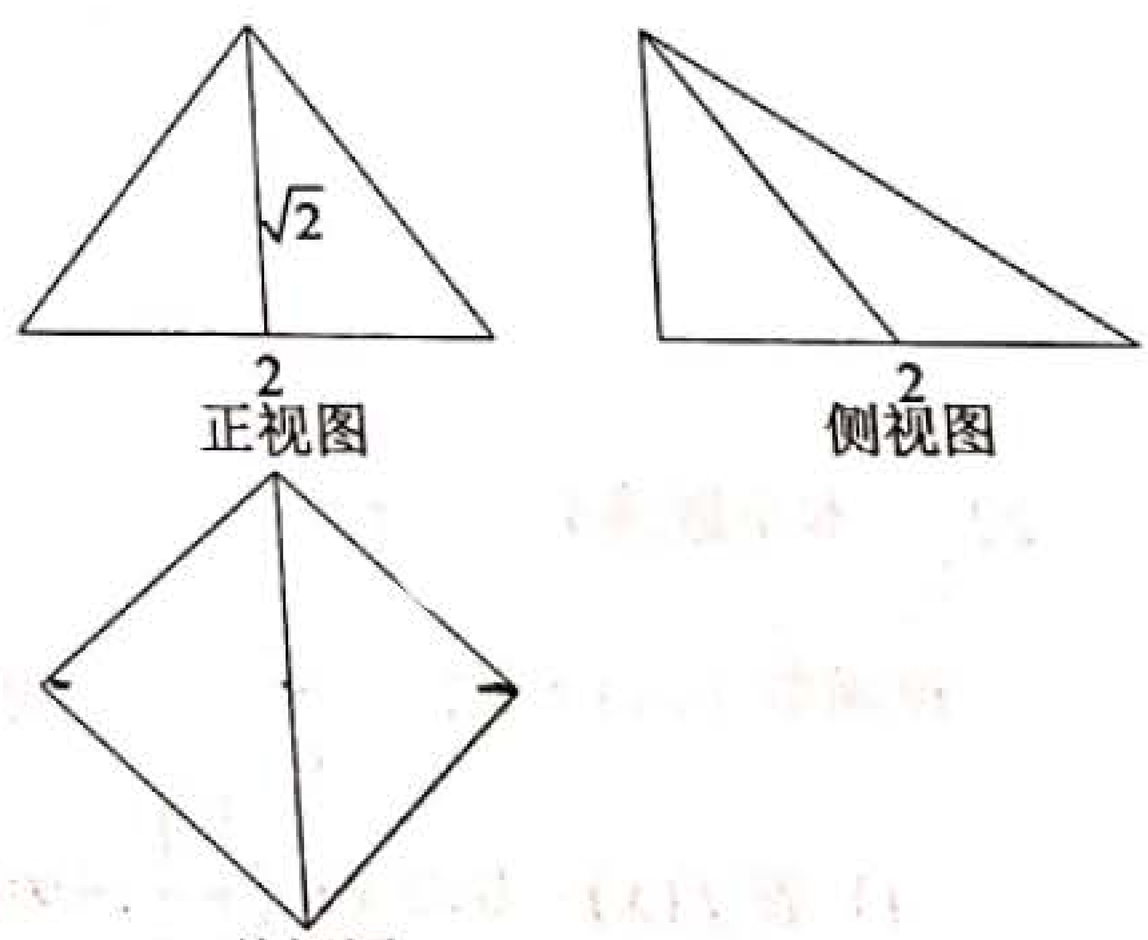
A. $\{2\}$　　B. $\{0,1,2,3,4\}$　　C. $\{0,1,2,2,3,4\}$　　D. $[0,4]$

2. 已知复数 $z=\dfrac{2-i}{i^{2020}}$，则

A. z 的虚部为 i　　B. z 的实部为 2　　C. $z<2$　　D. $|z|<2$

3. 若实数 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2\le 0 \\ x+y+4\ge 0 \\ x-y+2\ge 0 \end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的最小值是

A. -4　　B. -6　　C. -7　　D. -8



正视图　侧视图　俯视图

4. 如图：某四棱锥的三视图（单位：cm）如图所示，则该四棱锥的体积（单位：cm^3）为

A. $4\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

5. 设 P 为空间一点，l，m 为空间中两条不同的直线，α，β 是空间中两个不同的平面，则下列说法正确的是

A. 若 $P\in l$，$P\in\beta$，$l\subset\alpha$；则 $\alpha\cap\beta=l$

B. 若 $P\in\alpha$，$P\in l$，$l\,//\,m$；则 m 与 α 必有公共点

C. 若 $l\perp\alpha$，$m\perp\beta$，$\alpha\,//\,\beta$；则 $l\,//\,m$

D. 若 l 与 m 异面，$l\subset\alpha$，$m\subset\beta$；则 $\alpha\,//\,\beta$

6. 函数 $f(x)=(\frac{x}{2}-1)^2+(\frac{3}{x}-1)^2-1$ 的零点个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

7. 把标号为①，②，③，④的 4 个小球随机放入甲、乙、丙三个盒子中，则①号球不在甲盒子中的概率为

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{6}$

8. 若平面上两点 $A(-2,0),B(1,0)$，则 $l:y=k(x-1)$ 上满足 $|PA|=2|PB|$ 的点 P 的个数为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 与实数 k 的取值有关

9. 已知 $\alpha,\beta\in(0,\pi),\alpha\neq\beta$，若 $e^{\alpha}-e^{\beta}=\cos\alpha-2\cos\beta$，则下列结论一定成立的是

A. $\cos\alpha>\cos\beta$　　B. $\cos\alpha<\cos\beta$

C. $\sin\alpha>\sin\beta$　　D. $\sin\alpha<\sin\beta$

10. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=-a_n^2+a_n\ (n\in N^*)$，$a_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，则以下说法正确的个数

①$0<a_{n+1}<a_n$；　　$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2<a_1$；

③对任意正数 b，都存在正整数 m 使得 $\frac{1}{1-a_1}+\frac{1}{1-a_2}+\frac{1}{1-a_3}+\cdots+\frac{1}{1-a_m}>b$ 成立.

④$a_n<\frac{1}{n+1}$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

非选择题部分

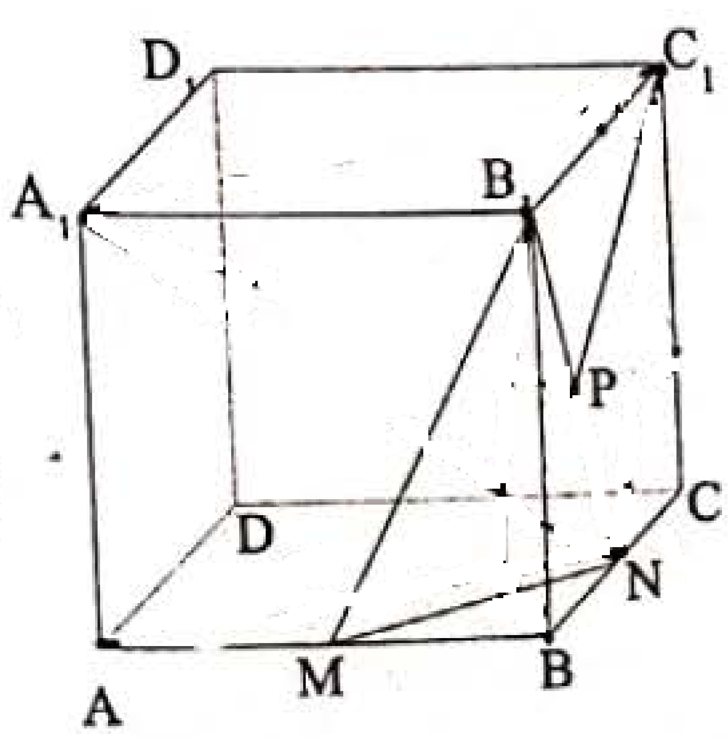
二、填空题：本大题共 7 小题，单空题每题 4 分，多空题每题 6 分，共 36 分。

11. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为非零常数 d，且 $a_1=1$，若 a_1,a_2,a_4 成等比数列，则公差 $d=$ ______▲______；数列 $\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的前100项和 $S_{100}=$ ______▲______.

12. 已知 $(x+a)^4(x-2)^4$ 的展开式中各项系数之和等于 0，则 $a=$ ___▲___；其展开式中含 x^7 项的系数为______▲______.

13. 锐角 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a,b,c，且 $\frac{a-b}{c}=\frac{\sin C-\sqrt{2}\sin B}{\sin A+\sin B}$，则角 A 的大小为______▲______；若 $b=2$，则 $\triangle ABC$ 面积 S 的取值范围是___▲___

14. 如图：正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M，N 分别为棱 AB,BC 的中点，则二面角 B_1-MN-B 的余弦值为______▲______　若点 P 为线段 B_1N 上的动点（不包括端点），设异面直线 C_1P 与 MN 所成角为 θ，则 $\cos\theta$ 的取值范围是 ______▲______.



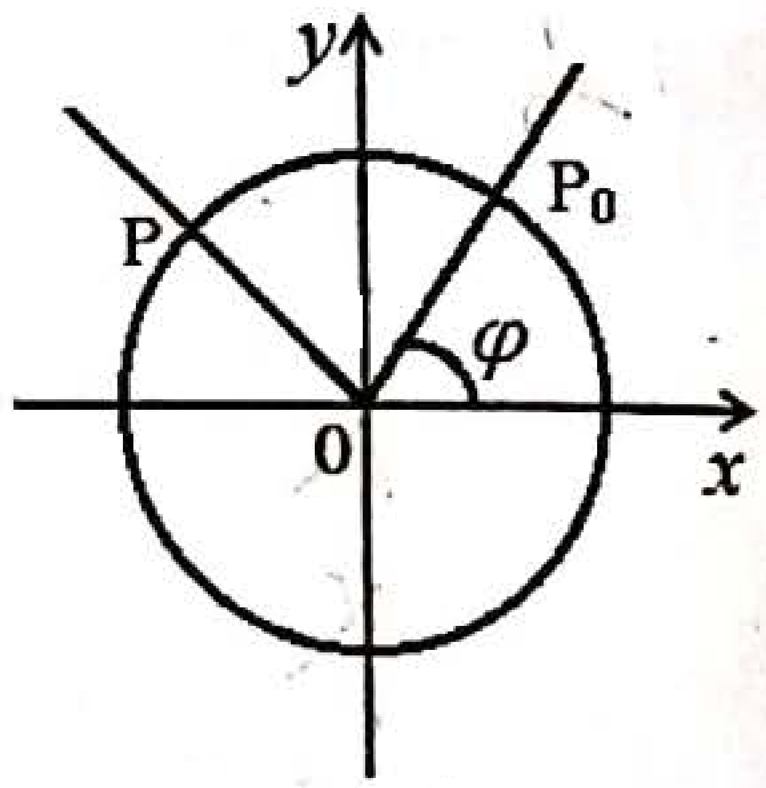
15. 若函数 $f(x)=(-x^2-x+5)\cdot e^x$ 在区间 $(a,a+2)$ 上有极大值，则 a 的取值范围是 ▲ .

16. 已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 和双曲线 $C_2:\dfrac{x^2}{m^2}-\dfrac{y^2}{n^2}=1(m>0,n>0)$ 的焦点相同，F_1,F_2 分别为左、右焦点，P 是椭圆和双曲线在第一象限的交点，$PM\perp x$ 轴，M 为垂足，若 $|OM|=\dfrac{2}{3}|OF_2|$（O 为坐标原点），则椭圆和双曲线的离心率之积为 ▲

17. 已知 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，$\vec{c}=(2-4\lambda)\vec{a}+\lambda\vec{b}$，则 $(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})$ 的最小值为 ▲ .

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18.（本题满分 14 分）如图，$\varphi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，点 P 是半径为 1 的砂轮边缘上的一个质点，它从初始位置 P_0 开始，按逆时针方向以角速度 $\dfrac{\pi}{6}$ rad/s 作圆周运动，点 P 的纵坐标 y 关于时间 t（单位：秒）的函数，记作：$y=f(t)$.



（I）若点 $P_0\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$，求 $f(2)$；

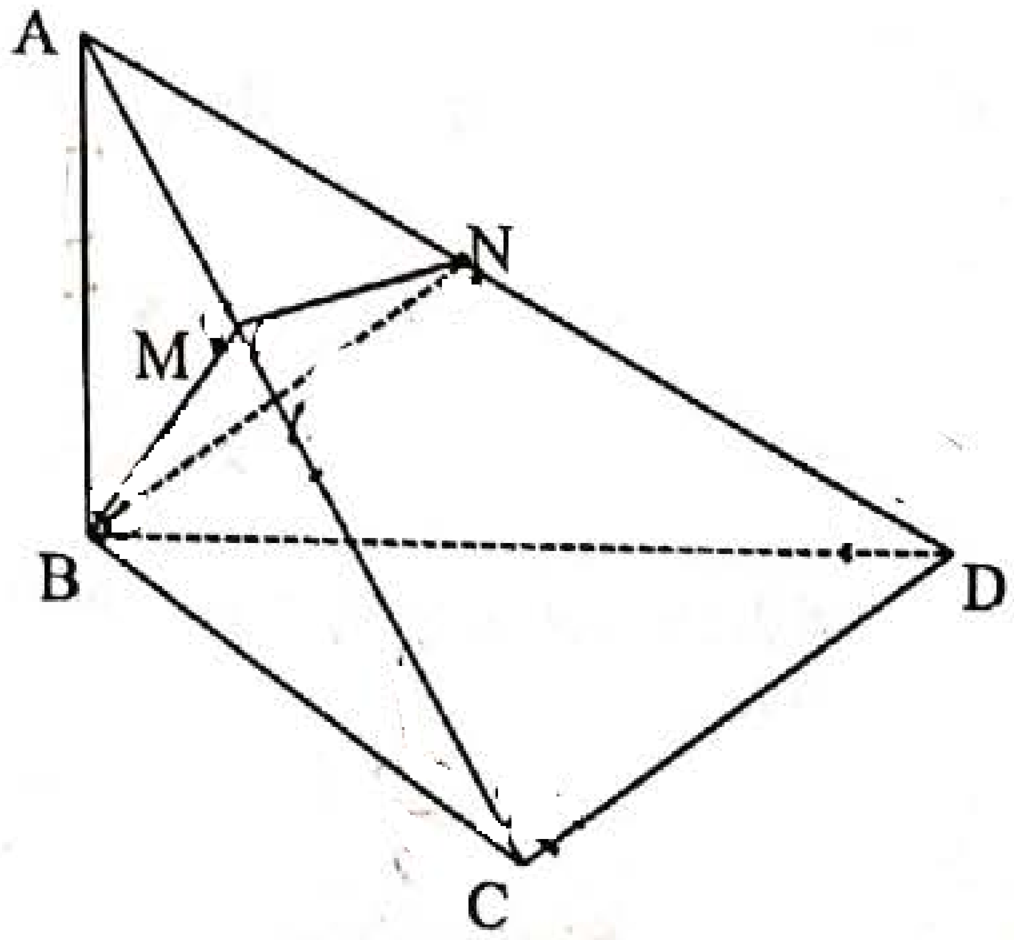
（II）若将函数 $y=f(t)$ 的图象向右平移 2 个单位长度后，得到的曲线关于原点对称；当 $t\in[0,3]$ 时，求函数 $y=f(t)$ 的值域.

19.（本小题满分 15 分）

如图：三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB\perp$ 平面 BCD，且 $AD=2AB=2CD=2$，$BC=\sqrt{2}$；$BM\perp AC,BN\perp AD$，垂足分别为 M,N.

（I）求证：$\triangle AMN$ 为直角三角形；

（II）求直线 BC 与平面 BMN 所成角的大小.



20．（本小题满分 15 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$a_1=1$，$a_{n+1}=2S_n+4n+1$，令$b_n=\dfrac{a_n+2}{2a_n}$，$n\in N^*$．

（I）求证：数列$\{a_n+2\}$为等比数列，并求a_n；

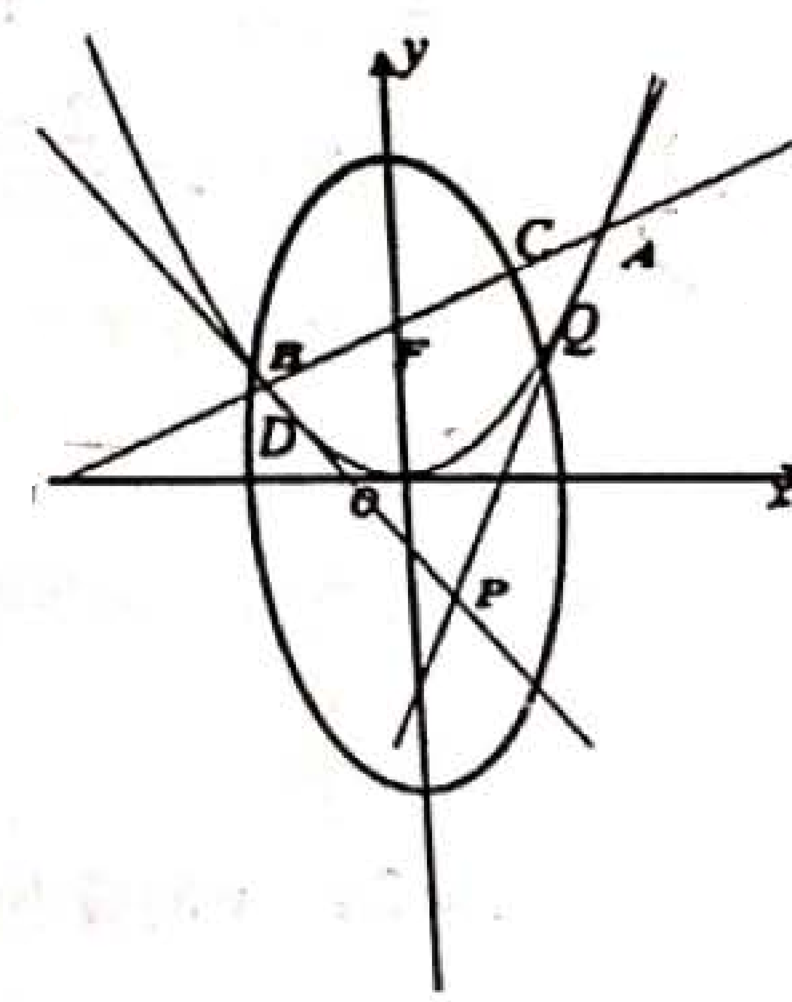
（II）记数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，求证：$T_n<\dfrac{n+3}{2}$．

21．（本小题满分 15 分）

如图：已知抛物线$C_1:x^2=4y$与椭圆$C_2:\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$有相同焦点$F$，$Q$为抛物线$C_1$与椭圆$C_2$在第一象限的公共点，且$|QF|=\dfrac{5}{3}$，过焦点$F$的直线$l$交抛物线$C_1$于$A,B$两点、交椭圆$C_2$于$C,D$两点，直线$PA,PB$与抛物线$C_1$分别相切于$A,B$两点.

（I）求椭圆C_2的方程；

（II）求$\triangle PCD$的面积S的最小值.



22．（本小题满分 15 分）

设函数$f(x)=\ln(x+\dfrac{1}{a})-2ax$，$g(x)=f(x-\dfrac{1}{a})+\dfrac{1}{2}a^2x^2+b-2$．

（I）若$f(x)<0$对$x\in(-\dfrac{1}{a},+\infty)$恒成立，求$a$的取值范围；

（II）若$a>\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}$，当$g(x_1)+g(x_2)=2b$时，求证：$a(x_1+x_2)>2$．

台州市六校2020学年第一学期高三年级期中联考数学答案

一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	B	C	D	C	B	A	C	D	D

二、填空题：本大题共7小题，单空题每题4分，多空题每题6分，共36分。

11. 1 ，$\dfrac{100}{101}$　　12. -1 ，-12　　13. 45^{o} ，$(1,2)$

14. $\dfrac{1}{3}$ ，$\left(\dfrac{\sqrt{10}}{10},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　15. $-1<a<1$　　16. $\dfrac{3}{2}$　　17. $-\dfrac{49}{52}$

三、解答题：本大题共5小题，共74分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18.（本小题满分14分）

解：（1）设 OP_0 的初始角为 φ，则由 P_0（$\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}$）得 $\cos\varphi=\dfrac{3}{5},\sin\varphi=\dfrac{4}{5}$，……………… 2分

$f(t)=\sin(\dfrac{\pi}{6}t+\varphi)$ ……………… 3分

$\therefore f(2)=\sin(\dfrac{\pi}{6}\times 2+\varphi)=\sin(\dfrac{\pi}{3}+\varphi)=\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot\cos\varphi+\cos\dfrac{\pi}{3}\cdot\sin\varphi$ ……………… 5分

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{3\sqrt{3}+4}{10}.$ ……………… 7分

（2）$\because$ $f(t)=\sin(\dfrac{\pi}{6}t+\varphi)\ (0<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$，

$\therefore f(t-2)=\sin[\dfrac{\pi}{6}(t-2)+\varphi]=\sin(\dfrac{\pi}{6}t-\dfrac{\pi}{3}+\varphi)=\pm\sin\dfrac{\pi}{6}t$ ……… 9分

则 $-\dfrac{\pi}{3}+\varphi=k\pi(k\in Z)$，即 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}+k\pi,k\in Z$ 由 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ 得 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$ ……… 11分

$\therefore f(t)=\sin(\dfrac{\pi}{6}t+\dfrac{\pi}{3})$ 又 $t\in[0,3],\therefore\dfrac{\pi}{6}t+\dfrac{\pi}{3}\in[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}]$

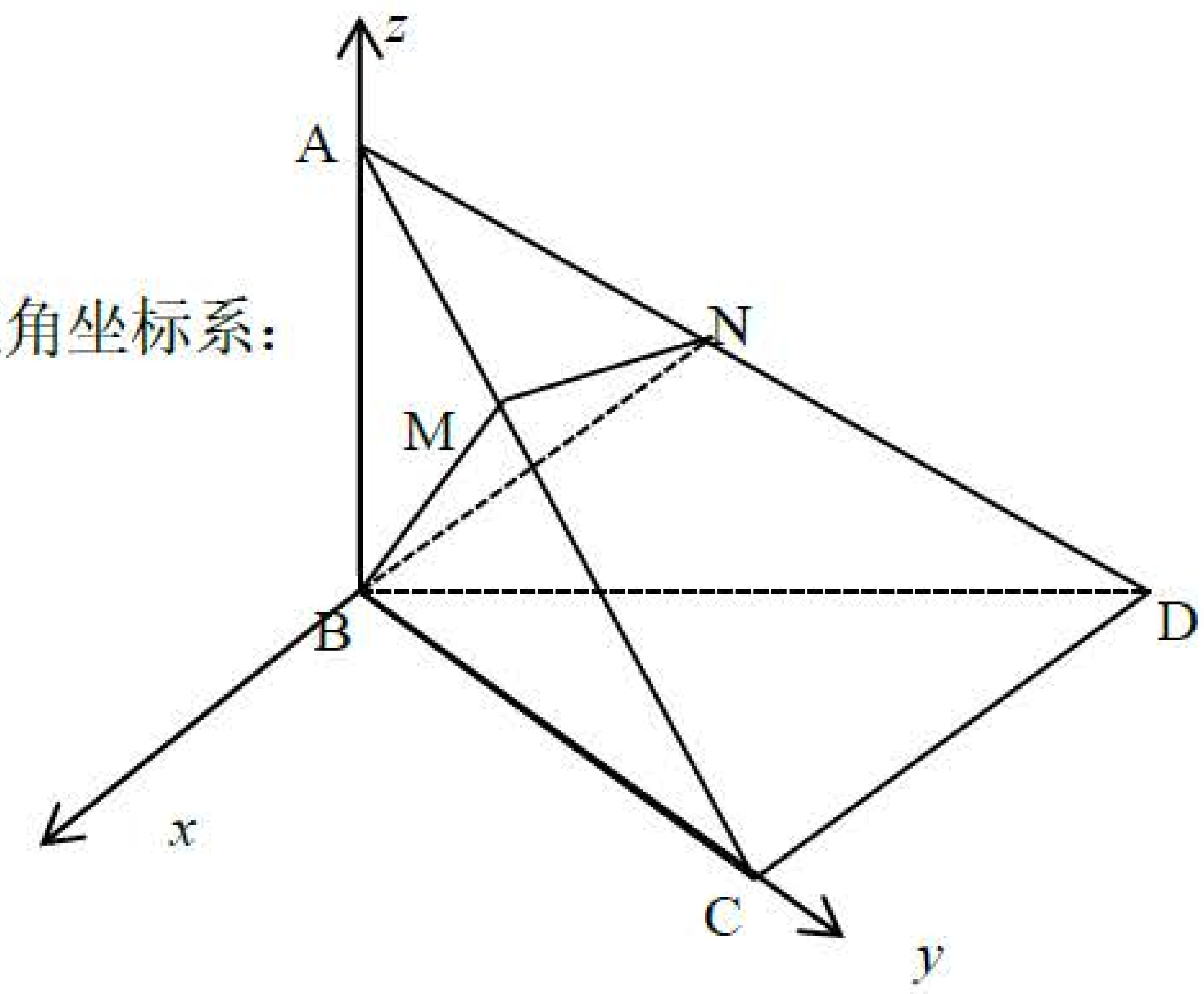
$\therefore f(t)\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，故 $f(t)$ 的值域为 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ ……………… 14分

19（本小题满分15分）

解：（1）

$$\left.\begin{array}{l}AB\perp 平面BCD\Rightarrow AB\perp CD\\ BC^2+CD^2=BD^2\Rightarrow BC\perp CD\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}CD\perp 平面ABC\\ BM\subset 平面ABC\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}CD\perp BM\\ AC\perp BM\end{array}\right\}\Rightarrow BM\perp 平面ACD$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow BM\perp AD\\ BN\perp AD\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}AD\perp 平面BMN\\ MN\subset 平面BMN\end{array}\right\}\Rightarrow AD\perp MN\Rightarrow\triangle AMN 为直角三角形$$ ……… 7分



（2）以 B 点为原点，过 B 做 CD 的平行线，如图建立空间直角坐标系：

则 $B(0,0,0)$，$A(0,0,1)$, $C(0,\sqrt{2},0), D(-1,\sqrt{2},0)$

$\overrightarrow{BC}=(0,\sqrt{2},0), \overrightarrow{AD}=(-1,\sqrt{2},-1)$

由（1）得 $AD\perp$ 平面BMN, $\therefore \overrightarrow{AD}$为平面$BMN$的法向量，

$\therefore \sin\theta=|\cos<\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}>|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ 直线BC与平面BMN所成角大小为$\dfrac{\pi}{4}$. ·············· 15 分

20（本小题满分 15 分）

解：（1）$\because a_{n+1}=2S_n+4n+1 \therefore a_n=2S_{n-1}+4(n-1)+1(n\geq 2, n\in N^*)$

$\therefore a_{n+1}-a_n=2a_n+4(n\geq 2, n\in N^*)$ 即 $\therefore a_{n+1}=3a_n+4(n\geq 2, n\in N^*)$ ·························3 分

$\therefore a_{n+1}+2=3(a_n+2)(n\geq 2, n\in N^*)$，························4 分

$\because a_1=1, \therefore a_2=7, \therefore a_2+2=3(a_1+2) \therefore a_{n+1}+2=3(a_n+2)(n\in N^*)$ ··················6 分

由$a_1+2=3\neq 0, \therefore a_n+2\neq 0, \therefore \{a_n+2\}$为等比数列，

$\therefore a_n+2=3^n \therefore a_n=3^n-2$ ···························· 7 分

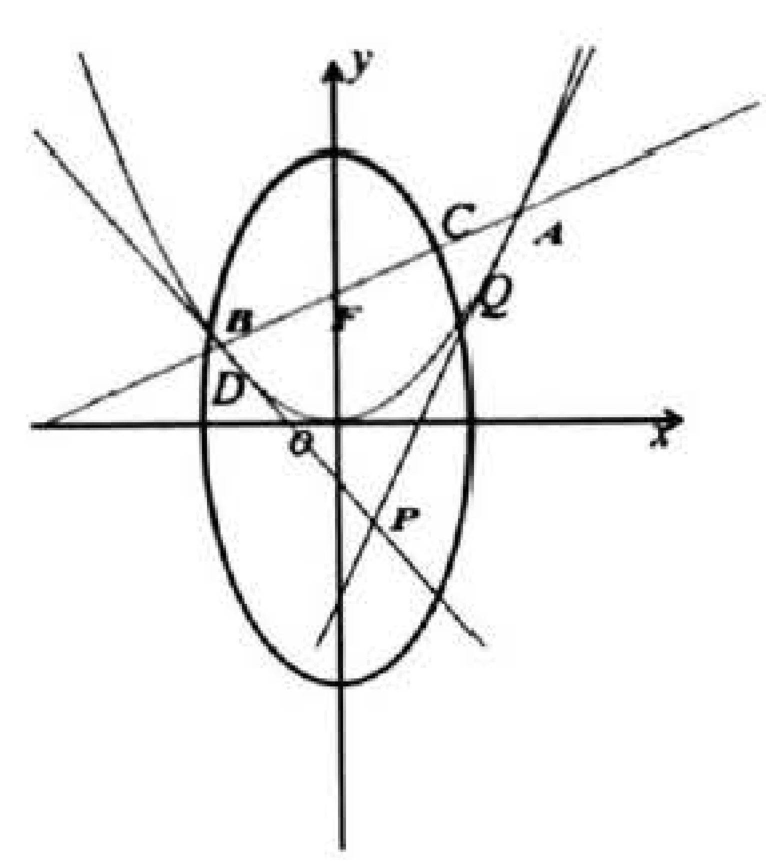
（2）$b_n=\dfrac{a_n+2}{2a_n}=\dfrac{3^n}{2(3^n-2)}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3^n-2}$ ···················· 9 分

$\because \dfrac{1}{3^n-2}\leq\dfrac{1+2}{3^n-2+2}=\dfrac{3}{3^n}=\dfrac{1}{3^{n-1}}$ ···················· 12 分

$\therefore T_n\leq\dfrac{n}{2}+1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{3^{n-1}}=\dfrac{n}{2}+\dfrac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{n}{2}+\dfrac{3}{2}(1-(\dfrac{1}{3})^n)$

$\because (\dfrac{1}{3})^n>0, \therefore 1-(\dfrac{1}{3})^n<1 \therefore T_n<\dfrac{n+3}{2}$ ···························· 15 分

21（本小题满分 15 分）



解：（Ⅰ）$\because |QF|=\dfrac{5}{3}, \therefore y_Q+1=\dfrac{5}{3} \therefore y_Q=\dfrac{2}{3}, {x_Q}^2=\dfrac{8}{3}$ ························2 分

$\because Q$ 为抛物线 C_1 与椭圆 C_2 在第一象限的公共点

$\therefore \dfrac{4}{9a^2}+\dfrac{8}{3b^2}=1$ 且 $a^2-b^2=1$

$\therefore \begin{cases} a^2=4 \\ b^2=3 \end{cases} \therefore C_2: \dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{3}=1$ ………………… 5 分

（2）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),P(x_0,y_0)$, 由已知得直线 l 斜率存在，设为 $y=kx+1$

$$PA: y=\frac{1}{2}x_1x-\frac{1}{4}x_1^{\ 2}, PB: y=\frac{1}{2}x_2x-\frac{1}{4}x_2^{\ 2}, \therefore \begin{cases} x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y_0=\dfrac{x_1x_2}{4} \end{cases} \text{即} P(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{4}) \text{………} 7 \text{分}$$

$$\because k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{4}, x_1x_2=-4 \therefore P(2k,-1) \cdots \ 8 \text{分}$$

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{3}=1 \\ y=kx+1 \end{cases} \Rightarrow (3k^2+4)x^2+6kx-9=0 \Rightarrow \triangle=36(4k^2+4) \text{………}$$

$$\therefore |CD|=\sqrt{1+k^2}\bullet\frac{\sqrt{36(4k^2+4)}}{3k^2+4}=\frac{12(1+k^2)}{3k^2+4}$$

$$\therefore h_{p\to l}=\frac{|2k^2+2|}{\sqrt{k^2+1}} \therefore S_{\triangle PCD}=\frac{1}{2}|CD|h_{p\to l}=\frac{1}{2}\bullet\frac{12(1+k^2)}{3k^2+4}\bullet\frac{|2k^2+2|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{12(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}{3k^2+4} \text{………} 12 \text{分}$$

$$\text{令} 1+k^2=t(t\ge 1) \therefore g(t)=\frac{12t^{\frac{3}{2}}}{3t+1} \therefore g'(t)=\frac{18t^{\frac{1}{2}}(t+1)}{(3t+1)^2}>0$$

$\therefore$ 当 $t=1$，即 $k=0$ 时，$S_{\triangle PCD}$ 的面积最小，$S_{\triangle PCD}$ 的最小值为3 ………… 15 分

22（本小题满分 15 分）

（Ⅰ）解： $f'(x)=\dfrac{1}{x+\frac{1}{a}}-2a=\dfrac{-2a(x+\frac{1}{2a})}{x+\frac{1}{a}} \quad (x>-\dfrac{1}{a})$， ……………………………… 2 分

当 $a>0$ 时，$-\dfrac{1}{a}<-\dfrac{1}{2a}$，令 $f'(x)>0$ 得：$-\dfrac{1}{a}<x<-\dfrac{1}{2a}$

$\therefore f(x)$ 在区间 $(-\dfrac{1}{a},-\dfrac{1}{2a})$ 上单调递增，在区间 $(-\dfrac{1}{2a},+\infty)$ 上单调递减 ……………… 4 分

$\therefore f(x)_{\max}=f(-\dfrac{1}{2a})=1-\ln(2a)$，由 $1-\ln(2a)<0$，得：$a>\dfrac{e}{2}$ ……………… 5 分

当 $a<0$ 时，$-\dfrac{1}{a}>-\dfrac{1}{2a}$，则 $f'(x)>0$ 对 $x\in(-\dfrac{1}{a},+\infty)$ 恒成立，

$\therefore f(x)$ 在区间 $(-\dfrac{1}{a},+\infty)$ 上单调递增，且 $f(-\dfrac{1}{a}+e)=\dfrac{3}{2}-2ae>0$，所以不符合

故：a 的取值范围为$(\frac{e}{2},+\infty)$ ························ 7 分

（II）$\because g(x)=\ln x+\frac{1}{2}a^2x^2-2ax+b\ (x>0)$

$\therefore g(x_1)+g(x_2)=2b$，得：$\ln x_1+\frac{1}{2}a^2x_1^2-2ax_1=-(\ln x_2+\frac{1}{2}a^2x_2^2-2ax_2)$，

若$x_1>\frac{2}{a}$或$x_2>\frac{2}{a}$，则结论显然成立

当$x_1,x_2\in(0,\frac{2}{a})$时，证：$a(x_1+x_2)>2\Leftrightarrow$证：$x_2>\frac{2}{a}-x_1$ ········ 9 分

令：$h(x)=\ln x+\frac{1}{2}a^2x^2-2ax,\ x\in(0,\frac{2}{a})$，

$$h'(x)=\frac{1}{x}+a^2x-2a=\frac{(ax-1)^2}{x}\geq 0$$，所以$h(x)$为单调递增函数，

则，证：$x_2>\frac{2}{a}-x_1\Leftrightarrow$证：$h(x_2)>h(\frac{2}{a}-x_1)$，而$h(x_2)=-h(x_1)$，

所以等价于证：$-h(x_1)>h(\frac{2}{a}-x_1)$，即证：$h(x_1)+h(\frac{2}{a}-x_1)<0$ ········ 12 分

$$h(x_1)+h(\frac{2}{a}-x_1)=\ln x_1+\ln(\frac{2}{a}-x_1)+a^2x_1^2-2ax_1-2$$

令：$F(x)=\ln x+\ln(\frac{2}{a}-x)+a^2x^2-2ax-2$

$$F'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-\frac{2}{a}}+2a^2x-2a=\frac{2a^2(x-\frac{1}{a})^3}{x(x-\frac{2}{a})}$$

得：$F(x)$在区间$(0,\frac{1}{a})$上递增，在区间$(\frac{1}{a},\frac{2}{a})$上递减，

$\therefore F(x)\leq F(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a^2}-3$，因为$a>\frac{1}{\sqrt{e^3}}$，所以$\frac{1}{a^2}<e^3$， 所以$F(x)<0$

故：得证. ···························· 15 分