2018学年第一学期杭州市高三年级教学质量检测

数学试题卷

考生须知：

1．本试卷分试题卷和答题卷两部分．满分150分，考试时间120分钟．

2．请用黑色字迹的钢笔或签字笔在答题卡指定的区域（黑色边框）内作答，超出答题区域的作答无效！

3．考试结束，只需上交答题卡．

选择题部分（共40分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．设集合 $A=\{1,\ 2\}$，$B=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,|x|<2\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$\varnothing$　　B．$\{1\}$　　C．$\{2\}$　　D．$\{1,\ 2\}$

2．椭圆 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的离心率等于（　）

A．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　　D．$\sqrt{5}$

3．设 $x\in\mathbf{R}$，则“$x>2$”是“$|x|>2$” 的（　）

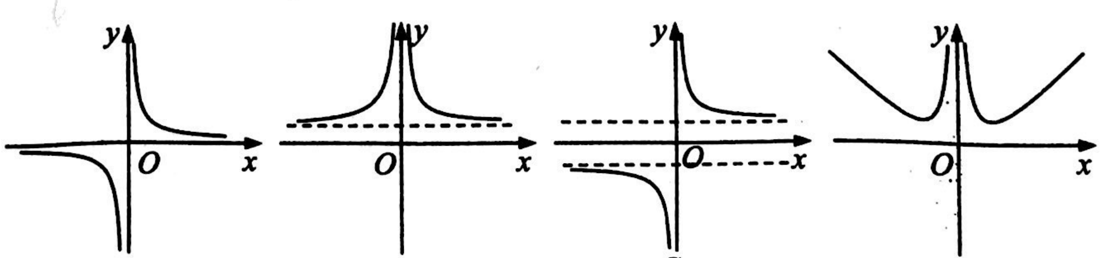
A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．设复数 z 满足 $z(1-2\mathrm{i})=2+\mathrm{i}$（其中 i 是虚数单位），则 $|z|=$（　）

A．$\dfrac{2}{5}$　　B．$\dfrac{3}{5}$　　C．$\dfrac{4}{5}$　　D．1

5．函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$（其中 e 为自然对数的底数）的图象可能是（　）



A.　　B.　　C.　　D.

6. 已知正三角形 ABC 的边长为 2，设 $\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则（　　）

A. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=1$　　B. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$　　C. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$　　D. $(4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$

7. 已知函数 $f(x)$（$x\in\mathbf{R}$）的周期为 T（$T>0$），且在（0，T）上单调，则（　　）

A. $f(x^2)$是周期函数，且在$(0,\sqrt{T})$上单调

B. $f(x^2)$不是周期函数，且在$(0,\sqrt{T})$上单调

C. $f(x^2)$是周期函数，且在$(0,T^2)$上单调

D. $f(x^2)$不是周期函数，且在$(0,T^2)$上单调

8. 设 $\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，随机变量 ξ 的分布列如下表所示，则 $E\xi$（　　）

ξ	1	2	3
p	$\frac{1}{2}\sin^2\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cos^2\theta$

A. 有最大值$\frac{5}{2}$，最小值$\frac{3}{2}$

B. 有最大值$\frac{9}{4}$，最小值$\frac{7}{4}$

C. 有最大值$\frac{9}{4}$，无最小值

D. 无最大值，有最小值$\frac{7}{4}$

9. 设 $a<0$，不等式$(3x^2+a)(2x+b)\geqslant 0$ 在$(a,\ b)$上恒成立，则 $b-a$ 的最大值为（　　）

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

10. 设函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)+\cos^2x$. 记 $f(x)$的最大值为 $M(\varphi)$，最小值为 $m(\varphi)$，则（　　）

A. 存在 $\varphi\in\mathbf{R}$，使得 $M(\varphi)+m(\varphi)=\pi$

B. 存在 $\varphi\in\mathbf{R}$，使得 $M(\varphi)-m(\varphi)=\pi$

C. 存在 $\varphi\in\mathbf{R}$，使得$|M(\varphi)\cdot m(\varphi)|=\pi$

D. 存在 $\varphi\in\mathbf{R}$，使得$\left|\frac{M(\varphi)}{m(\varphi)}\right|=\pi$

非选择题部分（共 110 分）

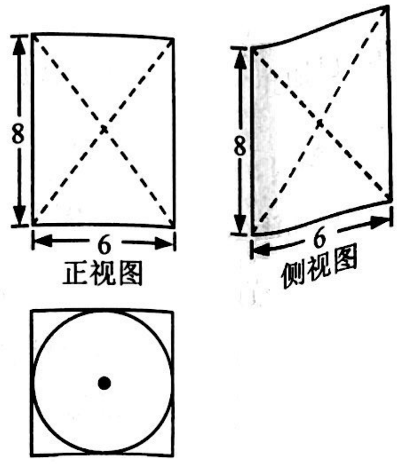
二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分.

11. 设 $a=\log_2 3$，$b=\log_3 8$，则 $2^a=$_______，$ab=$_______.

12. 设 a，b，c 分别为$\triangle ABC$ 的三边长．若 $a=3$，$b=5$，$c=7$，则 $\cos C=$_______，$\triangle ABC$ 的外接圆半径等于_______.

13. 若双曲线 M：$x^2-\frac{y^2}{m}=1$ 的离心率小于$\sqrt{2}$，则 m 的取值范围是_______；若 $m=2$，双曲线 M 的渐近线方程为_______.

14. 某几何体的三视图如图所示（单位：cm），则该几何体的体积是_____ cm^3；表面积是______ cm^2.



（第 14 题）

15. 若实数 x，y 满足不等式组 $\begin{cases} x+y\ge 2, \\ 2x-y\le 4, \\ x-y\ge 0, \end{cases}$ 则 $2x+3y$ 的最小值等于______.

16. 若函数 $f(x)=\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}-a$（$a\neq 0$）存在零点，则 a 的取值范围是______.

17. 设 O 为 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心．若存在正实数 k，使得 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$，则 k 的取值范围为______.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

18.（本题满分 14 分）已知 $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$（$x\in\mathbf{R}$）.

（Ⅰ）求 $f(\frac{5\pi}{6})$ 的值.

（Ⅱ）若 $x\in[0,\ \frac{\pi}{4}]$，求函数 $f(x)$ 的取值范围.

19.（本题满分 15 分）设函数 $f(x)=\frac{|x-1|}{x-2}-k(x-1)^2$.

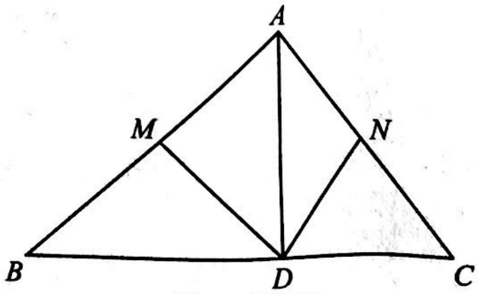
（Ⅰ）若 $k=1$，解方程 $f(x)=0$.

（Ⅱ）若关于 x 的方程 $f(x)=0$ 有四个不同的解，求 k 的取值范围.

20.（本题满分 15 分）如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=8$，$AC=6$，$AD\perp BC$，M，N 分别为 AB，AC 的中点.

（Ⅰ）若 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}=-6$，求 $|BC|$.

（Ⅱ）若 $\frac{\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{DB}|}+\frac{\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{DC}|}=5$，求 $\angle BAC$ 的大小.



（第 20 题图）

21．（本题满分 15 分）设公差不为 0 的等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n．若 $S_6=60$，且 a_6 为 a_1 和 a_{21} 的等比中项．

（I）求 a_n 和 S_n．

（II）设数列$\{b_n\}$满足 $b_{n+1}-b_n=a_n$．若 $b_1=3$，求数列$\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$的前 n 项和 T_n（$n\in\mathbf{N}^*$）．

22．（本题满分 15 分）已知函数 $f(x)=x^2+ax+\ln x$，$a\in\mathbf{R}$．

（I）若函数 $f(x)$存在两个极值，

（i）求 a 的取值范围；

（ii）证明：函数 $f(x)$存在唯一零点．

（II）若存在实数 x_1，x_2，使 $f'(x_1)+f'(x_2)=0$，且 $x_2<x_1<2x_2$，求 $f(x_1)-f(x_2)$的取值范围．

2018学年第一学期杭州市高三年级教学质量检测

数学试题参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	B	A	D	C	D	B	B	C	D

二、填空题：本大题共7小题，多空题每题6分，单空题每题4分，共36分．

11．3；3　　12．$-\dfrac{1}{2}$；$\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$　　13．(0，1)；$y=\pm\sqrt{2}\,x$

14．288－24π，264＋12π　　15．4

16．[2，4]　　17．$k>\dfrac{1}{2}$

三、解答题：本大题共5小题，共 74分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

18．（本题满分14分）

解　（Ⅰ）$f(\dfrac{5\pi}{6})=\sin\dfrac{5\pi}{3}+\sqrt{3}\cos\dfrac{5\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$．　　……4分

（Ⅱ）因为 $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，

当 $x\in[0，\dfrac{\pi}{4}]$时，$2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$，

所以 $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，

所以 $f(x)$的取值范围为[1，2]．　　……10分

19．（本小题满分15分）

解　（Ⅰ）当 $k=1$ 时，$\dfrac{|x-1|}{x-2}-k(x-1)^2=0$，

所以 $|x-1|\cdot\dfrac{1-|x-1|(x-2)}{x-2}=0$，

所以 $|x-1|=0$ 或 $1-|x-1|(x-2)=0$，

所以解 $x=1$，$x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$．　　……7分

（Ⅱ）因为$|x-1|\cdot(\dfrac{1}{x-2}-k|x-1|)=0$，

即$|x-1|=0$ 或 $\dfrac{1}{x-2}-k|x-1|=0$，

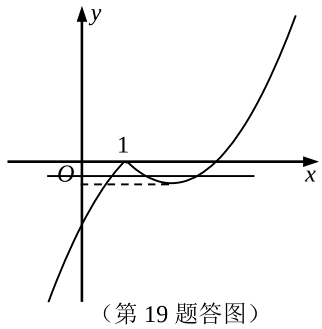
当$|x-1|=0$ 时，$x=1$，此时 $k\in\mathbf{R}$；

所以 $\dfrac{1}{x-2}-k|x-1|=0$ 有三个不等于 1 的解，

即 $\dfrac{1}{k}=|x-1|\cdot(x-2)$有三个不等于 1 的解，

根据函数 $y=|x-1|\cdot(x-2)$的图象，

所以$-\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{k}<0$，即 $k<-4$. ……8 分



（第 19 题答图）

20.（本题满分 15 分）

解（Ⅰ）由 $AD\perp BC$ 可知，$|DM|=|AM|$，$|DN|=|AN|$，

所以$\angle MDN=\angle MAN$，

因为 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}=12\cos\angle MAN=-6$，

所以 $\cos\angle MAN=-\dfrac{1}{2}$，

所以 $|BC|^2=|AB|^2+|AC|^2-2|AB|\cdot|AC|\cos\angle MAN=148$，

所以 $|BC|=2\sqrt{37}$. ……8 分

（Ⅱ）因为$\dfrac{\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{DB}|}+\dfrac{\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{DC}|}=\dfrac{1}{2}(|DB|+|DC|)=5$，

所以 $|BC|=10$，

所以$\angle BAC=90°$. ……7 分

21.（本题满分 15 分）

解：（Ⅰ）设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

则$\begin{cases}6a_1+15d=60,\\ a_1(a_1+20d)=(a_1+5d)^2,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}d=2\\ a_1=5\end{cases}$，

∴ $a_n=2n+3$.

$S_n=\dfrac{n(8+2n)}{2}=n(n+4)$. ……7 分

（Ⅱ）由 $b_{n+1}-b_n=a_n$，

∴$b_n-b_{n-1}=a_{n-1}(n\geqslant 2,\ n\in\mathbf{N}^*)$.

当 $n\geqslant 2$ 时，

$b_n=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\ldots+(b_2-b_1)+b_1$

$=a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_1+b_1$

$=(n-1)(n-1+4)+3=n(n+2)$.

对 $b_1=3$ 也适合，

∴ $b_n=n(n+2)(n\in\mathbf{N}^*)$.

$\therefore\ \dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\cdot(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2})$.

$T_n=\dfrac{1}{2}\cdot(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2})$

$=\dfrac{1}{2}(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2})=\dfrac{3n^2+5n}{4(n+1)(n+2)}$. ……8 分

22.（本题满分 15 分）

解：（Ⅰ）（i）根据题意，$f'(x)=\dfrac{2x^2+ax+1}{x}$，

所以方程 $2x^2+ax+1=0$ 有两个正根 t_1，t_2（不妨设 $t_1<t_2$），

所以 $\begin{cases}\Delta>0\\ -\dfrac{a}{4}>0\end{cases}$，解得 $a<-2\sqrt{2}$. ……3 分

（ii）易知 $f(x)$在 $x=t_1$ 时取到极大值，在 $x=t_2$ 时取到极小值.

由（i）知 $2t_1^2+at_1+1=0$，

所以 $f(t_1)=-t_1^2+\ln t_1-1$.

令 $g(x)=-x^2+\ln x-1$，所以 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-2x$，

由 $\dfrac{1}{x}-2x=0$，解得 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $g(x)\leqslant g(\dfrac{\sqrt{2}}{2})=\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{3}{2}<0$，

所以 $f(t_1)<0$，故 $f(x)$至多只有一个零点.

又 $f(-a)=\ln(-a)>0$，可知 $f(x)$存在唯一零点. ……5 分

（Ⅱ）由题意知：$2x_1+a+\dfrac{1}{x_1}+2x_2+a+\dfrac{1}{x_2}=0$，

即 $a=-(x_1+x_2)-\dfrac{x_1+x_2}{2x_1x_2}$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2+a(x_1-x_2)+\ln\dfrac{x_1}{x_2}$

$=-\dfrac{1}{2}(\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{x_2}{x_1})+\ln\dfrac{x_1}{x_2}$，

设 $t=\dfrac{x_1}{x_2}\in(1,2)$，记 $h(t)=-\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{2t}+\ln t$，

则 $h'(t)=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2t^2}+\dfrac{1}{t}=-\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{t}+1)^2\leqslant 0$，

故 $h(t)$单调递增，所以 $h(t)\in(h(2),h(1))$，

即 $h(t)\in(-\dfrac{3}{4}+\ln 2,0)$. ……7 分