2018 年浙江省高中数学竞赛试卷 参考答案

1. 已知a为正实数，且 $f(x)=\frac{1}{a}-\frac{1}{a^x+1}$是奇函数，则 $f(x)$的值域为________。

解 由 $f(x)$ 为奇函数可知$\frac{1}{a}-\frac{1}{a^x+1}=-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^{-x}+1}$,解得$a=2$，即 $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}$，由此得 $f(x)$ 的值域为$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$。

2. 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_{n+1}=5a_n+1$（$n=1,2,\cdots$），则$\sum_{n=1}^{2018}a_n$ =____________。

解 由$a_{n+1}=5a_n+1\Rightarrow a_{n+1}+\frac{1}{4}=5(a_n+\frac{1}{4})\Rightarrow a_n=\frac{5^n}{4}-\frac{1}{4}$，所以

$$\sum_{n=1}^{2018}a_n=\frac{1}{4}(5^1+5^2+\cdots+5^{2018})-\frac{2018}{4}=\frac{5}{16}(5^{2018}-1)-\frac{2018}{4}=\frac{5^{2019}}{16}-\frac{8077}{16}\text{。}$$

3. 已知$\alpha,\beta\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$，$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{12}{13}$,则 $\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)$=__________。

解 由$\alpha,\beta\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$,得$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5},\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})=-\frac{5}{13}$，所以

$$\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})=-\frac{56}{65}\text{。}$$

4. 在八个数字 2,4,6,7,8,11,12,13 中任取两个组成分数。这些分数中有_________个既约分数。

解 在 7,11,13 中任取一个整数与在 2,4,6,8,12 中任取一个整数构成既约分数，共有$2C_3^1C_5^1=30$种；在 7,11,13 中任取两个整数也构成既约分数，共有$A_3^2=6$中。合计有 36 种不同的既约分数。

5. 已知虚数z满足$z^3+1=0$，则$\left(\frac{z}{z-1}\right)^{2018}+\left(\frac{1}{z-1}\right)^{2018}$ =______________。

解 $z^3+1=0\Rightarrow(z+1)(z^2-z+1)=0\Rightarrow z^2-z+1=0$，所以

$$\left(\frac{z}{z-1}\right)^{2018}+\left(\frac{1}{z-1}\right)^{2018}=\frac{z^{2018}+1}{(z^2)^{2018}}=\frac{(z^3)^{672}z^2+1}{(z^3)^{1345}z}=\frac{z^2+1}{-z}=-1\text{。}$$

6. 设$\left|\overrightarrow{AB}\right|=10$。若平面上点$P$满足，对于任意$t\in R$，有$\left|\overrightarrow{AP}-t\overrightarrow{AB}\right|\geq 3$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值为______________，此时 $\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|=$_______________。

解 由$\left|\overrightarrow{AP}-t\overrightarrow{AB}\right|\geq 3$可知点$P$到直线$AB$的距离为 3。

设 AB的中点为O。由极化恒等式得

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{1}{4}\{(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})^2-(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB})^2\}=\frac{1}{4}\{(2PO)^2-10^2\}\geq\frac{1}{4}\{36-100\}=-16$。

此时$\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|=6$。

7. 在△ABC中，$AB+AC=7$，且三角形的面积为 4，则$\sin\angle A$的最小值为______。

解 由$AB+AC=7\Rightarrow AB\times AC\leq\frac{49}{4}$，又

$\frac{1}{2}AB\times AC\sin\angle\mathrm{A}=4\Rightarrow\sin\angle\mathrm{A}\geq\frac{32}{49},AB=AC=\frac{7}{2}$时取等号。

8. 设$f(x)=|x+1|+|x|-|x-2|$，则$f(f(x))+1=0$有__________个不同的解。

解 因为 $f(x)=|x+1|+|x|-|x-2|=\begin{cases}-x-3,x\leq -1\\ x-1,-1<x\leq 0\\ 3x-1,0<x\leq 2\\ x+3,x>2\end{cases}$ 由 $f(f(x))+1=0$ 得到

$f(x)=-2,$ 或 $f(x)=0$。由 $f(x)=-2,$ 得一个解 $x=-1$；由 $f(x)=0$ 得两个解

$x=-3,x=\frac{1}{3}$，共 3 个解。

9. 设$x,y\in R$满足 $x-6\sqrt{y}-4\sqrt{x-y}+12=0$，则$x$的取值范围为 ______________。

解 由$x-6\sqrt{y}-4\sqrt{x-y}+12=0\Rightarrow(\sqrt{x-y}-2)^2+(\sqrt{y}-3)^2=1$。令

$\sqrt{x-y}-2=\cos\theta,\sqrt{y}-3=\sin\theta\Rightarrow x=(2+\cos\theta)^2+(3+\sin\theta)^2$

$=14+\sqrt{52}\sin(\theta+\varphi)(\sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{13}})$，所以$14-2\sqrt{13}\leq x\leq 14+2\sqrt{13}$。

10. 四面体$P-ABC$， $PA=BC=\sqrt{6}$， $PB=AC=\sqrt{8}$， $PC=AB=\sqrt{10}$，则该四面体外接球的半径为________________。

解　将四面体还原到一个长方体中，设该长方体的长、宽、高分别为a,b,c，则

$$\begin{cases}a^2+b^2=10\\ b^2+c^2=8\\ a^2+c^2=6\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2+c^2=12$$，所以四面体外接球的半径为$\sqrt{3}$。

二、解答题

11. （本题满分 20 分）已知动直线l与圆O：$x^2+y^2=1$相切，与椭圆$\frac{x^2}{9}+y^2=1$相交于不同的两点A,B。求原点到AB的中垂线的最大距离。

解　依题意可设$l:y=kx+m(k\neq 0)$.

因为直线l与圆O相切，所以，O到直线l的距离为 1，即

$\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=1$ ……………………………………………………………5 分

这样的直线必与椭圆交于不同的两点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，联立$\begin{cases}y=kx+m,\\ x^2+9y^2-9=0\end{cases}$，

得$(1+9k^2)x^2+18kmx+(9m^2-9)=0$，得到$x_1+x_2=-\frac{18km}{1+9k^2}$。

所以AB的中点坐标为$(-\frac{9km}{1+9k^2},\frac{m}{1+9k^2})$，…………………………10 分

AB的中垂线方程为$y-\frac{m}{1+9k^2}=-\frac{1}{k}(x+\frac{9km}{1+9k^2})$，化简得$x+ky+\frac{8km}{1+9k^2}=0$.

O到直线中垂线的距离$d=\frac{\left|\frac{8km}{1+9k^2}\right|}{\sqrt{1+k^2}}$。……………………………………15 分

将$\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=1$代入$d=\frac{\left|\frac{8km}{1+9k^2}\right|}{\sqrt{1+k^2}}$，得$d=\frac{|8k|}{1+9k^2}$. 由均值不等式，$1+9k^2\geq 6|k|$，故

$d\leq\frac{4}{3}$，当且仅当$|k|=\frac{1}{3}$时取等号。

所以，当$|k|=\frac{1}{3},|m|=\frac{\sqrt{10}}{3}$时，

原点到AB的中垂线的最大距离为$\frac{4}{3}$。……………………………………20 分

12.（本题满分 20 分）设$a\in R$，且对任意实数b均有$\max\limits_{x\in[0,1]}\left|x^2+ax+b\right|\geq 1$，求$a$的取值范围。

解 1 设$f(x)=x^2+ax+b$，对于$|b|\geq 1\Rightarrow |f(0)|\geq 1$，

所以只要考虑$|b|<1$。………………………………………………………………5 分

（1）当$-\frac{a}{2}\leq 0$时，即$a\geq 0,$此时函数$f(x)$的最值在抛物线的左右端点取得，对任意$|b|<1$有$f(1)=1+a+b>f(0)=b,$所以$f(1)=1+a+b\geq 1$，

解得$a\geq 1$。………………………………………………………………………10 分

（2）当$0<-\frac{a}{2}\leq\frac{1}{2}$时，即$-1\leq a<0$，此时函数$f(x)$的最值在抛物线的顶点和右端点取得，而对$b=0$有$\left|f(1)\right|=|1+a|<1,\left|f(-\frac{a}{2})\right|=\left|\frac{-a^2}{4}\right|<1$。

（3）当$\frac{1}{2}<-\frac{a}{2}\leq 1$时，即$-2\leq a<-1$，此时函数$f(x)$的最值在抛物线的顶点和左端点取得，而对$b=0$有$\left|f(0)\right|=|b|<1,\left|f(-\frac{a}{2})\right|=\left|\frac{-a^2}{4}\right|<1$。………………15 分

（4）当$-\frac{a}{2}\geq 1$时，即$a\leq -2$，此时函数$f(x)$的最值在抛物线的左右端点取得，对任意$|b|<1$有$\left|f(0)\right|=|b|<1,$所以$f(1)=1+a+b\leq -1$，解得$a\leq -3$。

综上$a\geq 1$或$a\leq -3$。…………………………………………………………20 分

解 2 设$m=\max\limits_{x\in[0,1]}\left|x^2+ax+b\right|$，则有

$m\geq |b|,m\geq |1+a+b|\Rightarrow 2m\geq |b|+|1+a+b|\geq |1+a|$依题意，$\frac{|1+a|}{2}\geq 1\Rightarrow a\geq 1,$或

$a\leq -3$。

13.（本题满分 20 分） 设实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{2018}$ 满足 $x_{n+1}^2 \le x_n x_{n+2}$ $(n=1,2,\cdots,2016)$ 和 $\prod_{n=1}^{2018} x_n = 1$，证明：$x_{1009}x_{1010} \le 1$。

证明：由条件 x_n, x_{n+2} 同号。反证法，假设 $x_{1009}x_{1010} > 1$。

（1）若 x_{1009}, x_{1010} 同为正数，由 x_n, x_{n+2} 同号可知 $x_1,x_2,\cdots,x_{2018}$ 同号。……5 分

由 $x_{n+1}^2 \le x_n x_{n+2} \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} \le \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} \Rightarrow \frac{x_{1009}}{x_{1008}} \le \frac{x_{1010}}{x_{1009}} \le \frac{x_{1011}}{x_{1010}}$

$\Rightarrow x_{1009}x_{1010} \le x_{1011}x_{1008} \Rightarrow x_{1011}x_{1008} > 1$……………………………………………10 分

同理 $\frac{x_{1009}}{x_{1007}} = \frac{x_{1009}}{x_{1008}} \bullet \frac{x_{1008}}{x_{1007}} \le \frac{x_{1011}}{x_{1010}} \bullet \frac{x_{1012}}{x_{1011}} = \frac{x_{1012}}{x_{1010}} \Rightarrow x_{1007}x_{1012} > 1$。

类似可证明：$x_{1006}x_{1013} > 1, x_{1005}x_{1014} > 1, \cdots, x_1 x_{2018} > 1$。……………………15 分

因此 $\prod_{n=1}^{2018} x_n > 1$，矛盾。

（2）若 x_{1009}, x_{1010} 同为负数，由 x_n, x_{n+2} 同号可知 $x_1,x_2,\cdots,x_{2018}$ 均为负数，仍然有 $x_{n+1}^2 \le x_n x_{n+2} \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} \le \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}$，类似（1）可证得。…………………………20 分

14.（本题满分 30 分）

将 $2n$（$n \ge 2$）个不同整数分成两组 $a_1,a_2,\cdots,a_n; b_1,b_2,\cdots,b_n$。证明

$$\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \left|a_i - b_j\right| - \sum_{1\le i<j\le n} (|a_j - a_i| + |b_j - b_i|) \ge n。$$

证明 令 $T_n = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \left|a_i - b_j\right| - \sum_{1\le i<j\le n} (|a_j - a_i| + |b_j - b_i|)$，下面用归纳法证明 $T_n \ge n$。

当 $n=2$ 时，不妨设 $a_1 < a_2, b_1 < b_2, a_2 < b_2$。

$T_2 = \left|b_2 - a_1\right| + \left|b_2 - a_2\right| + \left|b_1 - a_1\right| + \left|b_1 - a_2\right| - \left|a_2 - a_1\right| - \left|b_2 - b_1\right|$，

当 $a_1<b_1 \Rightarrow T_2=b_1-a_1+b_1+b_2+|b_1-a_2|>2$； ……………………5 分

当 $a_1>b_1 \Rightarrow T_2=b_2-a_2+a_1+b_1>2$。 ……………………………………10 分

假设对正整数 n 成立，对正整数 $n+1$，不妨设

$a_1<a_2<\cdots<a_{n+1}, b_1<b_2<\cdots<b_{n+1}, a_{n+1}<b_{n+1}$。再设 $b_k<a_{n+1}<b_{k+1}$，则有

$$T_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}|b_{n+1}-a_i|+\sum_{i=1}^{n}|a_{n+1}-b_i|-\sum_{i=1}^{n}|a_{n+1}-a_i|-\sum_{i=1}^{n}|b_{n+1}-b_i|+|b_{n+1}-a_{n+1}|+T_n$$

………………………………………………………………………………15 分

下证 $\sum_{i=1}^{n}|b_{n+1}-a_i|+\sum_{i=1}^{n}|a_{n+1}-b_i|-\sum_{i=1}^{n}|a_{n+1}-a_i|-\sum_{i=1}^{n}|b_{n+1}-b_i|\ge 0$。

由（1）$b_k<a_{n+1}<b_{k+1}(k=1,2,\cdots,n)$，得到

$$\sum_{i=1}^{n}|b_{n+1}-a_i|+\sum_{i=1}^{n}|a_{n+1}-b_i|-\sum_{i=1}^{n}|a_{n+1}-a_i|-\sum_{i=1}^{n}|b_{n+1}-b_i|$$

$=2\sum_{i=k+1}^{n}(b_i-a_{n+1})>0$；……………………………………………………25 分

（2）若 $a_{n+1}<b_1$，则 $\sum_{i=1}^{n}|b_{n+1}-a_i|+\sum_{i=1}^{n}|a_{n+1}-b_i|-\sum_{i=1}^{n}|a_{n+1}-a_i|-\sum_{i=1}^{n}|b_{n+1}-b_i|$

$=\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_{n+1})>0$。……………………………………………………30 分

15.（本题满分 30 分） 如图所示将同心圆环均匀分成 n（$n\ge 3$）格。在内环中固定数字 $1\sim n$。问能否将数字 $1\sim n$ 填入外环格内，使得外环旋转任意格后有且仅有一个格中内外环的数字相同？

解答：设对应于内环 1,2,⋯，n 的外环数字为 $i_1,i_2,\cdots,i_n$，它是数字 1,2,⋯，n 的一个排列。对 $k=1,2,\cdots,n$，记外环数字 i_k 在按顺时针方向转动 j_k 格时，和内环数字相同，即

$$i_k-k\equiv j_k \bmod n,\ \ k=1,2,\cdots,n \quad 。$$ ……………………………………10 分

根据题意， $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 应是 $0,1,2,\cdots,n-1$ 的排列。求和

$$\sum_{k=1}^{n}\left(i_k-k\right) \equiv \sum_{k=1}^{n} j_k \bmod n=(0+1+2+\cdots+(n-1)) \bmod n=\frac{1}{2} n(n-1) \bmod n 。$$

于是 n 必须是奇数。 ……………………………………20 分

对于奇数 n，我们取 $i_n=n, i_m=n-m,(m=1,2,\cdots,n-1)$，可以验证

$$i_k-k \equiv j_k \bmod n$$

$$j_n=0, j_{n-1}=2, j_{n-2}=4,\cdots, j_{n-\frac{n-1}{2}}=n-1,$$

$$j_1=n-2, j_{n-1}=n-4, j_3=n-6,\cdots, j_{\frac{n-1}{2}}=1,$$

符合题目要求! ……………………………………30 分