高三数学学科试题 参考答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B	C	D	A	A	C	B	B	BC	AD	ABD

12. 2　13. $(-1,1)$　14. $\dfrac{(2\sqrt{6}+8\sqrt{2})\pi}{3}$

15.（13 分）解:（1）由正弦定理，$\sin A\cos C=\sin B+\frac{1}{2}\sin C$,………… 2 分

因为$B=\pi-(A+C)$，所以$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$,

代入上式：$\sin A\cos C=\sin A\cos C+\cos A\sin C+\frac{1}{2}\sin C$,

整理得，$\left(\cos A+\frac{1}{2}\right)\sin C=0$，因为$\sin C\neq 0$，所以$\cos A=-\frac{1}{2}$,………… 5 分

又$A\in(0,\pi)$，所以$A=\frac{2\pi}{3}$;………… 6 分

（2）因为D为BC中点，所以$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$,

两边平方，$\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=\frac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+2\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos A\right)$,

已知$\left|\overrightarrow{AD}\right|=3,\cos A=-\frac{1}{2}$，代入整理得：$b^2+c^2-bc=36$①,………… 8 分

在△ABC中，根据余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

已知$a=8,\cos A=-\frac{1}{2}$，代入整理得：$b^2+c^2+bc=64$②,………… 10 分

由①②知，$b^2+c^2=50$，$bc=14$，又$(b+c)^2=b^2+c^2+2bc=78$,

所以$b+c=\sqrt{78}$；△ABC的周长为$a+b+c=8+\sqrt{78}$.………… 13 分

16.（15 分）解:（1）极差为 174，第 75 百分位数为 418；………… 2 分

（2）设事件A表示:其中一个数据不小于 400（千辆）, 事件B表示:另一个数据不小于 400（千辆）

则$P(A)=\frac{C_2^2+C_2^1C_4^1}{C_6^2}=\frac{9}{15}$，$P(AB)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$，$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{9}$,………… 6 分

（3）$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.5$；$\bar{y}=\frac{276+312+354+386+418+450}{6}=366$；………… 8 分

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{6}x_iy_i-6\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{6}x_i^2-6\bar{x}^2}=\frac{610}{17.5}\approx 34.86,$$ ………… 10 分

$a=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=366-34.86\times 3.5\approx 243.99$，

y 关于 x 的经验回归方程为 $y=34.86x+243.99$， .... 12 分

将 $x=8$ 代入回归方程， $y=522.87$，故预测第 8 年新能源车的年销量为 522.87 千辆............ 15 分

（若保留分式形式计算，以下结果也正确： $\hat{b}\equiv\dfrac{244}{7}$， $a\equiv 244$，第 8 年销售量 522.86 万辆）

备注： $\hat{b}\in[33,35]$、 $a\in[242,245]$、最后答案 $\in[520,525]$ 误差小的都算正确。

17.（15 分）解:（1）因为 $DE=\dfrac{1}{3}AD=BC,\ AD\parallel BC$，所以四边形 $BCDE$ 为平行四边形，

那么 $BE=CD=2,\ AE=\dfrac{2}{2}AB=2\sqrt{2}$，满足 $AB^2+BE^2=AE^2$，所以 $AB\perp BE$， $\angle BAD=\angle CDE=\dfrac{\pi}{4}$，

由余弦定理计算得： $BD=\sqrt{10}$， $CE=\sqrt{2}$， $CE\perp BC$， .... 3 分

由题意 $A_1D=\sqrt{14}$， $A_1B=2$，满足 $A_1B^2+BD^2=A_1D^2$，所以 $A_1B\perp BD$，

又 $A_1B\perp BE$， $BE\perp BD=B$，所以 $A_1B\perp$ 平面$ABCD$， .... 5 分

而 $CE\subset$ 平面$ABCD$，所以 $CE\perp A_1B$，又 $CE\perp BC$， $BC\cap A_1B=B$，所以 $CE\perp$ 平面A_1BC .... 7 分

（2）以点 B 为原点，以 $\overrightarrow{BE},\overrightarrow{AB}$ 为 x 轴, y 轴的正方向，以平面 $ABCD$ 的一个法向量为 z 轴正方向，建立空间直角坐标系 $Oxyz$，其中 $B(0,0,0)$， $C(1,1,0)$， $D(1,3,0)$， $E(0,2,0)$ .... 8 分

设点 $A_1(2\cos\alpha,0,2\sin\alpha)$， $\alpha\in[0,2\pi]$，平面 A_1BE 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

$\overrightarrow{BE}=(0,2,0)$， $\overrightarrow{BA_1}=(2\cos\alpha,0,2\sin\alpha)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{n_1}=\hat{0}\\ \overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}$, $\begin{cases}\hat{2}y_1=\hat{0}\\ 2x_1\cos\alpha+2z_1\sin\alpha=0\end{cases}$，令 $x_1=\sin\alpha$，得 $\overrightarrow{n_1}=(\sin\alpha,0,-\cos\alpha)$， .... 10 分

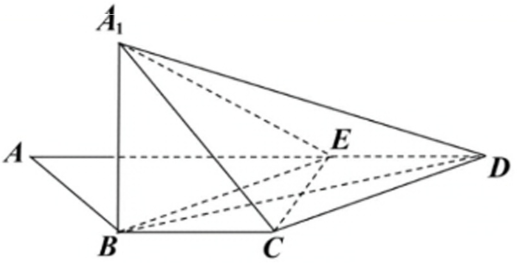
设平面 A_1CD 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$， $\overrightarrow{CD}=(0,2,0)$， $\overrightarrow{CA_1}=(2\cos\alpha-1,-1,2\sin\alpha)$

$\begin{cases}\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\\ \overrightarrow{CA_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\end{cases}$， $\begin{cases}2y_2=0\\ (2\cos\alpha-1)x_2+2z_2\sin\alpha=0\end{cases}$，令 $x_2=2\sin\alpha$，得 $\overrightarrow{n_1}=(2\sin\alpha,0,1-2\cos\alpha)$， ..... 12 分

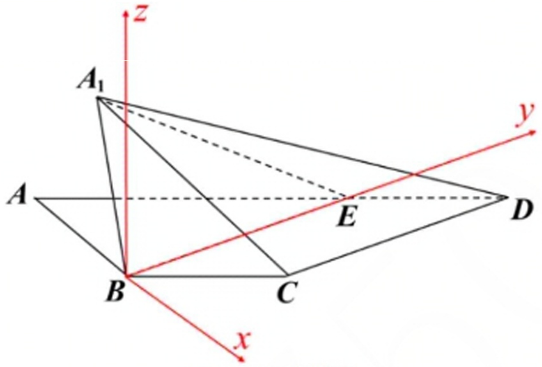
$$\cos\theta=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{|2-\cos\alpha|}{\sqrt{4\sin^2\alpha+(1-2\cos\alpha)^2}}=\frac{2-\cos\alpha}{\sqrt{5-4\cos\alpha}}$$

令 $t=\sqrt{5-4\cos\alpha}\in[1,3]$，$\cos\theta=\dfrac{2+\dfrac{t^2-5}{4}}{t}=\dfrac{t^2+3}{4t}\geq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$（当且仅当 $t=\sqrt{3}$ 时取等）

所以 $\cos\theta$ 的最小值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ .... 15 分



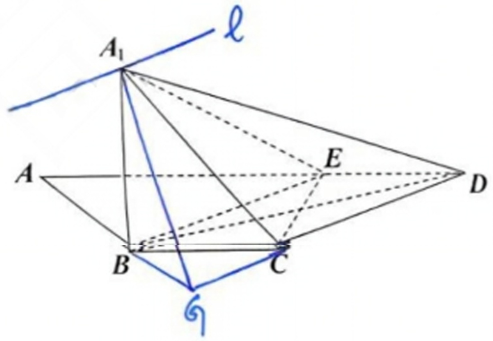
17（1）图示



17（2）图示

法二：（几何法）

$\left.\begin{array}{l}BE\parallel CD\\ CD\subset 面ACD\\ BE\not\subset 面ACD\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}BE\parallel 平面ACD\\ BE\subset 平面A_1BE\\ 平面A_1BE\cap 面ACD=l\end{array}\right\}\Rightarrow BE\parallel l$ ------ 9分



过 B 作 $BG\perp CD$ 于 G，连 A_1G

$\because A_1B\perp BE$　　$BG\perp CD$　　$\therefore CD\perp 面A_1BG$

$\therefore CD\perp A_1G$

则 $\angle BA_1G$ 为平面 A_1BE 与平面 A_1CD 所成角 ------ 12分

$\triangle A_1BG$ 中，$A_1B=2$　　$BG=1$　　$\dfrac{A_1B}{\sin\angle A_1GB}=\dfrac{BG}{\sin\angle BA_1G}$

$\therefore \sin\angle BA_1G=\dfrac{\sin\angle A_1GB}{2}\leq\dfrac{1}{2}$

$\therefore \cos\angle BA_1G\geq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \cos\theta$ 的最小值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ------ 15分

18. （17 分）解:（1）因为双曲线 C 离心率为 2，故 $e^2=\dfrac{b^2+a^2}{a^2}=4$，解得 $b^2=3a^2$，

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{3a^2}=1\\ y=1\end{cases}$，可知 $x_{M,N}=\pm\dfrac{\sqrt{3(a^2+1)}}{3}$，.. 2 分

由题意 $|MN|=\dfrac{2\sqrt{3(a^2+1)}}{3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，解得：$a=1$，故双曲线 C 方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$；.................. 4 分

（2）（i）不妨设 $D(m,1)$（$-\frac{2\sqrt{3}}{3}<m<\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 且 $m\neq\pm\frac{3-\sqrt{3}}{3}$），$H(x_0,y_0)$，

由椭圆第三定义知，$\begin{cases} k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{1}{m+1}\cdot\dfrac{y_0}{x_0-1}=3 \\ k_{QA}\cdot k_{QB}=\dfrac{1}{m-1}\cdot\dfrac{y_0}{x_0+1}=3 \end{cases}$，解得 $x_0=m$，$y_0=3(m^2-1)$，……………………9 分

即 $H(m,3(m^2-1))$（$-\frac{2\sqrt{3}}{3}<m<\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 且 $m\neq\pm\frac{3-\sqrt{3}}{3}$），此时 $DH\perp AB$，

四边形 $ADBH$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|DH|=|4-3m^2|=4-3m^2\leq 4$，当且仅当 $m=0$ 时取等，

所以四边形 $ADBH$ 的面积最大值为 4．……………………………………………………………………12 分

法二：

(2) 设 $D(t,1)$；$t\in(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3})$

AD：$y=\frac{1}{t+1}(x+1)$　　BD：$y=\frac{1}{t-1}(x-1)$

$\begin{cases} y=\frac{1}{t+1}(x+1) \\ 3x^2-y^2=3 \end{cases}$ $\Rightarrow [3(t+1)^2-1]x^2-2x-1-3(t+1)^2=0$

$\therefore x_A x_P=\frac{-3(t+1)^2-1}{3(t+1)^2-1}$　　$x_P=\frac{3(t+1)^2+1}{3(t+1)^2-1}$

$\begin{cases} y=\frac{1}{t-1}(x-1) \\ 3x^2-y^2=3 \end{cases}$ $\Rightarrow [3(t-1)^2-1]x^2+2x-1-3(t-1)^2=0$

$x_Q=\frac{-3(t-1)^2-1}{3(t-1)^2-1}$

$y_P=\frac{1}{t+1}(x_P+1)=\frac{6(t+1)}{3(t+1)^2-1}$　　$P\left(\frac{3(t+1)^2+1}{3(t+1)^2-1},\frac{6(t+1)}{3(t+1)^2-1}\right)$

同理 $Q\left(\frac{-3(t-1)^2-1}{3(t+1)^2-1},\frac{-6(t-1)}{3(t-1)^2-1}\right)$

$k_{BP}=3(t+1)$　　BP：$y=3(t+1)(x-1)$

同理　　AQ：$y=3(t-1)(x+1)$　　联立，$2x_H=2t$，$x_H=t$，$y_H=3(t^2-1)$

$\therefore S_{ADBH}=\frac{1}{2}AB\cdot DH=\frac{1}{2}\times 2\times|y_D-y_H|=|4-3t^2|$　$\because t\in(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3})$　$\therefore$ 当 $t=0$ 时 $S_{ADBH\max}=4$

备注：有设线就给 1 分，求出 P,Q 坐标给 3 分，H 坐标 2 分，面积 1 分，答案 1 分

（ii）先证以下推论：过抛物线 $x^2=2py\left(y>0\right)$ 的焦点 F 作倾斜角为 α 的直线 l 交抛物线于 A，B 两点, 此时，以 AF 为直径的圆与 x 轴相切.

证明：不妨设线段 AF 的中点为 N，原点 O，y 轴与准线的交点 K，以 AF 为直径的 $\odot N$ 半径为 R，

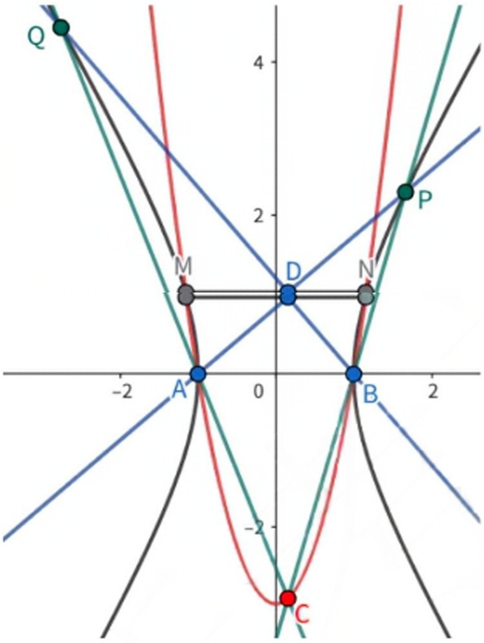
过 A 作直线 $AA_0\perp x$轴于A_0，交准线于 A_1，过 N 作直线 $NN_0\perp x$轴于N_0，交准线于 N_1，

$\left|NN_0\right|=\dfrac{|OF|+|AA_0|}{2}=\dfrac{\frac{p}{2}+|AF|-\frac{p}{2}}{2}=R$，而 $NN_0\perp x$轴，故 $\odot N$ 与 x 轴相切；........................ 14 分

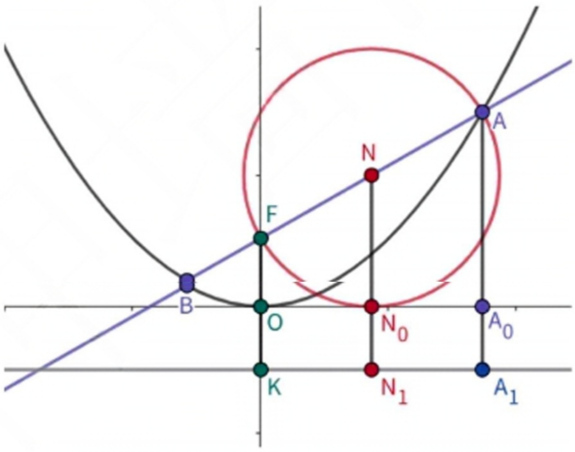
由（2）得，点 $H(m,3(m^2-1))$ 在抛物线 $x^2=\frac{1}{3}(y+3)$ 上，其中 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}<x<\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

结合推论可知，其焦点 $T(0,-\frac{35}{12})$，准线为 $y=-\frac{37}{12}$，以 TH 为直径的圆恒与直线 l'： $y=-3$ 相切，

即所求定点为焦点 $T(0,-\frac{35}{12})$，定直线为直线 l'： $y=-3$． .... 17 分



18（2）图示



18（3）图示

19.（17 分）解:（1）①是“上域函数”，②③是“下域函数”； .... 3 分

备注：写对一个函数给 1 分，写错不扣分；

（2）由题意知，当 $x\in\left[0,+\infty\right)$ 时， $\ln\left(x+1\right)\geq\dfrac{kx}{x+2}$；

整理得： $x=0$ 时， $\ln\left(x+1\right)=\dfrac{kx}{x+2}$，符合题意；当 $x\neq0$ 时，应有 $k\leq\dfrac{\left(x+2\right)\ln\left(x+1\right)}{x}$； .... 5 分

构造函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\left(x+2\right)\ln\left(x+1\right)}{x}$， $x\in\left(0,+\infty\right)$

$f'\left(x\right)=\dfrac{x\left(x+2\right)-2\left(x+1\right)\ln\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)x^2}$， 令 $g\left(x\right)=x\left(x+2\right)-2\left(x+1\right)\ln\left(x+1\right)$， $x\in\left(0,+\infty\right)$，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)=2x-2\ln(x+1)\ge 0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，

因为 $g(0)=0$，所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g(0)>0$，$f'(x)>0$，

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，而 $x\to 0^+$ 时，$f(x)\to 2^+$ .... 8 分

综上，若要满足 $k\le f(x)$，k 的取值范围为 $(0,2]$ .... 9 分

备注：由题意知，当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$\ln(x+1)\ge\dfrac{kx}{x+2}$；

整理得：$x=0$ 时，$\ln(x+1)=\dfrac{kx}{x+2}$，符合题意；当 $x\ne 0$ 时，应有 $k\le\dfrac{(x+2)\ln(x+1)}{x}$； .... 5 分

构造函数 $f(x)=\dfrac{(x+2)\ln(x+1)}{x}$，$x\in(0,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{\dfrac{x(x+2)}{x+1}-2\ln(x+1)}{(x+1)^2x^2}$$

令$g(x)=\dfrac{x(x+2)}{x+1}-2\ln(x+1)$，$g'(x)=\dfrac{x(x+2)+2}{(x+1)^2}-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{x^2}{(x+1)^2}>0$，下面步骤与上方法相同。

法二：，$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2k}{(x+2)^2}$ .... 4 分

.... 6 分

$\because f(0)=0,\therefore f'(0)=1-\dfrac{k}{2}\ge 0\therefore k\le 2$, 又$k>0,\therefore 0<k\le 2$

下证充分性：

$f(x)\ge\ln(x+1)-\dfrac{2x}{x+2}$

令$F(x)=\ln(x+1)-\dfrac{2x}{x+2}$，$F'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{4}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}>0$ .... 8 分

$\therefore F(x)$在$[0,+\infty)$上单增,$\therefore F(x)\ge F(0)=0$

$\therefore f(x)\ge 0$ 恒成立. .... 9 分

（3）构造函数 $f(x)=x-\ln(1+x),x\in[0,+\infty)$，

代入 $x=\dfrac{3}{3i-1}$，$f\left(\dfrac{3}{3i-1}\right)=\dfrac{3}{3i-1}-\ln\left(\dfrac{3i+2}{3i-1}\right)=\dfrac{3}{3i-1}-\left[\ln(3i+2)-\ln(3i-1)\right]$，

累加得：$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{3}{3i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{3i-1}-\left[\ln(3n+2)-\ln 2\right]=\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{3i-1}-\ln\left(1+\frac{3}{2}n\right)$，

故仅需证：$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{3}{3i-1}\right)<\frac{12}{5}-2\ln 2\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$， .... 12 分

构造函数 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2=x-\frac{1}{2}x^2-\ln(1+x),x\in[0,+\infty)$，其中 $g(0)=0$，

$g'(x)=-\frac{x^2}{1+x}\le 0$， $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减， $g(x)\le g(0)=0$

即 $f(x)=x-\ln(1+x)\le\frac{1}{2}x^2$， $x\in[0,+\infty)$，

当 $i\ge 2$ 时， $f\left(\frac{3}{3i-1}\right)\le\frac{1}{2}\left(\frac{3}{3i-1}\right)^2<\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{(3i-4)(3i-1)}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3i-4}-\frac{1}{3i-1}\right)$ .... 15 分

$$\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{3}{3i-1}\right)\le f\left(\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+\sum_{i=3}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{3i-1}\right)^2<\left(\frac{3}{2}-\ln\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{3}{5}-\ln\frac{8}{5}\right)+\frac{3}{2}\sum_{i=3}^{n}\left(\frac{1}{3i-4}-\frac{1}{3i-1}\right)$$

$=\frac{21}{10}-\ln 4+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3n-1}\right)=\frac{12}{5}-2\ln 2-\frac{3}{6n-2}<\frac{12}{5}-2\ln 2$，原命题得证. .... 17 分

命题：天台中学，余杭高级中学

审题：桐庐中学

终审:玉环中学