绝密★考试结束前

高三数学学科试题

考生须知：

1．本卷共 4 页满分 150 分，考试时间 120 分钟；

2．答题前，在答题卷指定区域填写班级、学号和姓名；考场号、座位号写在指定位置；

3．所有答案必须写在答题纸上，写在试卷上无效；

4．考试结束后，只需上交答题纸。

选择题部分

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{0,1,2,3\}$， $B=\{x\mid 0\le \ln x\le 1\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{0,1\}$　　B．$\{1,2\}$　　C．$\{0,1,2\}$　　D．$\{1,2,3\}$

2．已知函数 $f(x)=\sin x$，则 $f'(\frac{\pi}{6})=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3．已知圆 $O:x^2+y^2=4$，过点 $P\left(0,-4\right)$ 作圆 O 的两条切线，则这两条切线的夹角为（　　）

A．$\frac{2\pi}{3}$　　B．$\frac{\pi}{6}$　　C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$\frac{\pi}{3}$

4．已知 $\vec{a},\vec{b}$ 是两个不共线的向量，且 $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}+5\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{a}+2\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=-\vec{a}-3\vec{b}$，则四边形 $ABCD$ 的形状是（　　）

A．梯形　　B．菱形　　C．矩形　　D．无法构成四边形

5. AI 算法是基于数学理论和逻辑规则设计的，当 AI 算法在计算机上运行时，所有数据都会被转换为二进制形式存储和处理．设正整数 $n=a_0\cdot 2^0+a_1\cdot 2^1+\cdots+a_{k-1}\cdot 2^{k-1}+a_k\cdot 2^k$，其中 $a_i\in\{0,1\}$，$i=0,1,2,\cdots,k$．记 $p\left(n\right)=a_0+a_1+\cdots+a_k$．则 $p\left(26\right)=$（　　）

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 26

6．已知 $a,b\in R$ 且 $a,b>0$，若函数 $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{a}-\frac{b\cos x}{2}$ 有唯一零点，则 $2a+b$ 的最小值为（　　）

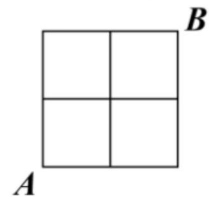
A．$2\sqrt{2}$　　B．$3\sqrt{2}$　　C．$4\sqrt{2}$　　D．$5\sqrt{2}$

7．已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，$F_1,F_2$ 为椭圆 C 的左、右焦点，点 P 为椭圆 C 上在第一象限内的一点，且 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 $\frac{3}{2}$，则 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线所在的直线方程为（　　）

A．$2x-2y+1=0$　　B．$4x-2y-1=0$　　C．$8x-2y-5=0$　　D．$3x-2y=0$

8. 如图所示，由 4 个边长为 1 的小正方形拼成一个边长为 2 的大正方形网格，质点从顶点 A 出发，沿着网格线运动至顶点 B 停止，规定运动过程中任意顶点（含起点和终点）均不可重复经过. 设随机变量 X 表示质点从 A 到 B 经过的路径总长度，若质点所有可能的运动路径是等可能的，则 $E\left(X\right)=$（　　）

A. $\frac{11}{2}$　　B. $\frac{16}{3}$　　C. $\frac{26}{5}$　　D. $\frac{40}{7}$



第 8 题图

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分，部分选对得部分分，有选错得 0 分.

9. 若经过点 $P\left(2,4\right)$ 的直线与抛物线 $C:y^2=2px\left(p>0\right)$ 恒有公共点，则 C 的准线可能是（　　）

A. $x=-1$　　B. $x=-4$　　C. $x=-2$　　D. $x=-\sqrt{2}$

10. 已知函数 $f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x(\omega>0)$，则下列说法正确的是（　　）

A. 若 $\omega=1$，则 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},0)$ 上单调递增

B. 若 $f(\frac{\pi}{4})=1$，则 ω 的最小值为 1

C. 若将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，所得图象与 $f(x)$ 关于 y 轴对称，则 ω 的最小值为 3

D. 若 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上无零点，则 ω 的取值范围为 $\left(0,\frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right]$

11. “杨辉三角”由南宋数学家杨辉在所著《详解九章算法》中首次提出，它揭示了二项式系数在三角形数表中的几何排列规律. 如图所示，记“杨辉三角”第 i 行第 j 个数为 $a(i,j)$，并由此构造新的 P-数表，记 P-数表的第 i 行第 j 个数为 $P(i,j)$，满足 $P(i,j)=(j-1)\cdot a(i,j)$，P-数表第 n 行所有数字之和记为 a_n，则下列说法正确的是（　　）

A. $P(4,4)=12$ 浙考神墙750

B. 当 $i\geq 2, j\geq 2$ 时，$P(i,j)=i\cdot a(i-1,j-1)$

C. a_{55} 除以 7 的余数为 1

D. $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sin\frac{a_{i+1}}{i+1}}=\frac{1}{\tan 1}-\frac{1}{\tan 2^n}$

第1行　　1　1
第2行　　1　2　1
第3行　　1　3　3　1
第4行　　1　4　6　4　1
第5行　　1　5　10　10　5　1
⋮　　⋮

第 11 题图 杨辉三角

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知 $a\in R$，若复数 $\dfrac{1+a\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$ 是纯虚数，则实数 a 的值为__________.

13. 若函数 $f\left(x\right)=x^{3}-3x$ 在区间 $\left(m,m+2\right)$ 上存在最小值-2，则实数 m 的取值范围是__________.

14. 已知正四面体 $A-BCD$ 的棱长为 $2\sqrt{6}$，点 E 为$\triangle BCD$ 的重心，点 P 在正四面体表面上的动点，且满足点 P 到点 E 的距离恒为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，则点 P 的运动轨迹的总长度为__________.

非选择题部分

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13 分）在$\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $a\cos C=b+\dfrac{1}{2}c$.

（1）求角 A 的大小；

（2）已知 $BC=8$，D 为 BC 的中点，且 $AD=3$，求$\triangle ABC$ 的周长.

16.（15 分）近年来，我国新能源汽车市场持续扩容，某市为研究新能源汽车市场增长规律，统计了连续 6 年的年度销售数据，设年份编码为 x（第 1 年、第 2 年……第 6 年），年度总销量为 y（单位：千辆），对应数据如下：

年份编码 x	1	2	3	4	5	6
销售量 y	276	312	354	386	418	450

（1）求这 6 年销售量数据的极差与第 75 百分位数；

（2）从这 6 年销售量数据中随机抽取 2 个数据，已知其中一个数据不小于 400（千辆），求另一个数据也不小于 400（千辆）的概率；

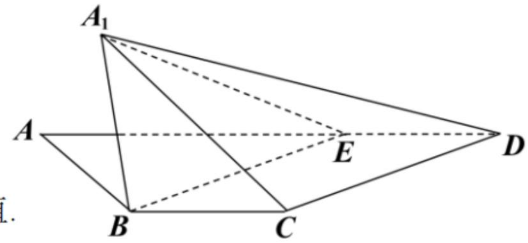
（3）销售量 y 与年份编码 x 具有较强的线性相关关系，试求 y 关于 x 的经验回归方程，并预测第 8 年该市新能源汽车的年度销售量（单位：千辆，结果保留小数后两位）.

参考公式及数据：（1）$\sum_{i=1}^{6}x_iy_i=8296$（2）$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}$，$a=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

17.（15 分）如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD=3BC=3\sqrt{2}$，$AB=2$，点 E 是边 AD 上靠近点 D 的三等分点，将△ ABE 沿直线 BE 翻折至△ A_1BE 的位置.

（1）若 $A_1D=\sqrt{14}$，求证：$CE\perp$ 平面A_1BC； 浙考神墙750

（2）记平面 A_1BE 与平面 A_1CD 的夹角为θ，求 $\cos\theta$ 的最小值.



第 17 题图

18.（17 分）已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为 2，直线$l:y=1$与双曲线$C$交于$M,N$两点，且$|MN|=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

（1）求双曲线 C 的标准方程；

（2）若 A,B 是双曲线C的左右顶点，点 D 是线段 MN 上一点（异于 M,N 两点），直线 AD 与双曲线 C 交于点 P，直线 BD 与双曲线 C 交于点 Q，直线 AQ 与直线 BP 交于点 H.

（i）求四边形 $ADBH$ 面积的最大值；

（ii）是否存在定点T，使得以TH 为直径的圆始终与某条定直线l'相切？若存在，求出该定点 T 的坐标；若不存在，请说明理由.

19.（17 分）对于定义在区间 I 上的函数 $f(x),g(x)$，若对 $\forall x\in I$，都有 $f(x)\le g(x)$，则称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的“上域函数”；若对 $\forall x\in I$，都有 $f(x)\ge g(x)$，则称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的“下域函数”.

（1）试判断以下函数中，哪些是 $y=\ln(x+1)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的“上域函数”？哪些是 $y=\ln(x+1)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的“下域函数”？（直接写出结论，无需证明）

① $y=x$； ② $y=\dfrac{x}{x+1}$； ③ $y=-\dfrac{1}{2}x^2+x$；

（2）已知实数 $k>0$，$y=\dfrac{kx}{x+2}$ 是 $y=\ln(x+1)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的“下域函数”，求实数 k 的取值范围；

（3）求证：$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{3}{3i-1}-\ln(1+\dfrac{3}{2}n)<\dfrac{12}{5}-2\ln 2\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$.