高三年级10月考试数学试题

考试时间：120分钟　试卷满分：150分　命题、审题：高三数学备课组

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的．

1. 在复平面内，$(2+2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})$的共轭复数对应的点位于（　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

【答案】C

【解析】

【分析】先利用复数的乘法化简，再利用复数的几何意义求解.

【详解】根据题意，$(2+2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})=2+4\mathrm{i}+2\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2=-2+6\mathrm{i}$，

则$-2+6\mathrm{i}$的共轭复数为$-2-6\mathrm{i}$，其对应的点为$(-2,-6)$，位于第三象限.

故选：C.

2. 集合$A=\{1,2\},B=\{x|x^2-3x-4<0,x\in\mathbf{N}\}$，则满足$A\subseteq C\subseteq B$的集合$C$的个数为（　）

A. 4　　B. 7　　C. 15　　D. 16

【答案】A

【解析】

【分析】解不等式求出集合B，然后根据子集的概念求解．

【详解】$B=\{x|x^2-3x-4<0,x\in\mathbf{N}\}=\{x|(x+1)(x-4)<0,x\in\mathbf{N}\}=\{x|-1<x<4,x\in\mathbf{N}\}=\{0,1,2,3\}$，

又$A=\{1,2\}$，

则满足$A\subseteq C\subseteq B$的集合C有：$\{1,2\},\{0,1,2\},\{1,2,3\},\{0,1,2,3\}$，共4个，

故选：A．

3. 若双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线的夹角为$60^\circ$，则该双曲线的离心率为（　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. 2或$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$或$\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据双曲线的渐近线方程和倾斜角进行求解即可.

【详解】因为双曲线的两条渐近线夹角为60°，

则渐近线的倾斜角为$30^{\circ},150^{\circ}$或$60^{\circ},120^{\circ}$，

所以渐近线的斜率为$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$或$\pm\sqrt{3}$.

因为该双曲线方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，所以渐近线方程为$y=\pm\dfrac{b}{a}x$.

所以$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$或$\sqrt{3}$.

所以双曲线的离心率为$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$或 2.

故选：C.

4. 将函数$y=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$的图象向左平移$m\left(m>0\right)$个单位长度后，所得的图象关于原点对称，则$m$的最小值为（　）

A. $\dfrac{\pi}{12}$　　B. $\dfrac{\pi}{6}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据函数图象的平移变换，可得$y=\tan\left(2x+2m+\dfrac{\pi}{3}\right)$，结合题意可知该函数为奇函数，利用奇函数的性质列式，化简求值，即得答案.

【详解】将函数$y=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$的图象向左平移$m\left(m>0\right)$个单位长度后，

所得的图象对应的函数为$y=\tan\left[2\left(x+m\right)+\dfrac{\pi}{3}\right]=\tan\left(2x+2m+\dfrac{\pi}{3}\right)$,

由题意知$y=\tan\left(2x+2m+\dfrac{\pi}{3}\right)$的图象关于原点对称，即函数为奇函数，

故 $\tan\left(-2x+2m+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\tan\left(2x+2m+\dfrac{\pi}{3}\right)$，

即 $\tan\left(-2x+2m+\dfrac{\pi}{3}\right)=\tan\left[-\left(2x+2m+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$，

故 $-2x+2m+\dfrac{\pi}{3}=-\left(2x+2m+\dfrac{\pi}{3}\right)+k\pi, k\in\mathrm{Z}$，

即 $4m=k\pi-\dfrac{2\pi}{3}, k\in\mathrm{Z}\Rightarrow m=\dfrac{k\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}, k\in\mathrm{Z}$，

因为 $m>0$，故当 $k=1$ 时，m 取最小值 $-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{12}$.

另解：由题意知 $y=\tan\left(2x+2m+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象关于原点对称，

故 $2m+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}k\pi, k\in\mathrm{Z}$，即 $m=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{4}k\pi, k\in\mathrm{Z}$，

因为 $m>0$，故当 $k=1$ 时，m 取最小值 $-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{12}$，

故选：A

5. 已知定义在 $[1-m,2m-3]$ 上的偶函数 $f(x)$，且当 $x\in[0,2m-3]$ 时，$f(x)$ 单调递减，则关于 x 的不等式 $f(x-2)>f(3x-2m)$ 的解集是（　）

A. $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$　　B. $(-\infty,1)\cup\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

C. $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{3}\right]$　　D. $\left(\dfrac{2}{3},2\right]$

【答案】C

【解析】

【分析】根据偶函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称求出 m 的值，利用 $f(x)$ 是偶函数可得 $f(x)=f(|x|)$，将不等式 $f(x-2)>f(3x-2m)$ 转化为 $f(|x-2|)>f(|3x-4|)$，利用当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)$ 单调递减，将 $f(|x-2|)>f(|3x-4|)$ 转化为 $|x-2|<|3x-4|$，解出此不等式；$f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，得到 $\begin{cases}-1\le x-2\le 1\\ -1\le 3x-4\le 1\end{cases}$，解出此不等式组，从而得解.

【详解】$\because$ 定义在 $[1-m,2m-3]$ 上的偶函数 $f(x)$，$\therefore 1-m+2m-3=0$，$\therefore m=2$，

$\because$ 当 $x\in\left[0,2m-3\right]$ 时，$f\left(x\right)$ 单调递减，$\therefore$ 当 $x\in\left[0,1\right]$ 时，$f\left(x\right)$ 单调递减，

$\because$ 定义在 $\left[1-m,2m-3\right]$ 上的偶函数 $f\left(x\right)$，$f\left(x\right)=f\left(\left|x\right|\right)$

$\because f\left(x-2\right)>f\left(3x-2m\right)$，$m=2$，$\therefore f\left(\left|x-2\right|\right)>f\left(\left|3x-4\right|\right)$，

$\because$ 当 $x\in\left[0,1\right]$ 时，$f\left(x\right)$ 单调递减，

$\therefore\left|x-2\right|<\left|3x-4\right|$，$\therefore(x-2)^2<(3x-4)^2$，即 $2x^2-5x+3>0$，

解得 $x>\dfrac{3}{2}$ 或 $x<1$，

$\because f\left(x\right)$ 的定义域为 $[-1,1]$，

$\therefore\begin{cases}-1\le x-2\le 1\\-1\le 3x-4\le 1\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}1\le x\le 3\\1\le x\le \dfrac{5}{3}\end{cases}$，

$\therefore 1\le x\le\dfrac{5}{3}$，

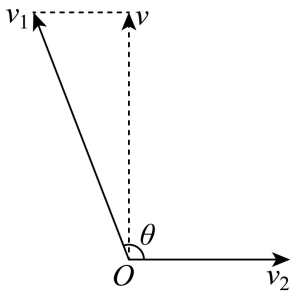
$\therefore x>\dfrac{3}{2}$ 或 $x<1$ 和 $1\le x\le\dfrac{5}{3}$ 要同时成立，

$\therefore\dfrac{3}{2}<x\le\dfrac{5}{3}$，

$\therefore$ 关于 x 的不等式 $f\left(x-2\right)>f\left(3x-2m\right)$ 的解集为 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{3}\right]$.

故选：C.

6. 如图，一条河两岸平行，河的宽度为 $200\ \mathrm{m}$，一艘船从河岸边的 A 地出发，向河对岸航行．已知船在静水中的速度 v_1 的大小为 $\left|v_1\right|=10\ \mathrm{km/h}$，水流速度 v_2 的大小为 $\left|v_2\right|=8\ \mathrm{km/h}$．设这艘船行驶方向与水流方向的夹角为 θ，行驶完全程需要的时间为 $t\left(\min\right)$，若船的航程最短，则（　　）



A. $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{2\pi}{3},t=1.5$　　B. $\dfrac{2\pi}{3}<\theta<\dfrac{3\pi}{4},t=1.5$

C. $\dfrac{2\pi}{3}<\theta<\dfrac{3\pi}{4},t=2$　　D. $\dfrac{3\pi}{4}<\theta<\dfrac{5\pi}{6},t=2$

【答案】D

【解析】

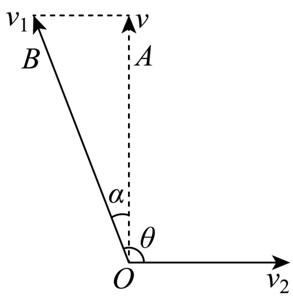
【分析】由题意可得$\sin\alpha$，可分析α的范围，再由同角三角函数基本关系求出$\cos\alpha$，据此可求出速度v，再由$t=\frac{s}{v}$求解.

【详解】如图，设$\angle AOB=\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，要使船的航程最短，则船的实际航行方向与岸边垂直，

由图可知$\sin\alpha=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$，所以$\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\alpha<\frac{\sqrt{3}}{2}$，故$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{3}$，

所以$\frac{3\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{6}$，又因为$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，所以$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，

所以$v=v_1\cos\alpha=10\times\frac{3}{5}=6$（$\mathrm{km/h}$），故$t=\frac{200}{\frac{6\times10^3}{60}}=2$ $(\min)$.



故选：D.

7. 若$e^{x_1}\cdot x_3=\ln x_2\cdot x_3=1$，则下列不等关系一定不成立的是（　　）

A. $x_3>x_2>x_1$　　B. $x_3>x_1>x_2$　　C. $x_2>x_1=x_3$　　D. $x_2>x_1>x_3$

【答案】B

【解析】

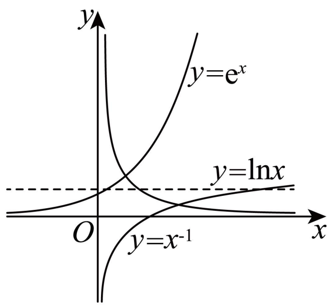
【分析】由$e^{x_1}\cdot x_3=\ln x_2\cdot x_3=1$，可得$e^{x_1}=\ln x_2=\frac{1}{x_3}$，作出函数$y=e^x, y=\ln x, y=\frac{1}{x}(x>0)$的图象，作出$y=m$，变换$m$的值即可得出答案.

【详解】因为$e^{x_1}\cdot x_3=\ln x_2\cdot x_3=1$，

则$e^{x_1}=\ln x_2=\frac{1}{x_3}$，

由$e^{x_1}>0$，得$x_2>1$，$x_3>0$，

作函数 $y=e^x, y=\ln x, y=\frac{1}{x}(x>0)$ 的图象，同时作出 $y=m$，



如上图，变换 m 的值可以发现 $x_3>x_2>x_1$， $x_2>x_1=x_3$， $x_2>x_1>x_3$ 均能够成立， $x_3>x_1>x_2$ 不可能成立.

故选：B.

8. 已知直线 $x+ay-\sqrt{5}a+2=0$ 与圆 $O:x^2+y^2=r^2(r>0)$ 交于不同的两点 A,B，若 $\angle AOB$ 存在最小值且最小值不大于 90°，则 r 的取值范围为（ ）

A. $(\sqrt{3},2]$　　B. $(3,2\sqrt{3}]$　　C. $(3,3\sqrt{2}]$　　D. $(3,6]$

【答案】C

【解析】

【分析】先根据 $\angle AOB$ 存在最小值分析出 $r>3$，再根据 $\angle AOB$ 最小值不大于 90° 列出关于 r 的不等式即可求解.

【详解】将直线 $x+ay-\sqrt{5}a+2=0$ 变形为 $x+2+a(y-\sqrt{5})=0$，

则可知直线恒过定点 $P(-2,\sqrt{5})$，且 $|OP|=\sqrt{(-2-0)^2+(\sqrt{5}-0)^2}=3$，

若 $r\le 3$，则直线可和圆 O 相切，如图所示，此时 A,B 重合，若直线与圆 O 交于不同的两点 A,B，

则 $\angle AOB$ 可不断趋于 0，不存在最小值，与题意不符，故 $r>3$，

即 P 在圆 O 内，直线与圆 O 一定交于两点 A,B，此时对于任意给定的半径 r，

根据圆的性质，当 $OP\perp AB$ 时，弦 AB 最短，$\angle AOB$ 最小，此时弦长 $|AB|=2\sqrt{r^2-|OP|^2}=2\sqrt{r^2-9}$，

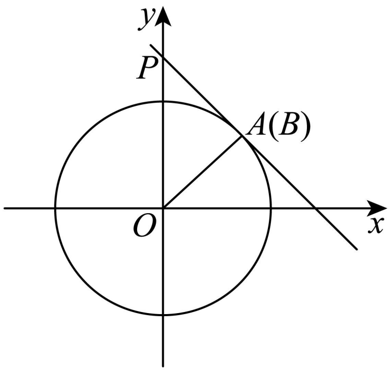
在 $\triangle AOB$ 中，当 $\angle AOB = 90^\circ$ 时，此时 $|AB|=\sqrt{2}r$，

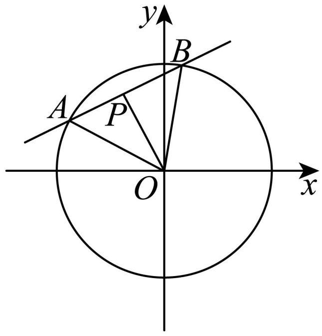
由题意，已知 $\angle AOB$ 最小值不大于 90°，则最小值对应的弦 AB 满足 $|AB|\le\sqrt{2}r$，

即 $2\sqrt{r^2-9}\le\sqrt{2}r$，解得 $r\le 3\sqrt{2}$，

综上，r 的取值范围为 $(3,3\sqrt{2}]$.

故选：C.





二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E,F 分别为棱 B_1C_1,CD 的中点，则（　）

A. $AE\perp BD$　　　　B. $A_1E\perp$ 平面 BB_1F

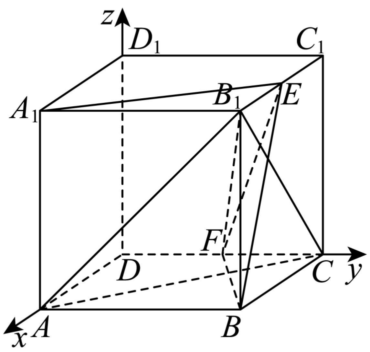
C. $EF//$ 平面 AB_1C　　　　D. $BE//DC_1$

【答案】BC

【解析】

【分析】建立空间直角坐标系，利用空间向量数量积的坐标表示公式、直线方向向量与平面法向量的关系逐一判断即可.

【详解】建立如下图所示的空间直角坐标系，设该正方体的棱长为 2.



A：因为 $A\left(2,0,0\right),E\left(1,2,2\right),B\left(2,2,0\right),D\left(0,0,0\right)$，

所以 $\overrightarrow{AE}=\left(-1,2,2\right),\overrightarrow{DB}=\left(2,2,0\right)$，

因为 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DB}=-2+4+0=2\neq 0$，

所以 $AE\perp BD$ 不成立，故本选项说法不正确；

B：因为 $A_1\left(2,0,2\right),B_1\left(2,2,2\right),B\left(2,2,0\right),E\left(1,2,2\right),F\left(0,1,0\right)$，

所以 $\overrightarrow{A_1E}=(-1,2,0),\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2),\overrightarrow{BF}=(-2,-1,0)$，

因为 $\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0,\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{BF}=2-2=0$，

所以 $A_1E\perp BB_1,A_1E\perp BF$，而 $BB_1\cap BF=B,BB_1,BF\subset$ 平面 BB_1F，

所以 $A_1E\perp$ 平面 BB_1F，因此本选项说法正确；

C：设平面 AB_1C 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

因为 $C(0,2,0)$，所以 $\overrightarrow{AC}=(-2,2,0),\overrightarrow{AB_1}=(0,2,2)$，

于是有 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x+2y=0\\ 2y+2z=0\end{cases}\Rightarrow\vec{m}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{EF}=(-1,-1,-2)$，

因为 $\overrightarrow{EF}\cdot\vec{m}=-1-1+2=0$，$EF\not\subset$ 平面 AB_1C，

所以 $EF//$ 平面 AB_1C，因此本选项说法正确；

D：因为 $C_1(0,2,2)$，所以 $\overrightarrow{DC_1}=(0,2,2)$，而 $\overrightarrow{BE}=(-1,0,2)$，

显然不存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{DC_1}=\lambda\overrightarrow{BE}$ 成立，所以 $BE//DC_1$ 不成立，因此本选项说法不正确，

故选：BC

10. 抛物线有如下光学性质：从焦点发出的光线，经过抛物线上的一点反射后，反射光线平行于抛物线的轴；一束平行于抛物线的轴的光线，经过抛物线的反射集中于它的焦点．已知抛物线 $C:y^2=8x,O$ 为坐标原点，一条平行于 x 轴的光线 l_1 从点 $M(5,2)$ 射入，经过 C 上的点 P 反射，再经过 C 上的另一点 Q 反射后沿直线 l_2 射出，则（　）

A. $|PQ|=25$

B. $\triangle OPQ$ 是一个钝角三角形

C. 若延长 PO 交直线 $x=-2$ 于点 D，则点 D 在直线 l_2 上

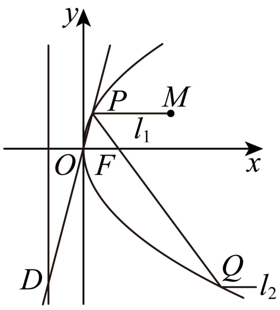
D. 抛物线 C 在点 P 处的切线分别与直线 l_1、FP 所成的角相等

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据题目条件，依次求得 F，P，Q 的坐标，进而求出 $|OP|$，$|OQ|$，$|PQ|$，可判断选项 A 和 B；

求出直线 OP 方程进而求出 D 的坐标，可判断选项 C；通过导数求出切线方程，并根据平面几何知识，三角形的等边对等角及平行线同位角内错角相等，可判断选项 D.

【详解】

由抛物线 C 的方程 $y^2=8x$ 可知，其焦点 F 的坐标为 $(2,0)$.由题目可知，$MP//x$ 轴，$M(5,2)$，故点 P 的纵坐标为 2.

设点 P 坐标 $(x_p,2)$，又因为点 P 在抛物线 C 上，故 $2^2=8x_p$，解得 $x_p=\frac{1}{2}$，故 $P(\frac{1}{2},2)$.由题意可知，平行于 x 轴的光线 l_1 经抛物线反射后会集中于焦点 F，因此直线 PQ 经过点 F.

直线 PQ 斜率为 $\frac{2-0}{\frac{1}{2}-2}=-\frac{4}{3}$，因此直线 PQ 的方程为 $y=-\frac{4}{3}(x-2)$.

直线 PQ 与抛物线 C 交于 P，$Q(x_Q,y_Q)$ 两点，联立方程 $\begin{cases}y=-\frac{4}{3}(x-2)\\y^2=8x\end{cases}$，解得 $x_Q=8,y_Q=-8$，

因此 $|PQ|=\sqrt{(8-\frac{1}{2})^2+(-8-2)^2}=\frac{25}{2}$，故 A 选项错误.

因为 $|OP|=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+2^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$，$|OQ|=\sqrt{8^2+(-8)^2}=8\sqrt{2}$.

所以 $|OP|^2+|OQ|^2=\frac{529}{4},|PQ|^2=\frac{625}{4}$，所以 $|OP|^2+|OQ|^2<|PQ|^2$.

因此 $\triangle OPQ$ 是钝角三角形.故选项 B 正确.

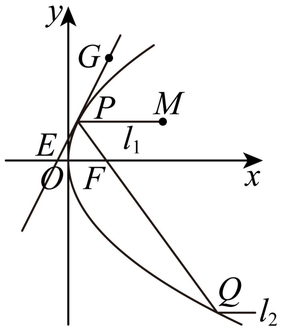
由 P,O 两点坐标可知，直线 OP 的方程为 $y=4x$.

设直线 OP 与直线 $x=-2$ 相交于 $D(x_D,y_D)$，

联立 $\begin{cases}y=4x\\x=-2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_D=-2\\y_D=-8\end{cases}$.

又因为光线 PQ 经抛物线 C 的焦点 F，故经过点 Q 反射后，直线 l_2 平行于 x 轴.

因此l_2：$y=-8$.故点$D(-2,-8)$在直线l_2上.故选项C正确.



当$y\geq 0$时，抛物线C的方程可表示为$y=2\sqrt{2x}$.

求导得$y'=\sqrt{\frac{2}{x}}$，故过P作抛物线的切线斜率为2.故该切线方程为$y=2x+1$.

设该切线在点P上方有一点G，且与x轴相交于E.易知$E(-\frac{1}{2},0)$.

故$|EF|=\frac{5}{2}$，$|PF|=\sqrt{2^2+(\frac{1}{2}-2)^2}=\frac{5}{2}$，因此$|EF|=|PF|$，所以$\angle PEF=\angle PFE$，

又因为$l_1//x$轴，所以$\angle PEF=\angle GPM$，$\angle MPF=\angle PFE$，故$\angle GPM=\angle FPE$，

即点P处的切线分别与直线l_1、FP所成的角相等.故选项D正确.

故选：BCD

11. 在$\triangle ABC$中，a,b,c是角A,B,C的对应边，满足$\frac{\cos A}{\sin B}+\frac{\cos B}{\sin A}=2,a+b+c=10$，下列说法正确的是（　）

A. $\sin C=\frac{b^2+c^2-a^2}{2b^2}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2a^2}$

B. $\tan A\cdot\tan B$的最小值为2

C. $\triangle ABC$的面积最大值为$25\left(3-2\sqrt{2}\right)$

D. 若$\sin A\sin B\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}$，则$b^2=a\left(a+c\right)$

【答案】AC

【解析】

【分析】先判断$C=\frac{\pi}{2}$，结合勾股定理即可判断A；利用基本不等式可判断B；由$a+b+c=10$，则$a+b=10-c$，结合$2\left(a^2+b^2\right)\geq\left(a+b\right)^2$，即得$2c^2\geq\left(10-c\right)^2$，可求出$c\geq 10\sqrt{2}-10$，结合三角形面

积公式 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab=25-5c$，可判断 C；由条件 $\sin A\sin B\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，可求得 A 的值，可得 a,b,c 的关系，可判断 D.

【详解】由 $\dfrac{\cos A}{\sin B}+\dfrac{\cos B}{\sin A}=2$，可得 $\sin A\cos A+\sin B\cos B=2\sin A\sin B$，

即得 $\dfrac{1}{2}\sin 2A+\dfrac{1}{2}\sin 2B=2\sin A\sin B$，

即得 $\sin(A+B)\cos(A-B)=\cos(A-B)-\cos(A+B)$，

则 $\sin C\cos(A-B)=\cos(A-B)+\cos C$，

若 $C\neq\dfrac{\pi}{2}$，则 $\sin C\neq 1$，则可得 $\cos(A-B)=-\dfrac{\cos C}{1-\sin C}$，

令 $t=\sin C(0<t<1)$，则 $\left|\cos\left(A-B\right)\right|=\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{1-t}=\sqrt{\dfrac{1-t^2}{\left(1-t\right)^2}}=\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}>1$，

这是不可能的，从而可知 $C=\dfrac{\pi}{2}$；

对于 A，由于 $C=\dfrac{\pi}{2}$，故 $\sin C=1,a^2+b^2=c^2$，

故 $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2b^2}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a^2}=\dfrac{b^2+\left(a^2+b^2\right)-a^2}{2b^2}+\dfrac{a^2+b^2-\left(a^2+b^2\right)}{2a^2}$

$=\dfrac{2b^2}{2b^2}+\dfrac{0}{2a^2}=1=\sin C$，A 正确；

对于 B，在 $\triangle ABC$ 中，$C=\dfrac{\pi}{2}$，故 A,B 均为锐角且互余，

则 $\tan A\tan B=\tan A\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)=\tan A\times\dfrac{1}{\tan A}=1$，

故 $\tan A\cdot\tan B$ 为定值 1，B 错误；

对于 C，$\because C=\dfrac{\pi}{2},\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab$，且 $a^2+b^2=c^2$，

由 $a+b+c=10$，则 $a+b=10-c$，结合 $2\left(a^2+b^2\right)\geq\left(a+b\right)^2$，

当且仅当 $a=b$ 时取等号，

得 $2c^2\geq\left(10-c\right)^2$，解得 $c\geq 10\sqrt{2}-10$（负值舍去），

又 $ab=\dfrac{1}{2}\left[\left(a+b\right)^2-\left(a^2+b^2\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left[\left(10-c\right)^2-c^2\right]=50-10c$，

故 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab=25-5c\leq 25-5\left(10\sqrt{2}-10\right)=25\left(3-2\sqrt{2}\right)$，

当且仅当 $c=10\sqrt{2}-10, a=b=10-5\sqrt{2}$ 时等号成立，

即 $\triangledown ABC$ 的面积最大值为 $25\left(3-2\sqrt{2}\right)$，C 正确；

对于 D，由于 $C=\frac{\pi}{2}$，则 $\sin C=1$，故由 $\sin A\sin B\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}$，知 $\sin A\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

结合 $\sin B=\cos A$，得 $sin\,A\,cos\,A=\frac{\sqrt{3}}{4}$，即 $\sin 2A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

由于 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\therefore 2A\in\left(0,\pi\right)$，故 $2A=\frac{\pi}{3}$ 或 $2A=\frac{2\pi}{3}$，即 $A=\frac{\pi}{6}$ 或 $A=\frac{\pi}{3}$，

当 $A=\frac{\pi}{6}$ 时，$c=2a, b=\sqrt{3}a$，则 $b^2=3a^2=a\left(a+c\right)$；

当 $A=\frac{\pi}{3}$ 时，$c=2b, a=\sqrt{3}b$，则 $a\left(a+c\right)=\sqrt{3}b\left(\sqrt{3}b+2b\right)\neq b^2$，故 D 错误，

故选：AC

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 若曲线 $y=x+2\sqrt{x}$ 在点 $\left(1,3\right)$ 处的切线也是曲线 $y=\ln x+x+2a$ 的切线，则 $a=$______.

【答案】1

【解析】

【分析】先求出曲线 $y=x+2\sqrt{x}$ 在 $\left(1,3\right)$ 的切线方程，再设曲线 $y=\ln x+x+2a$ 的切点求出 y'，利用公切线斜率相等求出 x_0 表示出切线方程，结合两切线方程相同即可求解

【详解】由 $y=x+2\sqrt{x}$，得 $y'=1+\frac{1}{\sqrt{x}}$，$y'|_{x=1}=2$，

故曲线 $y=x+2\sqrt{x}$ 在 $\left(1,3\right)$ 处的切线方程为 $y=2x+1$；

由 $y=\ln x+x+2a$，得 $y'=1+\frac{1}{x}$，

设切线与曲线 $y=\ln x+x+2a$ 相切的切点为 $\left(x_0,\ln x_0+x_0+2a\right)$，

由两曲线有公切线得 $y'=1+\frac{1}{x_0}=2$，解得 $x_0=1$，则切点为 $\left(1,1+2a\right)$，

故切线方程为 $y-(1+2a)=2(x-1)$，即 $y=2x-1+2a$，

因两切线为同一条直线，方程相同，则 $1=-1+2a$，解得 $a=1$.

故答案为：1

13. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_{15}=120$，等比数列$\{b_n\}$的首项为1，若$a_8=b_4$，则$\log_2 b_{2025}$的值为_____.

【答案】2024

【解析】

【分析】根据条件，利用等差数列的性质，得$a_8=8$，进而得$q=2$，从而有$b_{2025}=2^{2024}$，即可求解.

【详解】设等比数列$\{b_n\}$的公比为q，因为等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_{15}=120$，

所以$S_{15}=\dfrac{15(a_1+a_{15})}{2}=15a_8=120$，解得$a_8=8$，

又等比数列$\{b_n\}$的首项为1，且$a_8=b_4$，所以$q^3=8$，解得$q=2$，所以$b_{2025}=2^{2024}$，

则$\log_2 b_{2025}=\log_2 2^{2024}=2024$，

故答案为：2024.

14. 抛掷一枚质地均匀的正四面体骰子（四个面上分别标有数字 1，2，3，4），底面的点数为 1 记为事件A，抛掷n次后事件A发生奇数次的概率记为P_n，则$P_3=$_____，$P_{2025}=$_____.

【答案】 ①. $\dfrac{7}{16}$ ②. $\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2026}$

【解析】

【分析】根据n次独立重复实验事件A发生的概率为$\dfrac{1}{4}$，构造二项式应用赋值法分别计算即可.

【详解】抛掷 1 次后事件A发生奇数次，只能发生 1 次，$P_1=\dfrac{1}{4}$；

$$P_3=C_3^1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{3-1}+C_3^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{3-3}=\frac{7}{16},$$

抛掷n次后事件A发生$1,3,5,7\cdots$，

抛掷n次后事件A发生奇数次的概率记为P_n

当n为偶数时，$P_n=C_n^1\left(\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}+C_n^3\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-3}+C_n^5\left(\dfrac{1}{4}\right)^5\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5}+\cdots+C_n^{n-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\left(\dfrac{3}{4}\right)$，

当n为奇数时，$P_n=C_n^1\left(\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}+C_n^3\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-3}+C_n^5\left(\dfrac{1}{4}\right)^5\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5}+\cdots+C_n^n\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$，

构造二项式

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}x\right)^n=\mathrm{C}_n^0\left(\frac{3}{4}\right)^n+\mathrm{C}_n^1\left(\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}+\mathrm{C}_n^2\left(\frac{1}{4}x\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}+\mathrm{C}_n^3\left(\frac{1}{4}x\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}+\cdots+\mathrm{C}_n^n\left(\frac{1}{4}x\right)^n,$$

当 n 为奇数时，

令 $x=1$，$1=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)^n=\mathrm{C}_n^0\left(\frac{3}{4}\right)^n+\mathrm{C}_n^1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}+\mathrm{C}_n^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}+\mathrm{C}_n^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}+\cdots+\mathrm{C}_n^n\left(\frac{1}{4}\right)^n$，

令 $x=-1$，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)^n=\mathrm{C}_n^0\left(\frac{3}{4}\right)^n-\mathrm{C}_n^1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}+\mathrm{C}_n^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}-\mathrm{C}_n^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}+\cdots-\mathrm{C}_n^n\left(\frac{1}{4}\right)^n,$$

两式作差得 $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n=2\left[\mathrm{C}_n^1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}+\mathrm{C}_n^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}+\cdots+\mathrm{C}_n^n\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$，

可得 $P_n=\mathrm{C}_n^1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}+\mathrm{C}_n^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}+\cdots+\mathrm{C}_n^n\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，

因为 $n=2025$，所以 $P_{2025}=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2026}$.

故答案为：$\frac{7}{16}$；$\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2026}$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 某种疾病分为甲、乙两种类型，为研究该疾病的类型与患者性别是否有关，随机抽取了 $3x$ 名患者进行调查，得到如下列联表：

性别	疾病类型		合计
	甲型病	乙型病	
男	$\frac{2x}{3}$	$\frac{x}{3}$	x
女	$\frac{x}{2}$	$\frac{3x}{2}$	$2x$
合计	$\frac{7x}{6}$	$\frac{11x}{6}$	$3x$

（1）根据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，得出了“所患疾病的类型与性别有关”的结论，求 x 的最小

值；

（2）现对部分人群接种预防甲型疾病的疫苗，要求每人至多安排 2 个周期接种疫苗，每人每周期必须接种 3 次，每次接种后，产生抗体的概率为 0.8．如果一个周期内至少 2 次产生抗体，那么该周期结束后终止接种，否则进入第二个周期．已知每人每周期接种费用为 30 元，试估计 1000 人接种疫苗总费用的期望．附

$\chi^2=\dfrac{n\left(ad-bc\right)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}$，

α	0.01	0.005	0.001
x_α	6.635	7.879	10.828

【答案】（1）18；　　（2）33120.

【解析】

【分析】（1）根据列联表中的数据求得 χ^2 的值，根据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验可得 $\chi^2>7.879$，求解得答案；

（2）设每人接种疫苗的费用为 ξ，其可能的取值为 $30, 60$，求出 ξ 取值对应的概率，分布列，得到每人接种疫苗的费用的均值，进而求得 1000 人接种疫苗总费用的期望.

【小问 1 详解】

根据列联表中的数据，得到 $\chi^2=\dfrac{3x\left(\dfrac{2x}{3}\cdot\dfrac{3x}{2}-\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{x}{3}\right)^2}{x\cdot 2x\cdot\dfrac{7x}{6}\cdot\dfrac{11x}{6}}=\dfrac{75x}{154}$，

因为根据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，认为“所患疾病的类型与性别”有关，

所以 $\dfrac{75x}{154}>7.879$，解得 $x>16.178$，

因为 $\dfrac{7x}{6}\in \mathrm{Z}$，结合列联表中各式均为整数，

所以 x 的最小整数值为 18.

【小问 2 详解】

设每人接种疫苗的费用为 ξ，其可能的取值为 $30, 60$，

所以 $P(\xi=30)=C_3^2\cdot 0.8^2\times 0.2+0.8^3=\frac{112}{125}$， $P(\xi=60)=1-\frac{112}{125}=\frac{13}{125}$，

所以 ξ 的分布列为

ξ	30	60
P	$\frac{112}{125}$	$\frac{13}{125}$

所以 ξ 的期望 $E(\xi)=30\times\frac{112}{125}+60\times\frac{13}{125}=33.12$，

估计 1000 人接种疫苗总费用的期望为 $33.12\times 1000=33120$ 元.

16. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n， 且 $2S_n=a(2a_n-1), a>1$.

（1）证明：$\{\ln a_n\}$ 为等差数列；

（2）数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_nb_n=2n-1$，当 $a=2$，且 $b_1+b_2+\cdots+b_n>\frac{11}{2}$ 时，求 n 的最小值.

【答案】（1）证明见解析

（2）6

【解析】

【分析】（1）根据 S_n,a_n 的关系和等比数列的定义可得 $\{a_n\}$ 是等比数列，得出 $\{a_n\}$ 的通项公式，进而利用等差数列的定义证明 $\{\ln a_n\}$ 为等差数列；

（2）求得 b_n，令 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，利用错位相减法求得 T_n，可证得 $\{T_n\}$ 单调递增，由此可求得结果.

【小问 1 详解】

由题知，$2S_n=a(2a_n-1), a>1$

当 $n=1$ 时，$2S_1=a(2a_1-1)$，即 $2a_1=a(2a_1-1)$，可得 $a_1=\frac{a}{2a-2}$，

当 $n\geq 2$ 时，$2S_{n-1}=a(2a_{n-1}-1)$，又 $2S_n=a(2a_n-1)$，

所以 $2(S_n-S_{n-1})=a(2a_n-1)-a(2a_{n-1}-1)$，即 $2a_n=2aa_n-2aa_{n-1}$，

整理得 $(a-1)a_n=aa_{n-1}$，可得 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{a}{a-1}$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1=\frac{a}{2a-2}$ 为首项，$q=\frac{a}{a-1}$ 为公比的等比数列，

则 $a_n=a_1q^{n-1}=\dfrac{a}{2a-2}\left(\dfrac{a}{a-1}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{a-1}\right)^{n}$，

$\ln a_n=\ln\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{a-1}\right)^{n}=\ln\dfrac{1}{2}+n\ln\dfrac{a}{a-1}$， $\ln a_1=\ln\dfrac{a}{2(a-1)}$，

$\ln a_{n+1}-\ln a_n=\ln\dfrac{1}{2}+(n+1)\ln\dfrac{a}{a-1}-\left(\ln\dfrac{1}{2}+n\ln\dfrac{a}{a-1}\right)=\ln\dfrac{a}{a-1}$，

所以$\{\ln a_n\}$是以$\ln\dfrac{a}{2(a-1)}$为首项，以$\ln\dfrac{a}{a-1}$为公差的等差数列.

【小问 2 详解】

当$a=2$，$a_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{2-1}\right)^{n}=2^{n-1}$，

因为$a_nb_n=2n-1$，所以$b_n=\dfrac{2n-1}{a_n}=\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$，

令$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\dfrac{1}{2^0}+\dfrac{3}{2^1}+\dfrac{5}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-3}{2^{n-2}}+\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$①，

$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-3}{2^{n-1}}+\dfrac{2n-1}{2^n}$②，

由①－②得：$\dfrac{1}{2}T_n=1+2(\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}})-\dfrac{2n-1}{2^n}$，

即$\dfrac{1}{2}T_n=1+2\times\dfrac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{2n-1}{2^n}=3-\dfrac{2n+3}{2^n}$，

所以$T_n=6-\dfrac{2n+3}{2^{n-1}}$.

$T_{n+1}-T_n=6-\dfrac{2(n+1)+3}{2^n}-\left(6-\dfrac{2n+3}{2^{n-1}}\right)=\dfrac{2n+1}{2^n}>0$，

可得$T_{n+1}>T_n$，则$\{T_n\}$单调递增.

$T_1=6-\dfrac{2+3}{2^0}=1<\dfrac{11}{2}$，$T_2=6-\dfrac{2\times2+3}{2}=\dfrac{5}{2}<\dfrac{11}{2}$，

$T_3=6-\dfrac{2\times3+3}{2^2}=\dfrac{15}{4}<\dfrac{11}{2}$，$T_4=6-\dfrac{2\times4+3}{2^3}=\dfrac{37}{8}<\dfrac{11}{2}$

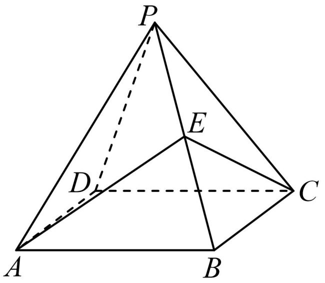
$T_5=6-\dfrac{2\times5+3}{2^4}=\dfrac{83}{16}<\dfrac{11}{2}$，$T_6=6-\dfrac{2\times6+3}{2^5}=\dfrac{177}{32}>\dfrac{11}{2}$，

因为$\{T_n\}$单调递增，所以，当$n=1,2,3,4,5$时，$T_n<\dfrac{11}{2}$；当$n\geq6$时，$T_n>\dfrac{11}{2}$，

由 $b_1+b_2+\cdots+b_n>\frac{11}{2}$，可得 $T_n=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}>\frac{11}{2}$，

故所求 n 的最小值为 6.

17. 如图所示，正四棱锥 $P-ABCD$ 中，点 E 是棱 PB 的中点.



（1）证明：$PD//$ 平面 AEC；

（2）已知异面直线 PD 与 AE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{65}}{13}$，

（i）求二面角 $P-AC-E$ 的正弦值；

（ii）在线段 AD 上是否存在点 F，使 $EF\perp$ 平面 PBC．若存在，求 $\frac{AF}{AD}$ 的值；若不存在，说明理由.

【答案】（1）证明见解析；

（2）（i）$\sin\theta=\frac{\sqrt{10}}{5}$；（ii）存在，$\frac{AF}{AD}=\frac{1}{4}$.

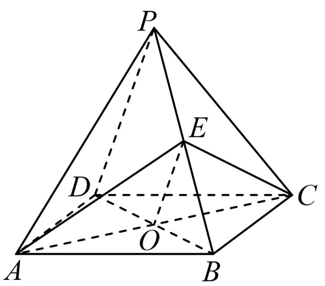
【解析】

【分析】（1）根据中位线得出 $OE//PD$，从而可得 $PD//$ 平面 AEC；

（2）设 $OP=2t$，根据向量法结合异面直线 PD 与 AE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{65}}{13}$ 得出 $t=\sqrt{3}$，进而求 $P-AC-E$ 所成角的余弦值，最后应用同角三角函数关系计算求解；

（3）假设存在点 F，设 $\frac{AF}{AD}=\lambda(0\le\lambda\le1)$，使 $EF\perp$ 平面 PBC，计算得出 $\frac{AF}{AD}$.

【小问 1 详解】



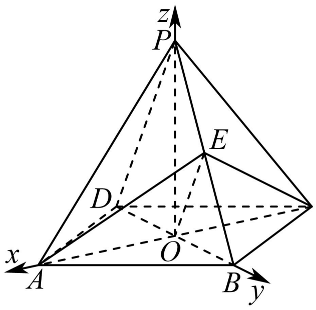
连接 AC,BD， $AC\bigcap BD=O$，连接 OE，因为 O 是 BD 中点，点 E 是棱 PB 的中点，

则 $OE//PD$，

因为 $PD\not\subset$ 平面 AEC， $EO\subset$ 平面 AEC，所以 $PD//$ 平面 AEC.

【小问 2 详解】

（i）



因为 $PO\perp$ 平面 $ABCD$， $AC\perp BD$，所以 OP,OA,OB 两两垂直，

以 O 为坐标原点，OA,OB,OP 所在直线分别为 x， y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，

设 $OA=OB=2\sqrt{2},OP=2t$，

则 $P\left(0,0,2t\right),D\left(0,-2\sqrt{2},0\right),A\left(2\sqrt{2},0,0\right),E\left(0,\sqrt{2},t\right)$，

所以 $\overrightarrow{PD}=\left(0,-2\sqrt{2},-2t\right),\overrightarrow{AE}=\left(-2\sqrt{2},\sqrt{2},t\right)$，又异面直线 PD 与 AE 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{65}}{13}$，

所以 $\dfrac{4+2t^2}{\sqrt{8+4t^2}\times\sqrt{10+t^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$，

解得 $t=\sqrt{3}$，故 $P\left(0,0,2\sqrt{3}\right),C\left(-2\sqrt{2},0,0\right),A\left(2\sqrt{2},0,0\right),E\left(0,\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$，

所以 $\overrightarrow{CA}=\left(4\sqrt{2},0,0\right),\overrightarrow{CE}=\left(2\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$，

设平面 PAC 的一个法向量为 $\vec{m}=\left(0,1,0\right)$，

设平面 ACE 的法向量为 $\vec{n}=\left(x,y,z\right)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=4\sqrt{2}x=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=2\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=0\\ \sqrt{2}y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，取 $y=\sqrt{3}$，得 $\vec{n}=\left(0,\sqrt{3},-\sqrt{2}\right)$.

设二面角 $P-AC-E$ 的平面角为 θ，观察图形可知 θ 为锐角，

所以 $\cos\theta=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\left|\sqrt{3}\right|}{\sqrt{1}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$， $\sin\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$；

（ii）设线段 AD 上是否存在点 F，且 $\frac{AF}{AD}=\lambda(0\le\lambda\le1)$，

因为 $P\left(0,0,2\sqrt{3}\right),C\left(-2\sqrt{2},0,0\right),A\left(2\sqrt{2},0,0\right),E\left(0,\sqrt{2},\sqrt{3}\right),B\left(0,2\sqrt{2},0\right),D\left(0,-2\sqrt{2},0\right)$，

设 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AD}=\lambda\left(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2},0\right)$，$\overrightarrow{AE}=\left(-2\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$，

因为 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\lambda\left(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2},0\right)-\left(-2\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{3}\right)=\left(-2\sqrt{2}\lambda+2\sqrt{2},-2\sqrt{2}\lambda-\sqrt{2},-\sqrt{3}\right)$，

又因为 $\overrightarrow{CB}=\left(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0\right),\overrightarrow{CP}=\left(2\sqrt{2},0,2\sqrt{3}\right)$，

所以 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CP}=0$，

所以 $\begin{cases}-2\sqrt{2}\lambda+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\lambda-\sqrt{2}=0,\\-8\lambda+8-6=0\end{cases}$

所以 $\lambda=\frac{1}{4}$，

当 $\lambda=\frac{1}{4}$ 时，$EF\perp BC,EF\perp CP,CP\cap BC=C,CP,BC\subset$ 平面 PBC，所以 $EF\perp$ 平面 PBC，

所以当 $\frac{AF}{AD}=\frac{1}{4}$ 时，$EF\perp$ 平面 PBC；

18. 设椭圆 $\Gamma:\frac{y^2}{4}+x^2=1$ 的右顶点为 A，上焦点为 F，直线 l 与椭圆交于不同于 A 的两点 B，C.

（1）是否存在 l，使 F 为 $\triangle ABC$ 的重心，试说明理由；

（2）已知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

（i）证明：l 恒过定点；

（ii）设点 P 在 l 上，且满足 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$Q$ 是椭圆上的动点，求 $|PQ|$ 的最大值.

【答案】（1）不存在 l，使 F 为 $\triangle ABC$ 的重心，理由见解析；

（2）（i）证明见解析；（ii）$|PQ|$ 的最大值为 $\frac{4\sqrt{57}}{15}+\frac{4}{5}$.

【解析】

【分析】（1）利用反证法进行证明即可.

（2）（i）设直线 l 方程为 $x=my+t$，与椭圆方程联立，通过 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，进行计算即可.

（ii）根据 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，可知 $AP\perp BC$，点 P 在以 AD 为直径的圆上，对 m 是否为0进行讨论即可.

【小问 1 详解】

不存在 l，使 F 为 $\triangle ABC$ 的重心，根据题意 $A(1,0)$，$F\left(0,\sqrt{3}\right)$，

设$B\left(x_1,y_1\right)$，$C\left(x_2,y_2\right)$，假设存在l，设直线l的斜率为k，使F为$\triangle ABC$的重心，

所以$\begin{cases}0=\dfrac{1+x_1+x_2}{3}\\ \sqrt{3}=\dfrac{y_1+y_2+0}{3}\end{cases}$，解得$\begin{cases}x_1+x_2=-1\\ y_1+y_2=3\sqrt{3}\end{cases}$，

又B，C两点为椭圆上的点，则$\begin{cases}\dfrac{y_1^2}{4}+x_1^2=1\\ \dfrac{y_2^2}{4}+x_2^2=1\end{cases}$，两式相减得$\dfrac{-4\left(x_1+x_2\right)}{\left(y_1+y_2\right)}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k$，所以$k=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$，

设B，C两点中点为M，则M坐标为$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$，故$M\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，

所以直线l为$y-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$，即直线$l$：$y=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}x+\dfrac{31\sqrt{3}}{18}$，

将直线l代入椭圆方程$\dfrac{y^2}{4}+x^2=1$，得到$\dfrac{\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{9}x+\dfrac{31\sqrt{3}}{18}\right)^2}{4}+x^2=1$，

化简得到$496x^2+496x+529=0$，则其判别式为$\Delta=\left(496\right)^2-4\times496\times529=-803520<0$，

所以直线l与椭圆无两个交点，故不存在直线l，使F为$\triangle ABC$的重心.

【小问2详解】

（i）设直线l：$x=my+t$，与椭圆方程$\dfrac{y^2}{4}+x^2=1$，联立得$\left(4m^2+1\right)y^2+8mty+4t^2-4=0$，$\Delta>0$，

所以$\begin{cases}y_1+y_2=\dfrac{-8mt}{4m^2+1}\\ y_1y_2=\dfrac{4t^2-4}{4m^2+1}\end{cases}$，$B\left(x_1,y_1\right)$，$C\left(x_2,y_2\right)$，

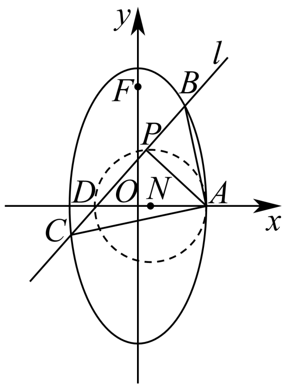
因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，所以$\overrightarrow{AB}=\left(x_1-1,y_1\right)$，$\overrightarrow{AC}=\left(x_2-1,y_2\right)$，

所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)+y_1y_2=x_1x_2-\left(x_1+x_2\right)+1+y_1y_2=0$，

所以$x_1+x_2=my_1+t+my_2+t=\dfrac{2t}{4m^2+1}$，$x_1x_2=\left(my_1+t\right)\left(my_2+t\right)=\dfrac{t^2-4m^2}{4m^2+1}$，

代入得$5t^2-2t-3=0$，解得$t=-\dfrac{3}{5}$或$t=1$，

因为直线 l 与椭圆交于不同于 $A\left(1,0\right)$ 的两点，所以 $t\neq1$，$t=-\dfrac{3}{5}$，则 l 恒过定点 $\left(-\dfrac{3}{5},0\right)$.



（ii）已知直线 l：$x=my-\dfrac{3}{5}$，设 $D\left(-\dfrac{3}{5},0\right)$，由 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，知 $AP\perp BC$，

所以点 P 在以 AD 为直径的圆上，且圆心 $N\left(\dfrac{1}{5},0\right)$，半径 $r=\dfrac{4}{5}$，

因为 $Q\left(x,y\right)$，所以椭圆上一点到圆心的最大距离为

$$\left|QN\right|=\sqrt{\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+y^2}=\sqrt{-3x^2-\frac{2}{5}x+\frac{101}{25}}\left(x\in\left[-1,1\right]\right),$$

所以当 $x=-\dfrac{1}{15}$ 时，最大距离为 $\dfrac{4\sqrt{57}}{15}$，所以 $\left|PQ\right|$ 的最大值为 $\dfrac{4\sqrt{57}}{15}+\dfrac{4}{5}$，

所以 $\left|PQ\right|$ 的最大值为 $\dfrac{4\sqrt{57}}{15}+\dfrac{4}{5}$.

19. 已知函数 $f\left(x\right)=ax^2-\ln x-a$.

（1）当 $f\left(x\right)$ 的最小值为 0 时，求实数 a 的值；

（2）给定 $a\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，证明：$f\left(x\right)$ 存在一个大于 1 的零点 x_0，且 $x_0^2>\dfrac{1}{a}-1$；

（3）若对任意 $x\in\left(0,+\infty\right)$，都有 $f\left(x+1\right)>a\sin x+\dfrac{1}{x+1}-\mathrm{e}^{-x}$，求实数 a 的取值范围.

【答案】（1）$a=\dfrac{1}{2}$；

（2）证明见解析；　　　（3）$a\geq1$.

【解析】

【分析】（1）利用导数含参讨论函数的单调性，研究最值得出 $\frac{1}{2}\ln 2a-a+\frac{1}{2}=0$，构造函数 $g\left(a\right)=\frac{1}{2}\ln 2a-a+\frac{1}{2}$ 研究其单调性解方程求参数即可；

（2）结合（1）的结论及零点存在性定理得出 $x_0\in\left(\sqrt{\frac{1}{2a}},+\infty\right)$，再构造函数证 $t\left(a\right)=1-2a-\frac{1}{2}\ln\left(1-a\right)+\frac{1}{2}\ln a<0$，利用 $f\left(x\right)$ 的单调性即可证明；

（3）利用换元法化简不等式，先根据取点法判定 $a\le 0$ 不成立，再结合 $\sin x<x$ 放缩，判定 $a\ge 1$ 成立，最后作差函数，结合导数的定义判定 $a\in\left(0,1\right)$ 不成立即可.

【小问 1 详解】

由题意可知 $f'\left(x\right)=\frac{2ax^2-1}{x}\left(x>0\right)$，

显然 $a\le 0$ 时，$f\left(x\right)$ 在定义域 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减，没有最值；

则 $a>0$，易得 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\sqrt{\frac{1}{2a}},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $f\left(x\right)\ge f\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)=\frac{1}{2}\ln 2a-a+\frac{1}{2}$，

当 $f\left(x\right)$ 的最小值为 0 时，即 $\frac{1}{2}\ln 2a-a+\frac{1}{2}=0$，

令 $g\left(a\right)=\frac{1}{2}\ln 2a-a+\frac{1}{2},\therefore g'\left(a\right)=\frac{1-2a}{2a}\left(a>0\right)$，

可知 $g\left(a\right)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减，即 $g\left(a\right)\le g\left(\frac{1}{2}\right)=0$，

即 $\frac{1}{2}\ln 2a-a+\frac{1}{2}=0$ 只有一个解 $a=\frac{1}{2}$；

【小问 2 详解】

由上可知 $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\sqrt{\frac{1}{2a}},+\infty\right)$ 上单调递增，

且 $g\left(a\right)<g\left(\frac{1}{2}\right)=0$，即 $f\left(x\right)_{\min}=f\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)<0$，

而 $1<\sqrt{\frac{1}{2a}},f\left(1\right)=0,x\to+\infty,f\left(x\right)\to+\infty$，

所以$\exists x_0 \in \left(\sqrt{\frac{1}{2a}},+\infty\right)$使得$f\left(x_0\right)=0$，

因为$\frac{1}{a}-1-\frac{1}{2a}=\frac{1}{2a}-1>0$，所以$\sqrt{\frac{1}{a}-1}>\sqrt{\frac{1}{2a}}$，

而$f\left(\sqrt{\frac{1}{a}-1}\right)=a\left(\frac{1}{a}-1\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{a}-1\right)-a=1-2a-\frac{1}{2}\ln\left(1-a\right)+\frac{1}{2}\ln a$

$=1-2a-\frac{1}{2}\ln\left(1-a\right)+\frac{1}{2}\ln a$，

设$t\left(a\right)=1-2a-\frac{1}{2}\ln\left(1-a\right)+\frac{1}{2}\ln a\left(a\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)$，则$t'\left(a\right)=\frac{\left(2a-1\right)^2}{2a\left(1-a\right)}>0$，

所以$t\left(a\right)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调递增，即$t\left(a\right)<t\left(\frac{1}{2}\right)=0$，所以$f\left(\sqrt{\frac{1}{a}-1}\right)<f\left(x_0\right)=0$，

故$\sqrt{\frac{1}{a}-1}<x_0 \Rightarrow x_0^2>\frac{1}{a}-1$，证毕；

【小问 3 详解】

$\forall x>0$，$f\left(x+1\right)>a\sin x+\frac{1}{x+1}-\mathrm{e}^{-x}$恒成立等价于

$a\left[\left(x+1\right)^2-1\right]-\ln\left(x+1\right)-\frac{1}{x+1}+\mathrm{e}^{-x}>a\sin x$，令$t=x+1,t>1$，

上述不等式化为$a\left(t^2-1\right)-\ln t-\frac{1}{t}+\mathrm{e}^{1-t}>a\sin\left(t-1\right)$，

令$y=x-\sin x\left(x>0\right)\Rightarrow y'=1-\cos x\geq 0$，则该函数单调递增，即$y>0-\sin 0=0$，

所以$\sin\left(t-1\right)<t-1$，

若$a=0$，取$t=3$，显然$-\ln 3-\frac{1}{3}+\frac{1}{\mathrm{e}^2}<0$，与题设矛盾；

若$a<0$，取$t=5$，有$a\sin 4>0>24a-\ln 5-\frac{1}{5}+\frac{1}{\mathrm{e}^4}$，也与题设矛盾；

所以$a>0$，

则$a\sin\left(t-1\right)<a\left(t-1\right)$，

不妨设$h\left(t\right)=a\left(t^2-1\right)-\ln t-\frac{1}{t}+\mathrm{e}^{1-t}-a\left(t-1\right)\left(t>1\right)$，

则$h'\left(t\right)=a\left(2t-1\right)-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\mathrm{e}^{1-t}$，

当$a\ge 1$时，$h'(t)\ge 2t-1-\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t^2}-\mathrm{e}^{1-t}>2t-1-\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t^2}-1=\dfrac{(2t^2-1)(t-1)}{t^2}>0$，

所以$h(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增，则$h(t)\ge h(1)=0$，

此时满足$a(t^2-1)-\ln t-\dfrac{1}{t}+\mathrm{e}^{1-t}>a(t-1)>a\sin(t-1)$；

当$a\in(0,1)$时，令$u(t)=a(t^2-1)-\ln t-\dfrac{1}{t}+\mathrm{e}^{1-t}-a\sin(t-1)$，

则$u'(t)=2at-\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t^2}-\mathrm{e}^{1-t}-a\cos(t-1),u'(1)=a-1<0$，

由导数的意义可知$u'(t)$在$t=1$的极小的区域内为值为负，

则取$t=1+\Delta t(\Delta t\to 0,\Delta t>0)$，有$u(1+\Delta t)<u(1)=0$，与题设矛盾；

综上所述：$a\ge 1$.