杨府山高复2025年下学期数学周练试卷（11）

姓名________班级_____座号____

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1.已知集合 $A=\{x|-1<x<1\}$，$B=\{x||x-1|\le 1\}$，则 $A\cup B=$（　）

A. $(-1,2]$　　B. $(-1,2)$　　C. $[0,1)$　　D. $[0,2]$

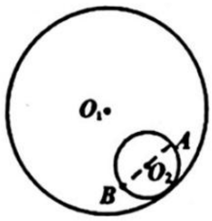
2.已知复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=2+\mathrm{i}$，则复数 z 的虚部为（　）

A. $\frac{3}{2}$　　B. $-\frac{3}{2}$　　C. $\frac{3}{2}\mathrm{i}$　　D. $-\frac{3}{2}\mathrm{i}$

3.若抛物线 $y^2=2px$ 上的点到焦点的最短距离为2，则抛物线方程为（　）

A. $y^2=x$　　B. $y^2=2x$　　C. $y^2=4x$　　D. $y^2=8x$

4.已知圆 O_1 与圆 O_2 的半径分别为3和1，圆 O_1 与圆 O_2 内沿着圆周滚动如图所示，AB 是圆 O_2 的任意直径，则 $\overrightarrow{O_1A}\cdot\overrightarrow{O_1B}=$（　　）

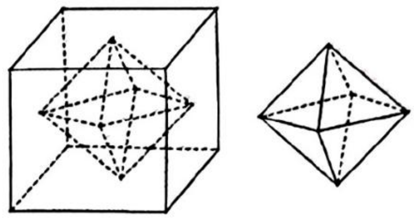


A. 1　　B. 3　　C. 5　　D. 8

5.已知函数 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$，正数 a,b 满足 $f(a)+f(9b-2)=0$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为（　）

A. 8　　B. 10　　C. 12　　D. 16

6.取正方体六个表面的中心，构成正八面体，如图所示，正八面体的12条棱中异面直线的对数为(　　)



A. 16　　B. 24　　C. 32　　D. 48

7.已知 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,\frac{3}{4}),D(x_4,y_4)$ 是曲线 $y=\sin 2x$ 上的四点，其中

$0<x_1<x_2<x_3<x_4<\frac{\pi}{2}$，且 $x_1,x_2,\frac{\pi}{4},x_3,x_4$ 成等差数列，则 $\frac{y_2}{y_1}=$（　）

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

8.已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且 $f(x+y)+f(x-y)+f(x)f(y)=0$，$f(1)=1$，则下列说法错误的是（　）

A. $f(x)$ 为周期函数　B. $f(x)$ 为偶函数　　C. $f(\frac{3}{2})=0$　　D. $\sum_{i=1}^{2026}f(i)=1$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分，在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9.盒子中有大小相同的 5 个球，其中 3 个红球，2 个白球，从盒子中随机依次不放回的取出两个球，记事件 A 为"第一次取出的是红球"，事件 B 为"第二次取出的是红球"，则（　）

A．$P(AB)=\frac{1}{5}$　　B．$P(B|A)=\frac{1}{2}$

C．$P(B)=\frac{3}{5}$　　D．$P(A+B)=\frac{9}{10}$

10.已知双曲线 E：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2，点 A 在渐近线上，且在第一象限，满足 $AF_1\perp AF_2$，则下列说法正确的是（　）

A. 双曲线 E 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$

B. 双曲线 E 的离心率为 $e=2$

C. $\triangle AF_1F_2$ 的面积为 $4\sqrt{3}$

D.$\triangle AF_1F_2$ 的内切圆的半径 $r=\sqrt{3}-1$

11.在锐角$\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c．O 为外接圆圆心，已知 $\frac{\sin C-\sin A}{c-b}=\frac{\sin B}{c+a}$，$a\sin C=\sqrt{3}(2-a\cos C)$，则下列结论正确的是（　）

A. $A=\frac{\pi}{3}$

B. $b=\sqrt{3}$

C. $\triangle ABC$ 周长取值范围为 $(3+\sqrt{3},6+2\sqrt{3})$

D. $\triangle OAC$ 和 $\triangle OBC$ 面积之差的取值范围为 $(-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{12}]$

非选择题部分

三、填空题：本题共 3 个小题，每小题 5 分，共 15 分．

12.已知 $\sin x-\sin y=\frac{1}{3}$，$\cos x-\cos y=-\frac{1}{3}$，则 $\cos(x-y)=$_______．

13.在 $(4x+\frac{1}{x}-4)^4$ 展开式中，x^3 的系数为_______．

14. 一个底面边长为 2 的正方形，高为 3 的正四棱柱容器（容器的厚度忽略不计，容器是封闭的）内有两个半径相等的铁球，则铁球半径的最大值为_______．

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. （13 分）脂肪含量（单位：%）指的是脂肪重量占人体总重量的比例，某运动生理学家对某项健身活动参与人群的脂肪含量采用分层随机抽样的方式进行了调查. 已知调查中所抽取的 120 位男性的调查数据的平均数为14，所抽取的90位女性的调查数据的平均数为21.

（1）计算这次调查总样本的均值;

（2）假设该健身活动的全体参与者的脂肪含量为随机变量X，且$X\sim N(\mu,23)$，其中μ为（1）中计算所得的总样本的均值. 现从全体参与者中随机抽取3位，求3位参与者的脂肪含量均小于12.2%的概率.

附：若随机变量X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，则$P(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)=0.6827$，

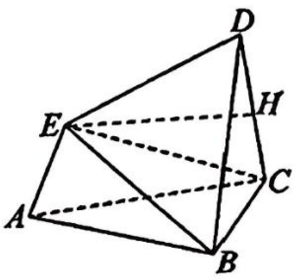
$P(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma)=0.9545$，$\sqrt{22}\approx4.7$，$\sqrt{23}\approx4.8$，$0.15865^3\approx0.004$.

16.（15 分）已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2-x-1$.

（1）设$F(x)=f(x)-f(-x)$，讨论$F(x)$的单调性；

（2）设$G(x)=f(x)+f(-x)$，若$G(x)\ge0$恒成立，求a的取值范围.

17. （15 分）如图，在多面体$ABCDE$中，$\triangle ABC$，$\triangle BCD$，$\triangle CDE$都是边长为2的等边三角形，H为CD中点，$EH\perp BC$，平面$ABC\perp$平面BCD.



（1）证明：$AE//BD$；

（2）在$\triangle ABC$中，点Q为边BC的中线上的动点，且满足$DQ\perp$平面BCE，求平面BAE和平面BDQ夹角的余弦值.

18.（17 分） 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，$A$，$B$分别为椭圆的左，右顶点，$C$为椭圆的上顶点，且$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-4$. 直线$l:x=my+3$交椭圆于$M$，$N$两点.

（1）求椭圆的标准方程；

（2）若直线AM的斜率为k_1，直线BN的斜率为k_2，求$\frac{k_1}{k_2}$的值；

（3）若$P(5,0)$，证明：当$m^2\in[\frac{1}{5},\frac{1}{2}]$时，$\triangle MNP$为锐角三角形.

19. （17 分）线性反馈移位寄存器是现代通信应用中的关键技术，利用它进行简单的逻辑运算和移位操作能生成伪随机序列，因而被广泛用于干扰码、加密和同步等场景.某线性反馈移位寄存器通过以下规则生成由 0 和 1 组成的序列：

① 初始设置：前三位为$a_1=1,a_2=1,a_3=1$；

② 生成规则：从第 4 位开始，计算公式为

$$a_{n+3}=\begin{cases}0, & a_{n+1}+a_n\ \text{为偶数},\\ 1, & a_{n+1}+a_n\ \text{为奇数},\end{cases}$$

其中n是正整数.

（1）求数列$\{a_n\}$的前 9 项；

（2）设$\mathrm{T}=\sum_{1\le i,j\le 20}\left(|a_i-a_j|+2^{a_i-a_j}\right)$,求 T 的值；

（3）证明$S_n\le\frac{4n+9}{7}$，并求满足$S_n\le 100$的最大正整数n.

(其中 T 表示i,j取遍 1 到 20 的所有数字时，式子$|a_i-a_j|+2^{a_i-a_j}$的求和).

2025-2026 学年第一学期天域全国名校协作体联考

高三年级数学学科答案

一、单选题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	A	D	B	A	B	C	C

1.答案 A

【详解】由集合并集运算得到 $A\cup B=(-1,2]$．故选：A.

2．答案 A

【详解】由题设 $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(2+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{1+3\mathrm{i}}{2}$，故选：A

3．答案 D

【详解】抛物线 $y^2=2px$ 上的点到焦点的最短距离为 $\dfrac{p}{2}$，故 $p=4$ 故选：D

4．答案 B

【详解】

解析：$\overrightarrow{O_1A}\cdot\overrightarrow{O_1B}=\left(\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2A}\right)\cdot\left(\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2B}\right)=\left(\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2A}\right)\cdot\left(\overrightarrow{O_1O_2}-\overrightarrow{O_2A}\right)$

$=\left|O_1O_2\right|^2-\left|O_2A\right|^2=3$

,故选 B.

5.答案 A

6.答案 B

【详解】先任选一条棱，余下的 11 条棱与它异面的有 4 条棱，所以共有$\frac{4\times12}{2}=24$ 对异面直线.故选 B.

7. 答案 C

【详解】$y=\sin2x$ 周期为 π，所以在 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 上由于三角函数图象的对称性得，x_1,x_4 关于 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称，同理 x_2，x_3 关于 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称，所以 $y_1=y_4$，$y_2=y_3=\dfrac{3}{4}$．又因为 $x_1,x_2,\dfrac{\pi}{4},x_3,x_4$ 成等差数列，所以 $x_1=2x_2-\dfrac{\pi}{4}$，所以 $y_1=\sin(2(2x_2-\dfrac{\pi}{4}))=\sin(4x_2-\dfrac{\pi}{2})=-\cos(4x_2)=2\sin^2(2x_2)-1=2y_2^2-1=\dfrac{1}{8}$，所以 $\dfrac{y_2}{y_1}=6$，故选 C.

8.答案：C

【详解】：取$x=1,y=0$,得到$f(0)=-2$,

取$x=0$,得$f(y)=f(-y)$,故函数$f(x)$为偶函数，故 B 正确；

取$y=1$,得$f(x+1)+f(x-1)+f(x)=0$,构造$\begin{cases}f(x+1)+f(x-1)+f(x)=0\\f(x+1)+f(x+2)+f(x)=0\end{cases}$，得$f(x+2)=f(x-1)$,故函数$f(x)$为周期函数，周期为 3，故 A 正确；

由$f(0)=-2$，$f(1)=1$，$f(x+1)+f(x-1)+f(x)=0$，得$f(2)=1.f(3)=-2$.

所以$\sum_{i=1}^{2026}\mathrm{f(i)}=1$，故 D 正确；

取$x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}$，得到：$\left(f(\frac{1}{2})\right)^2=1$,取$x=1,y=\frac{1}{2}$,得$f(\frac{3}{2})=-2f(\frac{1}{2})\neq0$,故 C 错误,选 C.

二多选题

9．答案 BCD

10. 答案 ABD

10. 答案 ABD

选项 A，B 可以通过定义直接选出 A,B 正确；

选项 C 分析：$|OA|=2$,得到点 $A(1,\sqrt{3})$，得$|AF_2|=2,|AF_1|=2\sqrt{3}$,

$S_{\Delta AF_1F_2}=\frac{1}{2}|AF_2||AF_1|=2\sqrt{3}$;故 C 错误；

选项 D：因为ΔAF_1F_2为直角三角形，所以内切圆半径 $r=\frac{|AF_2|+|AF_1|-|F_1F_2|}{2}=\sqrt{3}-1$,故 D 正确.

11.答案 ACD

【详解】由 $\frac{\sin C-\sin A}{c-b}=\frac{\sin B}{c+a}$ 与正弦定理可得 $\frac{c-a}{c-b}=\frac{b}{c+a}$，即 $c^2-a^2=bc-b^2$，$c^2+b^2-bc=a^2$

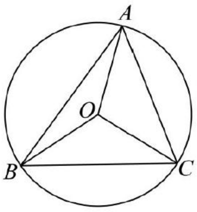
$\cos A=\frac{\pi}{3}$，故 $A=\frac{\pi}{3}$.选项 A 正确

$A+B+C=\pi$，所以由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，可得 $\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{b}{\sin(A+C)}$，即 $a=\frac{b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+C\right)}$①.

又因为 $\sqrt{3}a\cos C+a\sin C=2\sqrt{3}$，即 $2a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C\right)=2\sqrt{3}$，即 $2a\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}$ ②，将①代入②可得

$2\cdot\frac{b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+C\right)}\cdot\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}$，解得 $b=2$.选项 B 错误

ΔABC 周长取值范围为 $(3+\sqrt{3},6+2\sqrt{3})$，故选项 C 正确



设 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 R，则 $OA=OB=OC=R$，且 $2R=\frac{b}{\sin B}=\frac{2}{\sin B}$，即 $R=\frac{1}{\sin B}$，

因为 $\angle AOC=2B,\angle BOC=2A=\frac{2\pi}{3}$，所以 $S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}R^2\cdot\sin\angle AOC=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin^2 B}\cdot\sin 2B=\frac{1}{\tan B}$，

$S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin^2 B}\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sin^2 B+\cos^2 B}{\sin^2 B}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{\tan^2 B}\right)$，所以

$S_{\triangle OAC}-S_{\triangle OBC}=\frac{1}{\tan B}-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{\tan^2 B}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{\tan^2 B}+\frac{1}{\tan B}-\frac{\sqrt{3}}{4}$，

由 $\tan B\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$知，所以 $x=\frac{1}{\tan B}\in\left(0,\sqrt{3}\right)$，

则 $S_{\triangle OAC}-S_{\triangle OBC}=f(x)=-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+x-\frac{\sqrt{3}}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{12}$；

ΔOAC 和 ΔOBC 面积之差的取值范围为 $(-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{12}]$.故选项 D 正确

三、填空题：本题共 3 个小题，每小题 5 分，共 15 分.

12.答案：$\frac{8}{9}$

13.答案：-1024

13.答案：-1024

【详解】$(4x+\frac{1}{x}-4)^4=\left[\frac{4x^2-4x+1}{x}\right]^4=\frac{(2x-1)^8}{x^4}$

$T_{r+1}=C_8^r(2x)^{8-r}(-1)^r=(-1)^r2^{8-r}C_8^rx^{8-r}$ $(r=0,1,\cdots,8)$ 令 8-r=7，解得 r=1

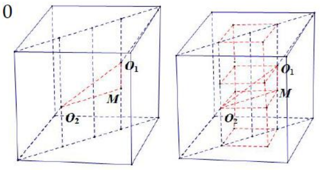
$(-1)^1 2^{8-1}C_8^1x^7=-2^7\times 8x^7=-1024x^7$

故答案为-1024

14.答案：$\frac{7-\sqrt{15}}{4}$

解析：设半径为 r,要使半径最大，则使两个小球与容器的表面相切，且两个小球也相切，

而O_1O_2可构成新的长方体的对角线，但要满足$\begin{cases}2-2r\geq 0\\2-2r\geq 0,\\3-2r\geq 0\end{cases}$



而$|2r|^2=(2-2r)^2+(2-2r)^2+(3-2r)^2$,

得：$8r^2-28r+17=0$,

得：$r=\frac{7\pm\sqrt{15}}{4}$,而 $r\leq 1$,故 $r=\frac{7-\sqrt{15}}{4}$.

四、解答题

15.答案：（1）17；（2）0.004

解析：（1）根据题意，把男性样本记为 x_1，x_2，$\ldots x_{120}$，其平均数记为$\overline{x}$；把女性样本记为 y_1，y_2，$\ldots y_{90}$，其平均数记为$\overline{y}$，则$\overline{x}=14$，$\overline{y}=21$，　　　　2 分.

记总样本数据的平均数为$\overline{z}$，

则 $z=\frac{120}{210}\times 14+\frac{90}{210}\times 21=17$，

总样本数据的平均数为 17.　　　　5 分.

（2）根据题意，由（1）知$\mu=17$，$\sigma^2=23$，所以 $X\sim N$（17，23），

所以 P（$12.2\leq X\leq 21.8$）$=P$（$17-4.8\leq X\leq 17+4.8$）≈ 0.6827，

P（$X<12.2$）$\approx\frac{1}{2}\times$（$1-0.6827$）$=0.15865$，　　　　8 分.

设抽取的 3 位参与者中，脂肪含量均小于 12.2%的人数为 Y，

易得 $Y\sim B$（3，0.15865），　　　　10 分.

故 P（$X=3$）$=C_3^3\times$（0.15865）$^3\approx 0.004$，

故 3 位参与者的脂肪含量均小于 12.2%的概率为 0.004.　　　　13 分.

16. 答案：（1）F(x)在定义域 R 单调递增；(2)$(-\infty,\frac{1}{2}]$

解析：（1）$F(x)=e^x-e^{-x}-2x$，$x\in R$.　　　　1 分

所以 $F'(x)=e^x+e^{-x}-2\geq 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2=0$,　　　　4 分

所以 F(x)在定义域 R 单调递增；　　　　5 分

（2)函数$G(x)=e^x+e^{-x}-2ax^2-2$ 为偶函数，由对称性可将问题转化为 $x\in[0,+\infty)$,使 $G(x)\geq 0$ 即可；而 $G(0)=0$;　　　　7 分

$G'(x)=e^x-e^{-x}-4ax$,$G''(x)=e^x+e^{-x}-4a$,$G'''(x)=e^x-e^{-x}$,

因为 $x\in[0,+\infty)$，所以$G'''(x)=e^x-e^{-x}\geq 0$，故 $G''(x)$在 $x\in[0,+\infty)$上为增函数；

当$a\leq\frac{1}{2}$时，$G''(x)\geq G''(0)=2-4a\geq 0$,所以 $G'(x)$在 $x\in[0,+\infty)$上为增函数；　　9 分

故 $G'(x)\geq G'(0)=0$，所以 $G'(x)$在 $x\in[0,+\infty)$上为增函数,

故 $G(x)\geq G(0)=0$，符合题意，故$a\leq\frac{1}{2}$;　　　　12 分

故 $G(x) \ge G(0) = 0$，符合题意，故$a \le \frac{1}{2}$;　　　　12 分

当$a > \frac{1}{2}$时，$G''(0) = 2 - 4a < 0, G''(2a) = e^{2a} - e^{-2a} - 4a \ge 0$(前面已证），

故$\exists t > 0$,使 $G''(t) = 0$,所以 $x \in (0,t)$时，有 $G'(x)$为减函数，故 $G'(x) < G'(0) = 0$,

所以 $x \in (0,t)$时，有 $G(x)$为减函数，故 $G(x) < G(0) = 0$,与题设矛盾，故舍去;

综上所述a的取值范围是$(-\infty, \frac{1}{2}]$.　　　　15 分

17.答案：(1)答案见解析；(2)$\frac{3\sqrt{10}}{10}$

【详解】（1）如图，取 BC 的中点 O，连接 AO，DO，

在多面体 $ABCDE$ 中，ΔABC，$\triangle BCD$，ΔCDE 都是边长为 2 的等边三角形，

则在等边三角形 DCE 中，$EH \perp CD$，

又因为 $EH \perp BC$,$CD \cap BC = C$.

所以 $EH \perp$ 平面 BCD，　　　　3 分

同理，得 $AO \perp$ 平面 BCD，$DO \perp$ 平面 ABC，　　　　4 分

所以 OA，OB，OD 两两垂直，且 $EH // OA$，而 $EH = OA$，

故四边形 $EHOA$ 为平行四边形，$EA // OH$

$\because OH // BD \therefore AE // BD$　　　　5 分

（2）以 O 为坐标原点，OA，OB，OD 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系 $Oxyz$.

以 BC 中点 O 为原点，OA 为 x 轴，OB 为 y 轴，垂直于平面 ABC 的方向为 z 轴

$A(\sqrt{3},0,0)$ $B(0,1,0)$ $C(0,-1,0)$ $D(0,0,\sqrt{3})$　　　　7 分

$E\left(\sqrt{3},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$($\Delta CDE$ 中，$EH \perp$平面 BCD，H 为 CD 中点，EH 沿 x 轴方向，长度$\sqrt{3}$)。

Q 在 AO 上，设 $Q(t,0,0)$　$DQ \perp$平面 BCE，故$\overrightarrow{DQ} \perp \overrightarrow{BC}$且$\overrightarrow{DQ} \perp \overrightarrow{BE}$。

$\overrightarrow{DQ}=(t,0,-\sqrt{3})$　$\overrightarrow{BC}=(0,-2,0)$　$\overrightarrow{BE}=\left(\sqrt{3},-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\overrightarrow{DQ} \cdot \overrightarrow{BE}=t \cdot \sqrt{3}+0+(-\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=0$，解得 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $Q\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$　　　　9 分

设平面 BAE 的法向量$\boldsymbol{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$: $\overrightarrow{BA}=(\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{BE}=\left(\sqrt{3},-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

方程组：$\begin{cases} \sqrt{3}x_1-y_1=0 \\ \sqrt{3}x_1-\frac{3}{2}y_1+\frac{\sqrt{3}}{2}z_1=0 \end{cases}$，令$x_1=1$，得$y_1=\sqrt{3}$，$z_1=1$，故$\boldsymbol{n_1}=(1,\sqrt{3},1)$。　　　　11 分

平面 BDQ 的法向量$\boldsymbol{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$: $\overrightarrow{BD}=(0,-1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BQ}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-1,0\right)$

方程组：$\begin{cases} -y_2+\sqrt{3}z_2=0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_2-y_2=0 \end{cases}$，令$z_2=1$，得$y_2=\sqrt{3}$，$x_2=2$，故$\boldsymbol{n_2}=(2,\sqrt{3},1)$。　　　　13 分

$\boldsymbol{n_1} \cdot \boldsymbol{n_2}=1\times2+\sqrt{3}\times\sqrt{3}+1\times1=2+3+1=6$,

$|\boldsymbol{n_1}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{5}$，$|\boldsymbol{n_2}|=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，$\cos\theta=\left|\frac{6}{\sqrt{5}\times2\sqrt{2}}\right|=\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　　　15 分

18．解析：（1）由题意知，$\overrightarrow{CA}=(-a,-b)$，$\overrightarrow{CB}=(a,-b)$，

所以$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-a^2+b^2=-c^2=-4$，即$c=2$.

又$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，所以$a=4$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=2\sqrt{3}$.

所以椭圆的标准方程为$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$……………………………………4 分

（2）直线$l:x=my+3$.

由$\begin{cases}x=my+3\\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1\end{cases}$，得$(3m^2+4)y^2+18my-21=0$，

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则$y_1+y_2=-\dfrac{18m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{21}{3m^2+4}$，

所以$my_1y_2=\dfrac{7}{6}(y_1+y_2)$……………………………………………………………………7 分

因为椭圆的左，右顶点分别为$A(-2,0)$，$B(2,0)$，所以$k_1=\dfrac{y_1}{x_1+4}$，$k_2=\dfrac{y_2}{x_2-4}$，

所以$\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{y_1(x_2-4)}{y_2(x_1+4)}=\dfrac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+7y_2}=\dfrac{\frac{7}{6}(y_1+y_2)-y_1}{\frac{7}{6}(y_1+y_2)+7y_2}=\dfrac{\frac{1}{6}y_1+\frac{7}{6}y_2}{\frac{7}{6}y_1+\frac{49}{6}y_2}=\dfrac{1}{7}$………………10 分

（3）直线MN的方向向量为$\vec{e}=(m,1)$，所以由锐角三角形知，

$\overrightarrow{PM}\bullet\overrightarrow{PN}>0$①，$\overrightarrow{MP}\bullet\overrightarrow{MN}>0$②，$\overrightarrow{NP}\bullet\overrightarrow{NM}>0$③，

由①得：$(x_1-5)(x_2-5)+y_1y_2>0$化简得$(m^2+1)y_1y_2-2m(y_1+y_2)+4>0$，

进而化简得$m^2>\dfrac{5}{27}$④；………………………………………………………………………………12 分

由②③得，$(\overrightarrow{MP}\bullet\vec{e})(\overrightarrow{NP}\bullet\vec{e})<0$，化简得$(m(x_1-5)+y_1)(m(x_2-5)+y_2)<0$，

进而化简得$((m^2+1)y_1-2m)((m^2+1)y_2-2m)=(m^2+1)^2y_1y_2-2m(m^2+1)(y_1+y_2)+4m^2<0$

进而化简得$27m^4+10m^2-21<0$⑤，………………………………………………………………15 分

当$m^2\in[\frac{1}{5},\frac{1}{2}]$时，同时满足④⑤，所以此时△$MNP$为锐角三角形.…………………………17 分

19．解：（1）由递推关系得，

$a_1=1,a_2=1,a_3=1,a_4=0,a_5=0,a_6=1,a_7=0,a_8=1,a_9=1$； 4 分

（2）由：$a_1=1,a_2=1,a_3=1,a_4=0,a_5=0,a_6=1,a_7=0,a_8=1,a_9=1,a_{10}=1,\cdots$

可知：数列$\{a_n\}$的周期$T=7$， 6 分

而数列的前 20 项中有 12 个数字 1，有 8 个数字 0，故选a_i,a_j共有 $20\times20=400$ 种选法，

分成 3 种情况：

①当$a_i=a_j$时，有 20 种情况，每一种情况$\left|a_i-a_j\right|+2^{a_i-a_j}=1$，故这类求和为 20，

②当$a_i=1,a_j=0$ 时，有$C_{20}^2=190$ 种情况，每一种情况$\left|a_i-a_j\right|+2^{a_i-a_j}=3$，

故这类求和为 $3\times190=570$，

③当$a_i=0,a_j=1$ 时，有$C_{20}^2=190$ 种情况，每一种情况$\left|a_i-a_j\right|+2^{a_i-a_j}=\frac{3}{2}$, 9 分

故这类求和为$\frac{3}{2}\times190=285$， 10 分

综上可得 $T=\sum_{1\le i,j\le20}\left(\left|a_i-a_j\right|+2^{a_i-a_j}\right)=20+570+285=875$.

（3）当$n=7k+1$时，$S_n=\frac{4}{7}n+\frac{3}{7}$；

当$n=7k+2$时，$S_n=\frac{4}{7}n+\frac{6}{7}$；

当$n=7k+3$时，$S_n=\frac{4}{7}n+\frac{9}{7}$；

当$n=7k+4$时，$S_n=\frac{4}{7}n+\frac{5}{7}$；

当$n=7k+5$时，$S_n=\frac{4}{7}n+\frac{1}{7}$；

当$n=7k+6$时，$S_n=\frac{4}{7}n+\frac{4}{7}$；

当$n=7k+7$时，$S_n=\frac{4}{7}n$； 14 分

由此推出，$S_n\le\frac{4}{7}n+\frac{9}{7}$.每个周期内，数列的和为$4$，而$100$被 4 整除，所以恰好 25 个周期，故$S_n\le100$ 的最大$n=25\times7=175$. 17 分