

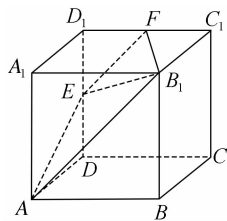
2026 年高考单科综合模拟信息卷 · 数学

参考答案

(一)

1. D 因为 $M = \{-1, 1, 3, 4\}$, $N = \{x | x^2 - 3x - 4 \geq 0\} = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 4\}$, 所以 $M \cap N = \{-1, 4\}$, 故选 D.
2. C 由 $\frac{2-i}{2-z} = i$, 得 $z = 2 - \frac{2-i}{i} = 3 + 2i$, 由 $3 + a + 2i$ 为纯虚数知 $a = -3$, 故选 C.
3. C 因为 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BA}$, 所以 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BP}$, 所以 $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BP}$, 所以 $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BP}$, 故 $x + y = 1$. 故选 C.
4. A $(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2x})^9$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_9^r \cdot (\sqrt[3]{x})^{9-r} \cdot (\frac{1}{2x})^r = C_9^r \cdot (\frac{1}{2})^r \cdot x^{3-\frac{4r}{3}}$, 令 $3 - \frac{4r}{3} = -1 \Rightarrow r = 3$, 所以 $\frac{1}{x}$ 的系数为 $C_9^3 \times (\frac{1}{2})^3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} \times \frac{1}{8} = \frac{21}{2}$, 故选 A.
5. D 设事件 $A =$ “第 1 次取到橙色乒乓球”, 事件 $B =$ “第 2 次取到橙色乒乓球”, 则 $P(A) = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$, $P(B|A) = \frac{2+3}{2+3+3} = \frac{5}{8}$, 所以 $P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{2}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{1}{4}$, 故选 D.
6. A 因为 $a = 43^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{344}{8}} > \sqrt[3]{\frac{343}{8}} = \frac{7}{2}$, $b = \log_2 11 = \frac{1}{2} \log_2 121 < \frac{1}{2} \log_2 128 = \frac{7}{2}$, 所以 $a > b$, 因为 $\log_2 11 + \log_2 3 = \log_2 33 > \log_2 32 = 5$, 所以 $\log_2 11 > 5 - \log_2 3$, 即 $b > c$, 所以 $a > b > c$, 故选 A.
7. B 由题意可知 $|PD| = |PE|$, $|F_1D| = |F_1H|$, $|F_2H| = |F_2E|$, 则 $|F_1P| + |F_1F_2| - |F_2P| = (|F_1D| + |DP| + |F_1H| + |F_2H|) - (|PE| + |EF_2|) = |F_1D| + |F_1H| = 2|F_1D| = 2|F_1H|$, 又由双曲线的定义得 $|F_1P| + |F_1F_2| - |F_2P| = (|F_1P| - |F_2P|) + |F_1F_2| = 2a + 2c$, 所以 $|F_1D| = |F_1H| = a + c$, 而 $2a < |F_1D| < 4a$, 所以 $2a < a + c < 4a$, 即 $a < c < 3a$, 故 $1 < e < 3$. 故选 B.
8. B 设正方体棱长为 x , 则外接球半径为 $\frac{\sqrt{3}x}{2}$, 所以 $\frac{4}{3}\pi(\frac{\sqrt{3}x}{2})^3 = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$, 解得 $x = 1$. 在 C_1D_1 上取一点 F , 使得 $EF \parallel C_1D$, 连接 B_1F , 设 $D_1E = a (0 < a < 1)$, 由 $EF \parallel C_1D \parallel AB_1$, 可得平面 AB_1FE 为过 A, B_1, E 三点的截面, $D_1F = a$.

$$V_{E-AA_1B_1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}, V_{E-A_1B_1FD_1} = \frac{1}{3} \times a \times \frac{a+1}{2} = \frac{1}{6}(a^2 + a),$$
由题意知 $\frac{1}{6}(a^2 + a) + \frac{1}{6} = \frac{7}{32}$, 整理为 $16a^2 + 16a - 5 = 0$, 解得 $a = \frac{1}{4}$ 或 $a = -\frac{5}{4}$ (舍), 故 $\frac{D_1F}{D_1C_1} = \frac{1}{4}$. 故选 B.



9. ABD 当 $m = 0$ 时, $f(x) = a^x (a > 1)$, 图象 A 满足, 图象 C 不满足; 当 $m = 1$ 时, $f(x) = a^x + \frac{1}{a^x} \geq 2$, $f(0) = 2$, 且 $f(-x) = f(x)$, 此时函数是偶函数, 关于 y 轴对称, 图象 B 满足; 当 $m = -1$ 时, $f(x) = a^x - \frac{1}{a^x} (a > 1)$, $f(0) = 0$, 且 $f(-x) = -f(x)$, 此时函数是奇函数, 且单调递增, 图象 D 满足. 故选 ABD.
10. BD 因为函数 $f(x)$ 的某相邻两支图象与 x 轴分别交于点 $A(\frac{\pi}{6}, 0)$, $B(\frac{2\pi}{3}, 0)$, 所以函数的周期为 $\frac{\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$, 解得 $\omega = 2$, $f(x) = \tan(2x + \varphi)$. 又图象经过 $A(\frac{\pi}{6}, 0)$, 所以 $f(\frac{\pi}{6}) = \tan(2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi) = 0$, 且 $0 < |\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 解得 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$. 所以 $f(x) = \tan(2x - \frac{\pi}{3})$. 故由方程 $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$, $x \in [0, \pi]$, 可得 $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = 0$ 或 $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 1$, 解得 $x = \frac{\pi}{6}$ 或 $x = \frac{2\pi}{3}$. 故选 BD.
11. BCD 设 $A(p, 0)$, $B(0, q)$, $P(x, y)$, 由 $|AB| = 2$, 得 $p^2 + q^2 = 4$. 直线 AB 的方程为 $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, 由题意可得

OP 的方程为 $y = \frac{p}{q}x$, 进而可得 $p = \frac{qy}{x}$, 代入 $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ 可得 $\frac{x^2}{qy} + \frac{y}{q} = 1$, 即 $q = \frac{x^2 + y^2}{y}$, 将此式再代入 $p = \frac{qy}{x}$ 中, 可得 $p = \frac{x^2 + y^2}{x}$, 所以 $(\frac{x^2 + y^2}{x})^2 + (\frac{x^2 + y^2}{y})^2 = 4$, 展开得 $x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 = 4x^2y^2$, 即 $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$, 故 A 错误; 将方程 $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$ 中 x, y 对调, 方程不变, 所以点 P 的轨迹关于直线 $y = x$ 对称, 故 B 正确; 由 $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2 \leq 4(\frac{x^2 + y^2}{2})^2$, 得 $x^2 + y^2 \leq 1$, 当且仅当 $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$ 时等号成立, 于是可知能覆盖该“四叶草”的最小圆的半径为 1, 面积为 π , 故 C 正确; 设 $|AP| = m$, 则 $|BP| = 2 - m$, 在 $\text{Rt}\triangle OAB$ 中, 由射影定理可得 $|OP|^2 = |AP| \cdot |BP| = m(2 - m)$, 即 $|OP| = \sqrt{m(2 - m)}$, 所以 $\triangle OAP$ 面积 $S = \frac{1}{2} |AP| \cdot |OP| = \frac{1}{2} m \cdot \sqrt{m(2 - m)} = \frac{1}{2} \sqrt{2m^3 - m^4}$, 令 $f(m) = 2m^3 - m^4 (0 < m < 2)$, 求导可得 $f'(m) = 6m^2 - 4m^3 = -2m^2(2m - 3)$, 令 $f'(m) = 0$, 得 $m = \frac{3}{2}$, 易知 $f(m)$ 在 $(0, \frac{3}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{3}{2}, 2)$ 上单调递减, 所以 $f(m)_{\max} = f(\frac{3}{2}) = \frac{27}{16}$, 所以 $S_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{27}{16}} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

12. $y = 2x$ 求得 $y' = \frac{1}{x} + 1$, 所以 $y'|_{x=1} = 2$, 又当 $x = 1$ 时, $y = 2$, 所以所求切线方程为 $y - 2 = 2(x - 1)$, 即 $y = 2x$.

13. $\frac{1}{8} \cdot \frac{365}{8}$ 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , $a_2 = \frac{1}{2} = a_1 q \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2q}$, $\therefore S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2q} + \frac{1}{2}$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2q} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}q$, 则 $S_2 + S_3 = \frac{1}{2q} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2q} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}q = \frac{13}{4}$, 整理得 $2q^2 - 9q + 4 = 0$, 解得 $q = \frac{1}{2}$ 或 $q = 4$, 又 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则 $q = 4$. 因此 $a_1 = \frac{1}{8}$, $S_6 = \frac{\frac{1}{8}(1 - 4^6)}{1 - 4} = \frac{1}{8} \cdot \frac{365}{8}$.

14. $\frac{117}{25}$ 依题意, 假设随机变量 X_i , 其中 $i = 1, 2, 3, 4, 5$. $X_i = \begin{cases} 1, & \text{这三次选取中, 标有 } i \text{ 的球至少被取出一次} \\ 0, & \text{这三次选取中, 标有 } i \text{ 的球一次都没被取出} \end{cases}$, 则 $X = \sum_{i=1}^5 X_i$. 易知所有 $E(X_i)$ 相等, 故 $E(X) = 5E(X_i)$. 由于抽取独立, 三次均未取出标有 i 的球的概率为 $P(X_i = 0) = (\frac{C_4^3}{C_5^3})^3 = \frac{8}{125}$, $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = \frac{117}{125}$, 所以 $E(X_i) = 0 \times \frac{8}{125} + 1 \times \frac{117}{125} = \frac{117}{125}$, 于是可得 $E(X) = 5E(X_i) = 5 \times \frac{117}{125} = \frac{117}{25}$.

15. 解: (1) 根据已知可得 $\bar{x} = \frac{1}{5} \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 3$, $\bar{y} = \frac{1}{5} \times (80 + 95 + 95 + 100 + 105) = 95$,
 $\therefore \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 = 4 + 1 + 0 + 1 + 4 = 10$,
 $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (-2) \times (-15) + (-1) \times 0 + 0 \times 0 + 1 \times 5 + 2 \times 10 = 55$, 4 分
 $\therefore \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{55}{10} = 5.5$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 95 - 5.5 \times 3 = 78.5$, 6 分
 $\therefore y$ 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 5.5x + 78.5$ 7 分
(2) $\therefore y$ 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 5.5x + 78.5$, $\hat{b} = 5.5 > 0$,
 $\therefore$ 变量 y 与 x 之间是正相关. 10 分
(3) 由第(1)问所得 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 5.5x + 78.5$,
当 $x = 10$ 时, $y = 5.5 \times 10 + 78.5 = 133.5 \approx 134$,
 $\therefore$ 该同学高二最后一次考试的成绩大约为 134 分. 13 分

16. 解: (1) $\therefore b \cos C - \frac{1}{\sqrt{3}} c \sin B = a$,
 $\therefore \sin B \cos C - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin C \sin B = \sin A$, 1 分

$$\therefore \sin B \cos C - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin C \sin B = \sin(B+C), \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore \sin B \cos C - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin C \sin B = \sin B \cos C + \cos B \sin C. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\because \sin C \neq 0,$$

$$\therefore -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin B = \cos B, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore \tan B = -\sqrt{3}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{又} \because B \in (0, \pi), \therefore B = \frac{2\pi}{3}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 因为 } BD \text{ 为 } \angle ABC \text{ 的角平分线}, B = \frac{2\pi}{3}, \text{ 所以 } \angle ABD = \angle CBD = \frac{\pi}{3}. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{又 } S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD}, \text{ 所以 } \frac{1}{2} ac \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} a \cdot \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} c \cdot \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{即 } ac = \sqrt{3}(a+c) \text{ ①}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{由余弦定理 } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \frac{2\pi}{3}, \text{ 得 } (a+c)^2 - ac = 36 \text{ ②}, \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{由 ①② 可得 } a = c = 2\sqrt{3}, \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } BD \perp AC, \text{ 又 } AM = \frac{1}{2} MC, \text{ 所以 } AM = 2, \text{ 所以 } DM = 1, BM = \sqrt{BD^2 + DM^2} = 2,$$

$$\text{所以 } \triangle BDM \text{ 的周长为 } 3 + \sqrt{3}. \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

17. 解: (1) 证明: 设 OE 交 BC 于点 F , 因为 E 为 $\widehat{BC}$ 的中点, 所以 F 为 BC 中点.

$$\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } OB = OC, \text{ 所以 } BC \perp OF, \text{ 即 } BC \perp OE. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{又 } SO \perp \text{底面 } \odot O, BC \subset \text{底面 } \odot O, \text{ 所以 } SO \perp BC. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{又 } OE \cap SO = O, SO, OE \subset \text{平面 } SOE, \text{ 所以 } BC \perp \text{平面 } SOE. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{又 } BC \subset \text{平面 } SBC, \text{ 所以平面 } SEO \perp \text{平面 } SBC. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 因为 C 为 $\widehat{AB}$ 的中点, O 为 AB 的中点, 则 $OC \perp AB$,

以点 O 为坐标原点, OC, OA, OS 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 设 $OD = t (0 < t < 4)$, $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

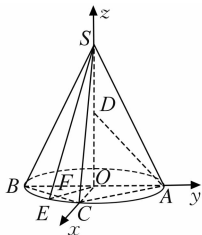
$$\text{则 } D(0, 0, t), C(2, 0, 0), A(0, 2, 0), \overrightarrow{AC} = (2, -2, 0), \overrightarrow{CD} = (-2, 0, t), \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

设平面 ACD 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2x - 2y = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CD} = -2x + tz = 0 \end{cases}, \text{ 取 } x = 1, \text{ 可得 } \mathbf{n} = (1, 1, \frac{2}{t}), \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

显然平面 ADO 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (1, 0, 0)$, $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_1 \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1}{|\mathbf{n}| |\mathbf{n}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{4}{t^2}}} = \frac{3\sqrt{22}}{22}. \text{ 解得 } t = 3. \text{ 故 } OD \text{ 的长度为 } 3. \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$



18. 解: (1) 因为 $M_3(2, \sqrt{2}), M_4(2, -\sqrt{2})$ 关于 x 轴对称, 所以 M_3, M_4 要么都在 C 上, 要么都不在 C 上,

又 M_1, M_2, M_3, M_4 有 3 个点在 C 上, 所以 M_3, M_4 在椭圆 C 上,

因为 $2 > \sqrt{3}$, 所以 M_1 不在 C 上,

$$\text{所以 } M_2 \text{ 在 } C \text{ 上}, \text{ 所以 } a = 2\sqrt{2}. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{将 } M_3 \text{ 的坐标代入得 } \frac{4}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{2}{b^2} = 1, \text{ 解得 } b = 2, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 设直线 } l \text{ 的方程为 } y = kx + m, \text{ 与 } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ 联立得 } (2k^2 + 1)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 8 = 0,$$

由 $\Delta = (4km)^2 - 4(2k^2 + 1)(2m^2 - 8) = 0$ 得 $m^2 = 8k^2 + 4$,

设 $M(x_0, y_0)$, 则 $x_0 = -\frac{2km}{2k^2 + 1} = -\frac{8k}{m}, y_0 = kx_0 + m = -\frac{8k^2}{m} + m = \frac{4}{m}$, 6 分

$$\begin{aligned} \text{所以 } |AM| \cdot |BM| &= \sqrt{1+k^2} |x_0 + 2\sqrt{2}| \cdot \sqrt{1+k^2} |x_0 - 2\sqrt{2}| \\ &= (1+k^2)(x_0^2 - 8) = (1+k^2) \left| \frac{64k^2 - 8m^2}{m^2} \right| = (1+k^2) \cdot \frac{32}{m^2} = \frac{8(1+k^2)}{2k^2 + 1} = \frac{40}{9}, \end{aligned}$$

解得 $k = \pm 2$, 9 分

所以 $m^2 = 8k^2 + 4 = 36, m = \pm 6$.

所以直线 l 的方程为 $y = 2x + 6$ 或 $y = 2x - 6$ 或 $y = -2x + 6$ 或 $y = -2x - 6$ 11 分

(3) 由 (2) 得直线 P_1P_2 的方程为 $y = -\frac{1}{k}(x + \frac{8k}{m}) + \frac{4}{m}$,

令 $x = 0$, 得 $P_2(0, -\frac{4}{m})$, 令 $y = 0$, 得 $P_1(-\frac{4k}{m}, 0)$, 13 分

设 $P(x, y)$, 则 $x = -\frac{4k}{m}, y = -\frac{4}{m}$, 14 分

因为 $m^2 = 8k^2 + 4$,

$$\text{所以 } (\frac{x}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{y}{2})^2 = (-\frac{2\sqrt{2}k}{m})^2 + (-\frac{2}{m})^2 = \frac{8k^2 + 4}{m^2} = 1,$$

所以点 P 在椭圆 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上, 16 分

由椭圆定义, 知存在定点 $E_1(0, -\sqrt{2}), E_2(0, \sqrt{2})$, 使得 $|PE_1| + |PE_2|$ 为定值 4. 17 分

19. (1) 解: $f(x) = 3\cos x - \cos 3x$,

求导可得 $f'(x) = -3\sin x + 3\sin 3x = 3(\sin 3x - \sin x) = 6\cos 2x \sin x$,

当 $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减.

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $f(\frac{\pi}{4}) = 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\sqrt{2}$ 4 分

(2) 证明: 因为 $\cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x = \cos x(2\cos^2 x - 1 - 2\sin^2 x) = \cos x(4\cos^2 x - 3) = 4\cos^3 x - 3\cos x$, 6 分

所以 $g(x) = -f(x) + \cos 2x + 3\cos x = \cos 3x + \cos 2x$
 $= 4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 3\cos x - 1$, 7 分

令 $t = \cos x \in (-1, 1)$, 则 $y = 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = (t+1)(4t^2 - 2t - 1)$,

令 $y = 0$, 可得 $4t^2 - 2t - 1 = 0$, 所以 $t_1 + t_2 = \frac{1}{2}$, 即 $\cos x_1 + \cos x_2 = \frac{1}{2}$ 9 分

(3) 解: 设 $h(x) = 3\cos x - \cos(3x + \varphi)$, 因为 $h(x + 2\pi) = h(x)$,

故 $h(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 故只需对一个周期 $x \in [0, 2\pi)$ 内进行讨论, 同时限定 $\varphi \in [0, 2\pi)$.

由题意可知 m 的最小值即为 $h(x)$ 的最大值中的最小值. 10 分

$h'(x) = -3\sin x + 3\sin(3x + \varphi)$, 令 $h'(x) = 0$, 则 $\sin(3x + \varphi) = \sin x$,

所以 $3x + \varphi = \pi - x + 2k\pi$, 或 $3x + \varphi = x + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 11 分

① 当 $3x + \varphi = \pi - x + 2k\pi$ 时,

$h(x) = 3\cos x - \cos(\pi - x + 2k\pi) = 3\cos x + \cos x = 4\cos x$,

此时极值点为 $x = -\frac{\varphi}{4} + \frac{(2k+1)\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$,

当 $k = 0$ 时, $x_1 = -\frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$,

当 $k = 1$ 时, $x_2 = -\frac{\varphi}{4} + \frac{3\pi}{4} \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$,

当 $k = 2$ 时, $x_3 = -\frac{\varphi}{4} + \frac{5\pi}{4} \in (\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$,

当 $k=3$ 时, $x_4 = -\frac{\varphi}{4} + \frac{7\pi}{4} \in (\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$,

以上得到一个周期内的 4 个极值点,

所以 $h(x)$ 的最大值只可能在 $x_1 = -\frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{4}$ 处取得,

即 $h(x)_{\max} = h(x_1) = 4\cos(-\frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{4})$,

当 $\varphi=0$ 时, $[h(x)_{\max}]_{\min} = h(x_1)_{\min} = 4\cos \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$ 14 分

②当 $3x+\varphi=x+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$,

$h(x) = 3\cos x - \cos(x+2k\pi) = 3\cos x - \cos x = 2\cos x \leq 2 < 2\sqrt{2}$,

所以 $h(x)$ 的最大值在 $x_1 = -\frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{4}$ 处取得. 16 分

综上所述, $m_{\min} = [h(x)_{\max}]_{\min} = h(x_1)_{\min} = 2\sqrt{2}$ 17 分

(二)

1. B 由题意得 $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid -2 < x \leq \pi\} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, 则 $A \cap B = \{-1, 0, 1, 2\}$, 故选 B.

2. A $(3-i)(2+i) = 7+i$ 对应的点为 $(7, 1)$ 位于第一象限, 故选 A.

3. C 根据题意, 将 10 个数据从小到大排列, 从 10 个原始评分中去掉 1 个最高分、1 个最低分, 得到 8 个有效评分, 8 个有效评分与 10 个原始评分相比, 最中间的两个分数不变, 而最高分、最低分、平均分、方差都有可能发生变化, 因此一定不变的数字特征是中位数, 故选 C.

4. A 由题设 $1 - \frac{x-1}{x^2-4x+5} = \frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+5} < 0$, 而 $x^2-4x+5 = (x-2)^2 + 1 > 0$, 所以 $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3) < 0$, 则 $2 < x < 3$, 即解集为 $(2, 3)$. 故选 A.

5. D $P(X < 9.9) + P(X \leq 10.1) = P(X > 10.1) + P(X \leq 10.1) = 1$, 故 A 错误;

当 $\sigma = 0.1$ 时, $D(2X+1) = 4D(X) = 0.04$, 故 B 错误;

由正态分布密度曲线可知 $E(X) = \mu = 10$, 故 C 错误;

由正态分布密度曲线的对称性可知, 随机变量 X 落在 $(9.9, 10.2)$ 与落在 $(9.8, 10.1)$ 的概率相等, 故 D 正确. 故选 D.

6. C 因为 $\overrightarrow{BC} = 5\overrightarrow{CD}$, 所以 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{6}{5}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{6}{5}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{6}{5}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$,

所以 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = (\frac{6}{5}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AC}^2 - \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 - \frac{1}{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$. 故选 C.

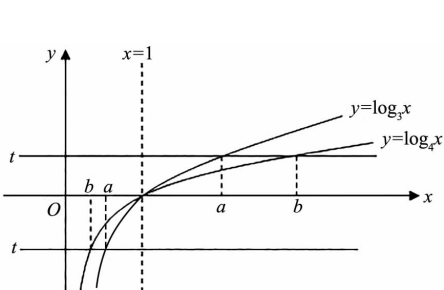
7. D 在同一直角坐标系中作出函数 $y = \log_3 x, y = \log_4 x$ 的图象,

设 $\log_3 a = \log_4 b = t$, 当 $t < 0$ 时, 由图象可知 $0 < b < a < 1$, A 可能正确;

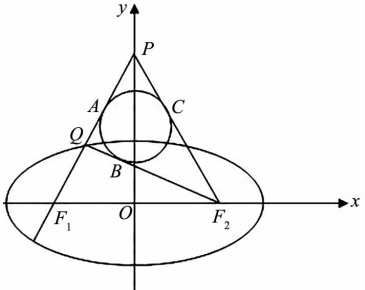
又 $a = 3^t, b = 4^t$, 所以 $a - \sqrt{b} = 3^t - 2^t < 0$, 所以 $a < \sqrt{b} < 1$, B 可能正确;

当 $t > 0$ 时, $1 < a < b$, C 可能正确;

又 $a - \sqrt{b} = 3^t - 2^t > 0$, 所以 $1 < \sqrt{b} < a$, D 错误, 故选 D.



第 7 题图



第 8 题图

8. B 不妨设点 P 在 y 轴的正半轴上, 易得 $|PF_1| = |PF_2|$, 因为 $\overrightarrow{F_2Q} \cdot \overrightarrow{PF_1} = 0$, 所以 $F_2Q \perp PF_1$.

结合图形可知, 点 Q 在第二象限内, 设 $\triangle PQF_2$ 的内切圆与各边切点分别为 A, B, C , 如图所示, $|AP| = |PC|, |CF_2| = |BF_2|$.

$$\text{所以 } |QA| + |QB| = |QP| - |AP| + |QF_2| - |BF_2| = |QP| + |QF_2| - (|PC| + |CF_2|) = |QP| + |QF_2| - |PF_2|.$$

所以 $b = |QP| + |QF_2| - |PF_1| = |QP| + |QF_2| - (|QF_1| + |PQ|) = |QF_2| - |QF_1|$,

在 $\text{Rt}\triangle QF_1F_2$ 中, $|QF_1|^2 + |QF_2|^2 = |F_1F_2|^2$, 即 $(a - \frac{1}{2}b)^2 + (a + \frac{1}{2}b)^2 = 4c^2$,

整理得 $2a^2 + \frac{1}{2}b^2 = 4c^2$, 则 $2a^2 + \frac{1}{2}(a^2 - c^2) = 4c^2$, 得 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. 故选 B.

9. ABD 由幂函数的定义可知 $2^m + m = 1$, 解得 $m = 0$, 所以 $f(x) = x^{-2}$, 则 $f(x)$ 为偶函数, A 错误; 又 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, B 错误; 由单调性可知, 当 $m = 0$ 时, $f(m+1) > f(2)$, C 正确; $f(m-1) > f(-2)$, D 错误. 故选 ABD.

由 $4\sin(2x+\varphi)-2$, 得 $\sin(\frac{\pi}{3}+\varphi)=1$, 所以 $\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$, 则 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}$, 又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$, 所以 φ

$=\frac{\pi}{6}$, 则 $g(x)=4\cos(2x+\frac{\pi}{6})$, 所以 $g(\frac{\pi}{6})=0$, A 错误;

令 $2x + \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$, 当 $k=0$ 时, 直线 $x = -\frac{\pi}{12}$ 是函数 $g(x)$ 图象的对称轴, B 正确;

令 $2k\pi - \pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $k\pi - \frac{7\pi}{12} \leq x \leq k\pi - \frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$, 取 $k=1$ 时, $g(x)$ 在 $[\frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}]$ 上单调递减, 因此 $g(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$ 上单调递增, C 正确;

函数 $f(x) = 4\sin(2x + \frac{\pi}{6}) - 2$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到函数 $y = 4\sin[2(x + \frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{6}] - 2 = 4\sin[(2x + \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{2}] - 2 = 4\cos(2x + \frac{\pi}{6}) - 2$ 的图象, 再向上平移 2 个单位长度得到函数 $g(x) = 4\cos(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图象, D 正确. 故选 BCD.

11. BCD 对于 A, 由题知, $\begin{cases} \frac{b}{a}=2, \\ 2c=2\sqrt{5}, \\ a^2+b^2=c^2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=2, \\ c=\sqrt{5}, \end{cases} \therefore \text{双曲线 } C: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1, \text{ 故 A 错}$

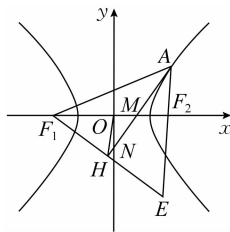
误;对于 B,由题知,AM 的直线方程为 $y-0=\frac{y_0}{x_0-\frac{1}{x_0}}\left(x-\frac{1}{x_0}\right)$,可得 $x_0x-\frac{y_0y}{4}=$

1, $\therefore AM$ 为双曲线的切线, 由双曲线的光学性质可知, AM 平分 $\angle F_1AF_2$, 故 B 正确; 对于 C, 延长 F_1H , 与 AF_2 的延长线交于点 E , 则 AH 垂直平分 F_1E , 即 H 为 F_1E 的中点. 又 O 是 F_1F_2 的中点, $\therefore |OH| = \frac{1}{2} |EF_2| = \frac{1}{2} (|AE| - |AF_2|) = \frac{1}{2} (|AF_1| - |AF_2|) = a = 1$, 故 C 正确; 对于 D,

$\therefore S_{AF_1NF_2} = S_{\Delta AF_1F_2} + S_{\Delta NF_1F_2} = \frac{1}{2} \times |F_1F_2| \times (|y_0| + \frac{4}{|y_0|}) \geq \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{|y_0| \times \frac{4}{|y_0|}} = 4\sqrt{5}$, 当且仅当 $y_0 = \pm 2$ 时, 等号成立, $\therefore$ 四边形 AF_1NF_2 面积的最小值为 $4\sqrt{5}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

12.72 不同的排列方法共有 $A_3^3 A_4^2 = 72$ 种.

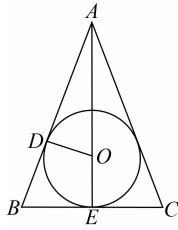
13. $\frac{8\pi}{3}$ 圆锥与其内切球的轴截面图如图所示,点 O 为球心, D,E 为切点,设内切球的半径为 R ,圆锥的底面圆



的半径为 r , 高为 h , 所以 $\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi}{3}$, 则 $R=1$.

$\because \triangle ADO \sim \triangle AEB, \therefore \frac{AO}{AB} = \frac{DO}{EB}$, 则 $\frac{h-1}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{1}{r}$, 即 $r^2 = \frac{h}{h-2}$,

圆锥的体积 $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{h^2}{h-2} = \frac{\pi}{3} (h-2 + \frac{4}{h-2} + 4) \geq \frac{8\pi}{3}$, 当且仅当 $(h-2)^2 = 4$, 即 $h=4$ 时, 等号成立.



14. $(-2e^{1-\frac{1}{2e}}, e)$ 由 $x^{x^2} > ax^2 \ln x$ 得 $e^{x^2 \ln x} > ax^2 \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 令 $t = f(x) =$

$x^2 \ln x$, 则 $f'(x) = x(2 \ln x + 1)$, 当 $0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{\sqrt{e}})$ 上

递减, 在 $(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$ 上递增, 所以 $f(x)_{\min} = f(\frac{1}{\sqrt{e}}) = -\frac{1}{2e}$, 则 $t \in [-\frac{1}{2e}, +\infty)$, 所以 $e^t > at$ 在 $[-\frac{1}{2e}, +\infty)$

上恒成立, 当 $t=0$ 时, $e^t > at$ 恒成立, 则 $a \in \mathbf{R}$; 当 $t > 0$ 时, 由 $e^t > at$ 得 $a < \frac{e^t}{t}$; 当 $-\frac{1}{2e} \leq t < 0$ 时, 由 $e^t > at$ 得

$a > \frac{e^t}{t}$.

设 $h(x) = \frac{e^x}{x}$, 则 $h'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$, 当 $-\frac{1}{2e} \leq x < 0$ 或 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $[-\frac{1}{2e}, 0)$ 和 $(0, 1)$ 上单

调递减, 当 $x > 1$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $h(x)$ 在 $[-\frac{1}{2e}, 0)$ 上的最大值为 $h(x)_{\max} =$

$h(-\frac{1}{2e}) = -2e^{1-\frac{1}{2e}}$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值为 $h(x)_{\min} = h(1) = e$. 综上所述, $-2e^{1-\frac{1}{2e}} < a < e$, 故实数 a

的取值范围为 $(-2e^{1-\frac{1}{2e}}, e)$.

15. 解: (1) $\triangle ABC$ 中, $b \cos A + a \cos B = 2c \cos A$,

由正弦定理得 $\sin B \cos A + \sin A \cos B = 2 \sin C \cos A$, 1 分

$\therefore \sin(A+B) = 2 \sin C \cos A$, 3 分

$\because A+B+C = \pi, \therefore \sin(A+B) = \sin C$,

$\therefore \sin C = 2 \sin C \cos A$, 6 分

又 $\sin C \neq 0, \therefore \cos A = \frac{1}{2}$, 7 分

又 $A \in (0, \pi), \therefore A = \frac{\pi}{3}$ 8 分

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 即 $\frac{b^2 + 4 - 5}{4b} = \frac{1}{2}$, 10 分

整理得 $b^2 - 2b - 1 = 0$, 解得 $b = \sqrt{2} + 1$ (舍负), 11 分

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2} + 1) \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{2}$ 13 分

16. 解: (1) 当 $a=1$ 时, $f'(x) = e^x - 4$, 1 分

令 $f'(x_0) = e^{x_0} - 4 = -3$, 解得 $x_0 = 0$, 2 分

所以 $f(0) = 1$,

故曲线 $f(x)$ 的斜率为 -3 的切线方程为 $y - 1 = -3(x - 0)$, 即 $3x + y - 1 = 0$ 4 分

(2) $f'(x) = ae^{ax} - 4$, 5 分

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, 此时 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = ae^{ax} - 4 = 0$, 解得 $x = \frac{1}{a} \ln \frac{4}{a}$,

当 $x < \frac{1}{a} \ln \frac{4}{a}$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > \frac{1}{a} \ln \frac{4}{a}$ 时, $f'(x) > 0$, 8 分

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{a} \ln \frac{4}{a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{a} \ln \frac{4}{a}, +\infty)$ 上单调递增. 9 分

(3) 由 (2) 可知 $a > 0$, 且 $x = \frac{1}{a} \ln \frac{4}{a}$ 时, $f(x)$ 取得极小值, 此时函数 $g(x)$ 取得极小值为 0;

则 $g(\frac{1}{a} \ln \frac{4}{a}) = f(\frac{1}{a} \ln \frac{4}{a}) - b = \frac{4}{a} - \frac{4}{a} \ln \frac{4}{a} - b = 0$,

所以 $b = \frac{4}{a} - \frac{4}{a} \ln \frac{4}{a}$ 11 分

令 $h(x) = \frac{4}{x} - \frac{4}{x} \ln \frac{4}{x} (x > 0)$, 则 $h'(x) = -\frac{4}{x^2} - (-\frac{4}{x^2} \ln \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}) = \frac{4}{x^2} \ln \frac{4}{x}$, 12 分

当 $x \in (0, 4)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,

当 $x \in (4, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

则 $x = 4$ 是 $h(x)$ 的唯一极大值点, 所以 $h(x) \leq h(4) = 1$, 14 分

故 b 的最大值为 1. 15 分

17. (1) 证明: 连接 C_1E 并延长交 A_1B_1 于点 M , 连接 C_1F 并延长交 A_1D_1 于点 N , 连接 MN, BD ,

因为 E, F 分别为 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle A_1D_1C_1$ 的重心, 所以 M, N 分别为 A_1B_1, A_1D_1 的中点, 且 $\frac{C_1E}{C_1M} = \frac{C_1F}{C_1N} = \frac{2}{3}$,

所以 $EF \parallel MN$ 2 分

又 MN 为 $\triangle A_1B_1D_1$ 的中位线, 所以 $MN \parallel B_1D_1$, 则 $EF \parallel B_1D_1$ 3 分

因为 $BB_1 \parallel DD_1$, 且 $BB_1 = DD_1$, 所以四边形 BDD_1B_1 为平行四边形, 所以 $BD \parallel B_1D_1$, 则 $EF \parallel BD$.

..... 4 分

又 $EF \not\subset$ 平面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$, 故 $EF \parallel$ 平面 $ABCD$ 5 分

(2) 解: 连接 $AC, AC \cap BD = O$, 则 $AC \perp BD$, 以 O 为原点, OB, OC 所在直线分别为 x, y 轴, 过 O 且平行于 AA_1 的直线为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$,

则 $A(0, -\sqrt{3}, 0), A_1(0, -\sqrt{3}, 3), B_1(1, 0, 2), D_1(-1, 0, 2), C(0, \sqrt{3}, 0), D(-1, 0, 0)$,

设 $CC_1 = a$, 则 $C_1(0, \sqrt{3}, a), \overrightarrow{B_1C_1} = (-1, \sqrt{3}, a-2), \overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 3)$, 7 分

因为 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $\overrightarrow{AA_1}$ 为平面 $ABCD$ 的一个法向量.

由直线 B_1C_1 与平面 $ABCD$ 所成角为 45° , 得 $\sin 45^\circ = |\cos \langle \overrightarrow{B_1C_1}, \overrightarrow{AA_1} \rangle| = \frac{|3(a-2)|}{3 \times \sqrt{4+(a-2)^2}}$,

解得 $a = 4 (a = 0$ 舍去). 8 分

由上可知, $M(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2})$, 由 $\overrightarrow{ME} = \frac{1}{3} \overrightarrow{MC_1} = (-\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, 得 $E(\frac{1}{3}, 0, 3)$,

由对称性可知 $F(-\frac{1}{3}, 0, 3)$,

则 $\overrightarrow{CF} = (-\frac{1}{3}, -\sqrt{3}, 3), \overrightarrow{EF} = (-\frac{2}{3}, 0, 0), \overrightarrow{CD} = (-1, -\sqrt{3}, 0)$ 9 分

设平面 CEF 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

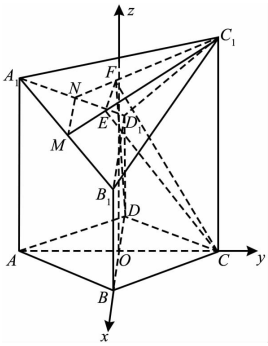
$$\begin{cases} \overrightarrow{CF} \cdot \mathbf{m} = -\frac{1}{3}x_1 - \sqrt{3}y_1 + 3z_1 = 0, \\ \overrightarrow{EF} \cdot \mathbf{m} = -\frac{2}{3}x_1 = 0, \end{cases} \quad \text{取 } z_1 = 1, \text{ 则 } \mathbf{m} = (0, \sqrt{3}, 1); \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

设平面 CDF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\begin{cases} \overrightarrow{CF} \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{3}x_2 - \sqrt{3}y_2 + 3z_2 = 0, \\ \overrightarrow{CD} \cdot \mathbf{n} = -x_2 - \sqrt{3}y_2 = 0, \end{cases} \quad \text{取 } x_2 = \sqrt{3}, \text{ 则 } \mathbf{n} = (\sqrt{3}, -1, -\frac{2\sqrt{3}}{9}), \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

于是 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\frac{11\sqrt{3}}{9}}{2 \times \frac{4}{3} \sqrt{\frac{7}{3}}} = -\frac{11\sqrt{7}}{56}$, 14 分

故平面 CEF 与平面 CDF 夹角的余弦值为 $\frac{11\sqrt{7}}{56}$ 15 分



18. 解: (1) 抛物线 $G: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 $F(0, \frac{p}{2})$, 准线为 $l: y = -\frac{p}{2}$, 2 分

设 R 到 l 的距离为 d , 因为 $K(1, 2)$ 位于 G 的上方区域,

根据抛物线的定义可知 $|RK| + |RF| = |RK| + d \geq 2 + \frac{p}{2}$ (当且仅当 $RK \perp l$ 时取等号),

又 $|RK| + |RF|$ 的最小值为 3, 所以 $2 + \frac{p}{2} = 3$, 解得 $p = 2$, 5 分

所以抛物线 $G: x^2 = 4y$ 6 分

(2) 依题意直线 l_1 和 l_2 的斜率均存在且不为 0,

设直线 l_1 的方程为 $y = kx + 2, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

则直线 l_2 的方程为 $y = -\frac{1}{k}x + 2$, 8 分

联立方程 $\begin{cases} y = kx + 2 \\ x^2 = 4y \end{cases}$, 消去 y 并整理得 $x^2 - 4kx - 8 = 0$,

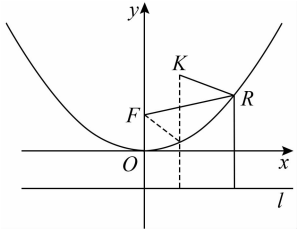
则 $\Delta = (-4k)^2 + 32 = 16k^2 + 32 > 0$, 则 $x_1 + x_2 = 4k, x_1 x_2 = -8$, 11 分

所以 $y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 4 = 4k^2 + 4$, 12 分

因为 M 为 AB 的中点, 所以 $M(2k, 2k^2 + 2)$, 同理 $N(-\frac{2}{k}, \frac{2}{k^2} + 2)$,

所以直线 MN 的方程为 $y - (2k^2 + 2) = \frac{2k^2 + 2 - (\frac{2}{k^2} + 2)}{2k + \frac{2}{k}}(x - 2k) = (k - \frac{1}{k})(x - 2k)$, 15 分

整理得 $y = (k - \frac{1}{k})x + 4$, 所以直线 MN 恒过定点 $(0, 4)$ 17 分



19. (1) 证明: 因为 $na_{n+1} = 2S_n + na_2 - 2na_1$,

所以 $(n+1)a_{n+2} = 2S_{n+1} + (n+1)a_2 - 2(n+1)a_1$, 1 分

两式相减得 $(n+1)a_{n+2} = (n+2)a_{n+1} + a_2 - 2a_1$, ①

所以 $(n+2)a_{n+3} = (n+3)a_{n+2} + a_2 - 2a_1$, ② 2 分

① - ② 得 $(n+2)a_{n+1} + (n+2)a_{n+3} = (2n+4)a_{n+2}$,

所以 $a_{n+1} + a_{n+3} = 2a_{n+2}$,

在 $na_{n+1} = 2S_n + na_2 - 2na_1$ 中令 $n=2$, 得 $a_1 + a_3 = 2a_2$,

所以 $a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1}$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列. 4 分

(2) 解: 因为 $a_1 = 2$, 公差为 3, 所以 $a_n = 2 + 3(n-1) = 3n-1$,

所以 $a_{4n-3} = 3(4n-3) - 1 = 12n-10 = 4(3n-3) + 2, b_{4n-3} = 2$, 5 分

$a_{4n-2} = 3(4n-2) - 1 = 12n-7 = 4(3n-2) + 1, b_{4n-2} = 1$, 6 分

$a_{4n-1} = 3(4n-1) - 1 = 12n-4 = 4(3n-1), b_{4n-1} = 0$, 7 分

$a_{4n} = 3 \times 4n - 1 = 12n-1 = 4(3n-1) + 3, b_{4n} = 3$, 8 分

所以 $\{b_n\}$ 的前 50 项的和为 $12(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) + b_1 + b_2 = 12(2+1+0+3) + 2+1 = 75$ 10 分

(3) 解: 因为 $a_1 = 1$, 则 $a_n = 1 + (n-1)d$,

由题意知 $0 < d < 6$, 且 $d \in \mathbf{N}^*$, 11 分

若 $d=1$, 则 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 的值依次为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 所以 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ 的值依次为 1, 2, 3, 4, 5, 0, $T=6$, 满足题意; 12 分

若 $d=2$, 则 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 的值依次为 1, 3, 5, 7, 9, 11, 所以 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ 的值依次为 1, 3, 5, 1, 3, 5, 不满足题意; 13 分

若 $d=3$, 则 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 的值依次为 1, 4, 7, 10, 13, 16, 所以 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ 的值依次为 1, 4, 1, 4, 1, 4, 不满足题意; 14 分

若 $d=4$, 则 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 的值依次为 1, 5, 9, 13, 17, 21, 所以 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ 的值依次为 1, 5, 3, 1, 5, 3, 不满足题意; 15 分

若 $d=5$, 则 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 的值依次为 1, 6, 11, 16, 21, 26, 所以 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ 的值依次为 1, 0, 5, 4, 3, 2, $T=6$, 满足题意. 16 分

所以符合条件的 $d=1$ 或 5. 17 分

(三)

1. C $A = \{x | \log_5(x+2) < 1\} = \{x | -2 < x < 4\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 所以 $A \cup B = \{x | -2 \leq x < 4\}$. 故选 C.
2. D 由图可求得容器中水表面圆的半径为 $\frac{20+40}{4} = 15$ cm, 所以水的容量为 $\frac{1}{3} \pi \times 20 \times (10^2 + 15^2 + 10 \times 15) = \frac{9}{3} 500 \pi \text{ cm}^3$. 故选 D.

3. D $\frac{a}{b} = \frac{b-1}{b} = \frac{b-1}{b^2} = -\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$, 当 $\frac{1}{b} = \frac{1}{2}$, 即 $b=2$, $a=\frac{1}{2}$ 时, $\left(\frac{a}{b}\right)_{\max} = \frac{1}{4}$, 故选 D.

4. A 因为成绩 X 近似服从正态分布 $N(87, 12^2)$, 则 $\mu = 87$, $\sigma = 12$, 且 $P(63 \leq X \leq 111) = P(87 - 2 \times 12 \leq X \leq 87 + 2 \times 12) \approx 0.9545$, 所以 $P(X \geq 111) = \frac{1 - P(63 \leq X \leq 111)}{2} \approx 0.02275$, 因此该校数学成绩不低于 111 分的人数即年级排名大约是 $5000 \times 0.02275 = 113.75 \approx 114$. 故选 A.

5. B 由 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 4 \cos C$ 得 $a^2 + b^2 = 4ab \cos C$, 所以 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 2ab \cos C$, 由正弦定理得 $\sin^2 C = 2 \sin A \sin B \cos C$, 则 $\tan C = \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{2 \sin A \sin B}{\sin C} = \frac{2 \sin A \sin B}{\sin(A+B)} = \frac{2 \sin A \sin B}{\sin A \cos B + \cos A \sin B} = \frac{2}{\frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan A}}$, 所以 $\frac{\tan C}{\tan A} + \frac{\tan C}{\tan B} = 2$. 故选 B.

6. A 先安排除了甲、乙之外的其余四人就坐, 共有 $A_4^4 = 6$ 种坐法, 再安排甲、乙两人, 原来四人围坐一圈形成 4 个空隙, 将甲、乙插入, 有 $A_4^2 = 12$ 种, 故共有 $6 \times 12 = 72$ 种坐法, 故选 A.

7. B 设 $|AF_2| = t (t > 0)$, $|AF_1| = 2a - t$, 因为椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $a = \sqrt{2}c$.

由 $AF_1 \perp AF_2$, 则 $|AF_1|^2 + |AF_2|^2 = |F_1F_2|^2$, 即 $(2a-t)^2 + t^2 = 4c^2$, 解得 $t = \sqrt{2}c$, 则 $|AF_2| = \sqrt{2}c$, $|AF_1| = \sqrt{2}c$. 又 $|AF_1|^2 + |AB|^2 = |BF_1|^2$, 则 $2c^2 + (|AF_2| + |BF_2|)^2 = (2a - |BF_2|)^2$, 即 $2c^2 + (\sqrt{2}c + |BF_2|)^2 = (2a - |BF_2|)^2$, 解得 $|BF_2| = \frac{\sqrt{2}}{3}c$, 所以 $\left|\frac{AF_2}{BF_2}\right| = 3$. 故选 B.

8. D $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, 若 $A < 2$, 则 $A < B$, 与 $A = 2B$ 矛盾, 故 $A = 2, B = 1$, $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[x_0, 2x_0]$ 上的最大值为 1, 因为 1 不是极值, 故 1 必在端点位置取到, 有两种可能:

①如图 1, $f(x_0) = 1$, 且 x_0 在递减区间内, 由 $\sin\left(x_0 + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ 得 $x_0 + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 只有 $k=0$ 符合, $x_0 = \frac{2\pi}{3}$.

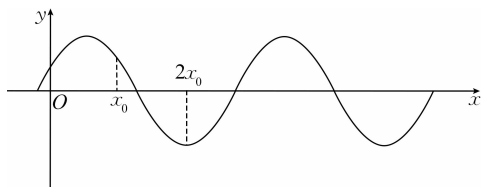


图 1

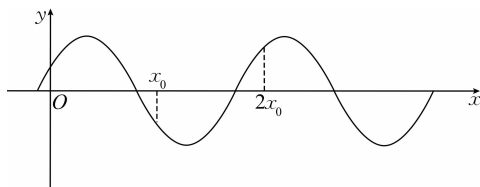


图 2

②如图 2, $f(2x_0) = 1$, 且 $2x_0$ 在递增区间内, 由 $\sin\left(2x_0 + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ 得 $2x_0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, 只有 $k=1$ 符合, $x_0 = \pi$.

故所有 x_0 的和为 $\frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{5\pi}{3}$, 故选 D.

9. ABC $z = \frac{2}{i(3+i^3)} = \frac{2}{i(3-i)} = \frac{2}{1+3i} = \frac{2(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$, $\bar{z} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$, $|\bar{z}| = \frac{\sqrt{10}}{5}$, $\frac{3}{5}i - \bar{z} = -\frac{1}{5} < 0$, 故 A, C 正确;

对于 B, 因为 $z = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$, 所以复数 z 在复平面内对应的点为 $(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5})$, 位于第四象限. 故 B 正确;

$z + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} - \frac{3}{5}i$ 不是纯虚数,故 D 错误. 故选 ABC.

10. BCD 由题意可知抛物线 E' 的顶点到准线的距离与抛物线 E 的顶点到焦点的距离相等,所以 $\frac{1}{\sqrt{3+1}} = \frac{p}{2}$,

解得 $p=1$,故 A 错误;抛物线 $E: y^2=2x$,则 $A(\frac{y_1^2}{2}, y_1), B(\frac{y_2^2}{2}, y_2)$,当 $x_1 \neq x_2$ 时, l 的斜率为 $\frac{y_2 - y_1}{\frac{y_2^2}{2} - \frac{y_1^2}{2}}$

$\frac{2}{y_2 + y_1}$, l 的方程为 $y - y_1 = \frac{2}{y_2 + y_1}(x - x_1)$,整理即为 $(y_1 + y_2)y = 2x + y_1y_2$,容易验证当 $x_1 = x_2$ 时也满足

此式,故 l 的方程可表示为 $(y_1 + y_2)y = 2x + y_1y_2$,B 正确;设直线 AB 的方程为 $x = my + 1$,代入抛物线 $y^2 = 2x$ 中,得 $y^2 - 2my - 2 = 0$,所以 $y_1 + y_2 = 2m, y_1y_2 = -2$,所以 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{y_1^2}{2} \cdot \frac{y_2^2}{2} - 2 =$

$\frac{(-2)^2}{4} - 2 = -1 < 0$,所以 $\triangle AOB$ 是钝角三角形,C 正确; $\frac{1}{|AM|^2} + \frac{1}{|BM|^2} = \frac{1}{(x_1 - 1)^2 + y_1^2} + \frac{1}{(x_2 - 1)^2 + y_2^2}$

$= \frac{1}{(1 + m^2)y_1^2} + \frac{1}{(1 + m^2)y_2^2} = \frac{1}{1 + m^2} \cdot \frac{(y_1 + y_2)^2 - 2y_1y_2}{(y_1y_2)^2} = \frac{1}{1 + m^2} \cdot \frac{4m^2 + 4}{4} = 1$,D 正确. 故选 BCD.

11. AC 对于 A,在 $f(x+y) = 4^x f(x) + 4^y f(y)$ 中,

令 $x=y=0$,得到 $f(0) = f(0) + f(0) = 0$,因此 $f(0) = 0$,故 A 正确;

令 $x=y=1$,得到 $f(2) = 4f(1) + 4f(1) = 8f(1) = 32$,因此 $f(1) = 4$,

令 $x=1, y=-1$,得到 $f(0) = \frac{1}{4}f(1) + 4f(-1)$,即 $0 = \frac{1}{4} \times 4 + 4f(-1)$,解得 $f(-1) = -\frac{1}{4}$,故 B 错误;

对于 C,令 $y=-x$,得到 $0 = f(0) = 4^{-x}f(x) + 4^x f(-x)$,即 $\frac{f(-x)}{4^{-x}} = -\frac{f(x)}{4^x}$,则 $g(-x) = -g(x)$,函数 $g(x)$ 为奇函数,故 C 正确;

对于 D,令 $x=n(n \in \mathbf{N}^*)$, $y=1$,得 $f(n+1) = 4f(n) + 4^n f(1)$,即 $\frac{f(n+1)}{4^{n+1}} = \frac{f(n)}{4^n} + \frac{f(1)}{4^1}$. 又 $\frac{f(1)}{4^1} = 1$,所以

$\left\{ \frac{f(n)}{4^n} \right\}$ 是首项为 1,公差为 1 的等差数列, $\frac{f(n)}{4^n} = 1 + (n-1) \times 1 = n$,即 $f(n) = n \cdot 4^n (n \in \mathbf{N}^*)$,故 D 错误.

故选 AC.

12. 6 由 $\mathbf{a} = (1, 3), \mathbf{b} = (2, t)$ 可得, $2\mathbf{a} + \mathbf{b} = (4, t+6), \mathbf{a} - 2\mathbf{b} = (-3, 3-2t)$,因为 $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ 共线,则有 $4(3-2t) = -3(t+6)$,解得 $t=6$.

13. ± 5 因为 $\tan \angle POQ = -\frac{4}{3}$,所以 $\cos \angle POQ = -\frac{3}{5}$. 过点 O 作 $OE \perp l$ 交 l 于点 E ,圆心 O 到直线的距离为

$d = \frac{|m|}{\sqrt{5}}$,所以 $\cos \angle POE = \frac{d}{r} = \frac{|m|}{5\sqrt{5}}$,于是 $\cos \angle POQ = \cos 2\angle POE = 2\left(\frac{|m|}{5\sqrt{5}}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{5}$,解得 $m = \pm 5$.

14. $\frac{1}{\ln 2}$ 由 $m \cdot 2^{mx-2} - \log_{16}(256x) \leq -2 (m > 0)$,可得 $m \cdot 2^{mx-2} - \log_{16} x \leq 0$,即 $\frac{m \cdot 2^{mx}}{4} - \frac{\log_2 x}{\log_2 16} \leq 0$,即 $m \cdot 2^{mx} - \log_2 x \leq 0$,即 $\log_2 x \geq m \cdot 2^{mx}$,所以 $x \log_2 x \geq mx \cdot 2^{mx}$. 设 $f(x) = x \cdot 2^x$,则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,所以 $x \log_2 x \geq mx \cdot 2^{mx} \Rightarrow f(\log_2 x) \geq f(mx) \Rightarrow \log_2 x \geq mx \Rightarrow m \leq \frac{\log_2 x}{x} (x > 1)$. 设 $g(x) = \frac{\log_2 x}{x} (x >$

$1)$,则 $g'(x) = \frac{\frac{1}{x \ln 2} \cdot x - \log_2 x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2 \ln 2}$,由 $g'(x) > 0 \Rightarrow 1 - \ln x > 0 \Rightarrow 1 < x < e$;由 $g'(x) < 0 \Rightarrow 1 - \ln x <$

$0 \Rightarrow x > e$. 所以 $g(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递增,在 $(e, +\infty)$ 上单调递减. 所以 $g(x)_{\max} = g(e) = \frac{1}{\ln 2}$. 因为存

在正实数 x ,使得不等式 $m \leq \frac{\log_2 x}{x}$ 成立,所以 $m \leq \frac{1}{\ln 2}$,即 m 的最大值是 $\frac{1}{\ln 2}$.

15. 解:(1)当 $a=-1$ 时, $f(x) = 2\ln x - \frac{1}{x^2}, f(1) = -1$, 1 分

求导可得 $f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3}$,所以 $f'(1) = 4$, 3 分

故曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y - (-1) = 4(x - 1)$,即 $4x - y - 5 = 0$ 5 分

(2) $f(x)=2\ln x+\frac{a}{x^2}$,求导可得 $f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{2a}{x^3}=\frac{2(x^2-a)}{x^3}$, 6 分

当 $a\leq 0$ 时, $f'(x)=\frac{2(x^2-a)}{x^3}>0$, $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增, $f(x)$ 无极值; 8 分

当 $a>0$ 时, $f'(x)=\frac{2(x^2-a)}{x^3}=\frac{2(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})}{x^3}$,

令 $f'(x)=0$,得 $x=\sqrt{a}(x=-\sqrt{a}$ 舍去), 10 分

当 $0<x<\sqrt{a}$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x>\sqrt{a}$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增,

此时 $f(x)$ 的极小值为 $f(\sqrt{a})=2\ln \sqrt{a}+\frac{a}{(\sqrt{a})^2}=\ln a+1$, 无极大值. 12 分

综上, $a\leq 0$ 时 $f(x)$ 无极值, $a>0$ 时 $f(x)$ 有极小值 $\ln a+1$, 无极大值. 13 分

16. 解: (1) 零假设 H_0 : 学生“周六到校自主自习与成绩进步”无关联. 1 分

经计算得 $\chi^2=\frac{150\times(55\times45-30\times20)^2}{75\times75\times85\times65}\approx16.968>10.828$ 5 分

依据 $\alpha=0.001$ 的独立性检验, 推断 H_0 不成立, 即认为该校学生“周六到校自主自习与成绩进步”有关联. 6 分

(2) 按分层随机抽样, 成绩有进步的同学抽取 4 人, 成绩没有进步的同学抽取 6 人, 8 分

X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 9 分

$P(X=0)=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{3}, P(X=1)=\frac{C_4^1C_6^1}{C_{10}^2}=\frac{8}{15}, P(X=2)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15}$, 12 分

X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

..... 13 分

所以 X 的期望为 $E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{15}=\frac{4}{5}$ 15 分

17. 解: (1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $\{b_n\}$ 的公比为 $q(q\neq 0)$,

$a_2+a_4=2b_2$, 故 $2a_1+4d=2b_1q$, 即 $6+4d=6q$, 1 分

$a_1a_3=b_3$, 即 $3(3+2d)=3q^2$, 2 分

联立 $\begin{cases} 6+4d=6q \\ 3(3+2d)=3q^2 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} d=3 \\ q=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} d=-\frac{3}{2} \\ q=0 \end{cases}$ (舍去), 3 分

故 $a_n=3+3(n-1)=3n, b_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$ 4 分

(2) $\frac{a_n}{b_n}=\frac{3n}{3^n}=\frac{n}{3^{n-1}}$, 5 分

则 $S_n=\frac{1}{3^0}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^{n-1}}$, ①

$\frac{1}{3}S_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\cdots+\frac{n}{3^n}$, ② 7 分

①-②得: $\frac{2}{3}S_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}-\frac{n}{3^n}=\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^n}=\frac{3}{2}-\left(n+\frac{3}{2}\right)\frac{1}{3^n}$, 9 分

所以 $S_n=\frac{9}{4}-\left(\frac{1}{2}n+\frac{3}{4}\right)\frac{1}{3^{n-1}}$ 10 分

(3) 令 $c_n=a_n-18=3n-18$, 设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ,

则 $T_n=\frac{n(-15+3n-18)}{2}=\frac{3n^2-33n}{2}$, 11 分

由 $c_n=0$, 解得 $n=6$,

当 $n\leq 6$ 时, $c_n\leq 0$, 则 $W_n=-c_1-c_2-\cdots-c_n=-T_n=\frac{33n-3n^2}{2}$, 12 分

当 $n > 6$ 时, $c_n > 0$,

则 $W_n = -c_1 - c_2 - \cdots - c_6 + c_7 + \cdots + c_n = -T_6 + (T_n - T_6) = T_n - 2T_6$

$$= \frac{3n^2 - 33n}{2} - 2 \times \frac{3 \times 6^2 - 33 \times 6}{2} = \frac{3n^2 - 33n + 180}{2}, \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

综上: $W_n = \begin{cases} \frac{33n - 3n^2}{2}, n \leq 6 \\ \frac{3n^2 - 33n + 180}{2}, n > 6 \end{cases} \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$

18. 解: (1) 因为双曲线关于 x, y 轴对称, 而 M_2 与 M_3 关于 y 轴对称, 所以双曲线 E 只过点 $M_1(-2, -1)$,

即 $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$.

又 $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 联立解得 $a^2 = 2, b^2 = 1$, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

所以双曲线 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 双曲线 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 的两条渐近线方程为 $x - \sqrt{2}y = 0, x + \sqrt{2}y = 0$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

设 $P(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{2} - y_0^2 = 1$, 即 $x_0^2 - 2y_0^2 = 2$, $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

所以 $|PG| \cdot |PH| = \frac{|x_0 - \sqrt{2}y_0|}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2}} \cdot \frac{|x_0 + \sqrt{2}y_0|}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2}} = \frac{|x_0^2 - 2y_0^2|}{3} = \frac{2}{3}$. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

(3) $|AC| = |BD|$, 理由如下: $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

设直线 l 的方程为 $x = my + t, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 其中 $m \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \\ x = my + t \end{cases}$, 得 $(m^2 - 2)y^2 + 2mty + t^2 - 2 = 0$, $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

判别式 $\Delta = (2mt)^2 - 4(m^2 - 2)(t^2 - 2) > 0$, 得 $m^2 + t^2 > 2$.

所以 $y_1 + y_2 = \frac{2mt}{2 - m^2}$, $\dots\dots\dots 13 \text{ 分}$

设 $C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$, 联立 $\begin{cases} x - \sqrt{2}y = 0 \\ x = my + t \end{cases}$, 解得 $y_3 = \frac{t}{\sqrt{2} - m}$,

同理可得 $y_4 = \frac{t}{-\sqrt{2} - m}$, 所以 $y_3 + y_4 = \frac{t}{\sqrt{2} - m} + \frac{t}{-\sqrt{2} - m} = \frac{2mt}{2 - m^2}$. $\dots\dots\dots 15 \text{ 分}$

故 $y_1 + y_2 = y_3 + y_4$, 即 $\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{y_3 + y_4}{2}$,

所以线段 AB 与线段 CD 的中点重合, 故 $|AC| = |BD|$. $\dots\dots\dots 17 \text{ 分}$

19. (1) 证明: 过 A, D 分别作 CD, AC 的平行线, 交于点 G ,

易知四边形 $ACDG$ 为菱形, 则 $GA = GD = 2$. $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

连接 GC , 则 $GC = 2$, 取 AC 的中点 E , 连接 GE, PE, PG , 则 $GE \perp AC, GE = \sqrt{3}$, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

因为平面 $PAC \perp$ 平面 ACD , 所以 $GE \perp$ 平面 PAC , 则 $GE \perp PE$,

又 $AP \perp PC$, 所以 $PE = \frac{1}{2}AC = 1$, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

所以 $GP^2 = GE^2 + PE^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$, 则 $GP = 2$, $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

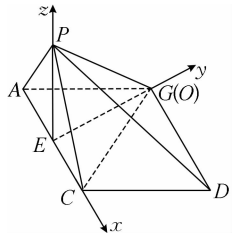
即 $GA = GC = GD = GP = 2$, 所以 G 为球 O 的球心, 即 G 与 O 重合,

故四点 A, C, D, O 共面. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 解: 当 $PA = PC$ 时, $PE \perp AC$. 以 E 为坐标原点, 以 EC, EO, EP 所在直线分别为

x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $C(1, 0, 0), P(0, 0, 1), O(0, \sqrt{3}, 0), D(2, \sqrt{3}, 0), \vec{CO} = (-1, \sqrt{3}, 0), \vec{CP} = (-1, 0, 1), \vec{CD} = (1, \sqrt{3}, 0), \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

设平面 PCD 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,



则 $\begin{cases} \overrightarrow{CP} \cdot \mathbf{m} = 0, \\ \overrightarrow{CD} \cdot \mathbf{m} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -x_1 + z_1 = 0, \\ x_1 + \sqrt{3}y_1 = 0, \end{cases}$ 取 $x_1 = \sqrt{3}$, 则 $\mathbf{m} = (\sqrt{3}, -1, \sqrt{3})$, 8 分

故球心 O 到平面 PCD 的距离为 $d = \frac{|\overrightarrow{CO} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{m}|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$ 10 分

(3)解:以 E 为坐标原点,以 EC, EO 所在直线分别为 x, y 轴,在平面 PAC 内垂直于 AC 的直线为 z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系.

设 $\angle ACP = \alpha, \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $PC = AC \cos \alpha = 2 \cos \alpha$, 11 分

$D(2, \sqrt{3}, 0), P(1 - 2 \cos^2 \alpha, 0, 2 \cos \alpha \sin \alpha), \overrightarrow{DP} = (-1 - 2 \cos^2 \alpha, -\sqrt{3}, 2 \sin \alpha \cos \alpha)$ 12 分

易知 z 轴 $\perp$ 平面 ACD , 取平面 ACD 的法向量为 $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$, 13 分

设直线 DP 与平面 ACD 所成的角为 θ ,

$$\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{DP}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{(-1 - 2 \cos^2 \alpha)^2 + (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 + 3}} \quad \text{..... 14 分}$$

$$= \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{2 \cos^2 \alpha + 1}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{3 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{(3 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{3 \cos^4 \alpha + 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{3}{\tan^2 \alpha} + \tan^2 \alpha + 4}} \quad \text{..... 15 分}$$

$$\leq \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{\tan^2 \alpha} \cdot \tan^2 \alpha + 4}}} = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3} + 4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \text{ 当且仅当 } \tan \alpha = \sqrt{3} \text{ 时取得等号, 16 分}$$

故直线 DP 与平面 ACD 所成角的正弦值的最大值为 $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ 17 分

(四)

1. D $\bar{z} = 2 + i, \therefore |z^2 - \bar{z}| = |(2 - i)^2 - (2 + i)| = |1 - 5i| = \sqrt{26}$, 故选 D.

2. C 因为 $A = \{x | x = \frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbf{Z}\}$, 而 $B = \{x | 3x^2 - 14x - 5 \leq 0\} = \{x | (3x + 1)(x - 5) \leq 0\} = \{x | -\frac{1}{3} \leq x \leq 5\}$,

所以 $A \cap B = \{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}\}$. 故选 C.

3. C 因为 $\mathbf{a} = (1, -\frac{3}{2}), \mathbf{b} = (1, 2)$, 所以 $2\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3, -1)$, 又 $\mathbf{c} = (m, -1), \mathbf{c} \perp (2\mathbf{a} + \mathbf{b})$,

所以 $3m + 1 = 0$, 解得 $m = -\frac{1}{3}$. 故选 C.

4. B 由题意, 圆的圆心为 $(0, 0)$, 半径为 1, 设圆心到直线 $x - ay + 2a - 1 = 0 (a \in \mathbf{R})$ 的距离为 d , 则 $d = \frac{|2a - 1|}{\sqrt{1 + (-a)^2}} < 1$, 解得 $0 < a < \frac{4}{3}$. 即“ $a > 0$ ”是“直线 $x - ay + 2a - 1 = 0 (a \in \mathbf{R})$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相交”的必要不充分条件, 故选 B.

5. C $(1 - 2x^2)(1 + ax)^4 (a \in \mathbf{N})$ 的展开式中含 x^4 的项为 $1 \times C_4^4 (ax)^4 - 2x^2 \cdot C_4^2 (ax)^2 = a^4 x^4 - 12a^2 x^4 = (a^4 - 12a^2) x^4$, 则 $a^4 - 12a^2 = -27$, 解得 $a^2 = 9$ 或 $a^2 = 3$, 又 $a \in \mathbf{N}$, 所以 $a = 3$, 故选 C.

6. A 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) = x^3 + 2 \cdot 0.25^x$, 由幂函数和指数函数的单调性可得 $f(x)$ 在 $[0, +\infty]$ 上单调递增. 又函数为偶函数, 所以 $f(3t - 2) < f(t - 1) \Leftrightarrow |3t - 2| < |t - 1|$, 两边平方后展开可得 $9t^2 - 12t + 4 < t^2 - 2t + 1$, 即 $8t^2 - 10t + 3 < 0$, 解得 $\frac{1}{2} < t < \frac{3}{4}$. 故选 A.

7. D 因为 $2 = \log_2 4 < \log_2 5 < \log_2 8 = 3, -3 = \log_3 \frac{1}{27} < \log_3 \frac{1}{25} < \log_3 \frac{1}{9} = -2$, 所以 $a + 2b < -1$, 故 A 错误;

因为 $4^a \cdot 9^b = 4^{\log_2 5} \cdot 9^{\log_3 \frac{1}{25}} = (2^{\log_2 5} \cdot 3^{\log_3 \frac{1}{25}})^2 = (5 \times \frac{1}{25})^2 = \frac{1}{25}$, 故 B 错误;

因为 $\frac{4a + b}{ab} = \frac{4}{b} + \frac{1}{a} = \log_5 \frac{2}{9} < 0$, 故 C 错误;

$$\text{因为 } \frac{ab-a}{a-b} = \frac{1-\frac{1}{b}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} = \frac{1+\log_{25} 3}{-\log_{25} 3-\log_5 2} = \frac{1+\frac{1}{2}\log_5 3}{-\frac{1}{2}\log_5 3-\log_5 2} = \frac{2+\log_5 3}{-\log_5 3-2\log_5 2} = \frac{2\log_5 5+\log_5 3}{-\log_5 3-2\log_5 2} = -\frac{\log_5 75}{\log_5 12} = -\log_{12} 75, \text{故 D 正确. 故选 D.}$$

$$8. B \quad 16bc \cos^2 \frac{A}{2} = 16bc \times \frac{1+\cos A}{2} = 8bc + 8bc \cos A = 5a^2, \text{又 } 2bc \cos A = c^2 + b^2 - a^2,$$

$$\text{则 } 8bc + 4b^2 + 4c^2 - 4a^2 = 5a^2 \Rightarrow 9a^2 = 4b^2 + 8bc + 4c^2 = 4(b+c)^2, \text{则 } 3a = 2b+2c,$$

设 D 为 BC 中点, 则有 $OD \perp BC$,

$$\therefore \vec{BO} \cdot \vec{BC} = |\vec{BO}| |\vec{BC}| \cos \angle OBD = |\vec{BC}| \cdot \frac{1}{2} |\vec{BC}| = \frac{1}{2} |\vec{BC}|^2 = \frac{1}{2} a^2,$$

$$\text{由 } \frac{\vec{AC}}{\cos C} - \frac{\vec{AB}}{\cos B} = \lambda \vec{BO} \text{ 可得 } \left(\frac{\vec{AC}}{\cos C} - \frac{\vec{AB}}{\cos B} \right) \cdot \vec{BC} = \lambda \vec{BO} \cdot \vec{BC},$$

$$\therefore \frac{|\vec{AC}| |\vec{BC}| \cos C}{\cos C} - \frac{|\vec{AB}| |\vec{BC}| \cos(\pi-B)}{\cos B} = \frac{\lambda}{2} |\vec{BC}|^2,$$

$$\text{所以 } |\vec{AC}| |\vec{BC}| + |\vec{AB}| |\vec{BC}| = \frac{\lambda}{2} |\vec{BC}|^2, \text{所以 } ba+ca = \frac{\lambda}{2} a^2, \text{即 } b+c = \frac{\lambda}{2} a.$$

又 $3a = 2b+2c$, 所以 $3a = \lambda a$, 故 $\lambda = 3$, 故选 B.

$$9. BCD \quad 8 \times 75\% = 6, \text{甲组成绩从小到大排列为 } 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 10, \text{其上四分位数为 } \frac{8+9}{2} = 8.5; \text{乙组成绩从小}$$

到大排列为 $5, 6, 7, 8, 9, 9, 10, 10$, 其上四分位数为 $\frac{9+10}{2} = 9.5$, A 错误;

$$\text{甲组成绩的平均数为 } \bar{x}_{\text{甲}} = \frac{1}{8} \times (10+7+7+8+8+8+7+9+8) = 8, \text{乙组成绩的平均数为 } \bar{x}_{\text{乙}} = \frac{1}{8} \times (5+6+10+10+8+9+9+7) = 8, \text{B 正确};$$

甲组成绩的极差为 $10-7=3$, 乙组成绩的极差为 $10-5=5$, C 正确;

因为甲组的成绩比较集中, 乙组的成绩比较分散, 所以甲组成绩的方差小于乙组成绩的方差, D 正确, 故选 BCD.

$$10. AC \quad \text{对于 A, 易知 } M \in \text{平面 } C_1BD, M \in \text{平面 } AA_1C_1C, \text{又平面 } C_1BD \cap \text{平面 } AA_1C_1C = C_1O, \text{则 } M \in C_1O, \text{故 A 正确};$$

$$\text{对于 B, } V_{P-BC_1D} = V_{C_1-PBD} = \frac{1}{3} \times a \times \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{6} a^3, \text{故 B 错误};$$

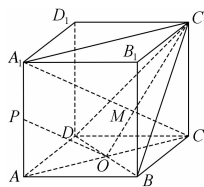
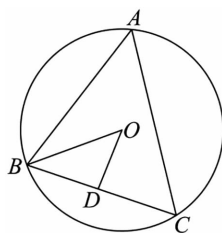
对于 C, 连接 A_1C_1, C_1O, AC , 易知 $BD \perp \text{平面 } A_1ACC_1$,

而 $BD \subset \text{平面 } BC_1D$, 故得平面 $AA_1C_1C \perp \text{平面 } BC_1D$, 又 OC_1 为这两平面的交线,

于是点 P 在平面 BC_1D 上的射影在直线 OC_1 上, 显然 OC_1 为线段 BD 的中垂线, 故 C 正确;

对于 D, $\because AA_1 \parallel DD_1, \text{在 } \text{Rt} \triangle AA_1C \text{ 中, } \angle AA_1C \text{ 就是异面直线 } A_1C \text{ 与 } DD_1 \text{ 所成的角, } AC = \sqrt{2}a, A_1C = \sqrt{3}a,$

$$\text{则 } \sin \angle AA_1C = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{故 D 错误. 故选 AC.}$$



$$11. AC \quad \text{双曲线渐近线方程为 } y = \pm x, \text{等轴双曲线渐近线就是 } y = \pm x, \text{其离心率 } e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \text{等轴双曲线}$$

中 $a=b$, 所以 $e = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, A 正确; 等轴双曲线 $y^2 - x^2 = 1$ 的焦点在 y 轴上, 说明存在焦点不在 x 轴上的情况, B 错误; 设双曲线 C 的方程为 $x^2 - y^2 = \lambda (\lambda \neq 0)$, 点 $P(x, y)$ 到渐近线 $y=x$ 的距离 $d_1 = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$, 到

$$y=-x \text{ 的距离 } d_2 = \frac{|x+y|}{\sqrt{2}}, d_1 d_2 = \frac{|x^2 - y^2|}{2} = \frac{|\lambda|}{2}. \text{由均值不等式 } d_1 + d_2 \geq 2\sqrt{d_1 d_2} = 2\sqrt{\frac{|\lambda|}{2}}, \text{已知}$$

$$2\sqrt{\frac{|\lambda|}{2}} = 4, \text{解得 } |\lambda| = 8, \text{实轴长 } 2a = 2\sqrt{|\lambda|} = 4\sqrt{2}, \text{C 正确; 双曲线 } y = \frac{8}{x} \text{ 与 } y = x \text{ 交点为 } (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}),$$

$$(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}), \text{顶点到原点距离 } a = 4, \text{旋转后实轴在 } y \text{ 轴, 方程应为 } \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{16} = 1, \text{D 错误. 故选 AC.}$$

$$12. 2\sqrt{2} \quad \text{抛物线的准线方程为 } x = -1, \text{由于 } |PF| = 3, \text{根据抛物线的定义可知 } x_P = 2, \text{将 } x_P = 2 \text{ 代入抛物线方}$$

程得 $y^2=8, y_P=\pm 2\sqrt{2}$, 所以 $|PQ|=2\sqrt{2}$.

13. $\frac{2\ 025}{4\ 054}$ 由 $n^2 a_n = S_n$, 则 $(n-1)^2 a_{n-1} = S_{n-1} (n \geq 2)$, 两式左右分别相减得 $n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1} = a_n$, 即 $(n^2-1)a_n = (n-1)^2 a_{n-1}$ 得 $(n+1)a_n = (n-1)a_{n-1}$, 则 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1}, \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{n-2}{n}, \dots, \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{4}, \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}$, 将以上 $n-1$ 个式子相乘得 $a_n = \frac{1}{n(n+1)} (n \geq 2)$, 上式对 $n=1$ 仍成立, 所以 $a_n = \frac{1}{n(n+1)}, b_n = a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}, \therefore T_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$, 即 $T_{2\ 025} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\ 027} = \frac{2\ 025}{4\ 054}$.

14. $\frac{1}{2}$ $|AB|=f(t)-g(t)=\frac{1}{2}t^2-\ln t$, 设 $h(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x, h'(x)=x-\frac{1}{x}=\frac{(x+1)(x-1)}{x}$, 由此知 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减, 在 $(1,+\infty)$ 上递增, $h(x)_{\min}=h(1)=\frac{1}{2}, |AB|$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

15. 解: (1) $f(x)=2\cos x \cdot \sin(x+\frac{\pi}{3})-\sqrt{3}\sin^2 x+\sin x \cdot \cos x$
 $=2\cos x(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)+\frac{1}{2}\sin 2x-\sqrt{3}\sin^2 x$
 $=\sin 2x+\sqrt{3}\cos^2 x-\sqrt{3}\sin^2 x$
 $=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$
 $=2\sin(2x+\frac{\pi}{3}), \dots\dots\dots 4$ 分

故函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi, \dots\dots\dots 5$ 分

由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq 2x+\frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2}+2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 可得 $\frac{\pi}{12}+k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{12}+k\pi, k \in \mathbf{Z}. \dots\dots\dots 7$ 分

故函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $[\frac{\pi}{12}+k\pi, \frac{7\pi}{12}+k\pi], k \in \mathbf{Z}. \dots\dots\dots 8$ 分

(2) 因为 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$, 由 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 可得 $2x+\frac{\pi}{3} \in (\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$, $\dots\dots\dots 10$ 分

由正弦函数的图象, 可得 $\sin(2x+\frac{\pi}{3}) \in (-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$, $\dots\dots\dots 12$ 分

故 $f(x)$ 的取值范围为 $(-\sqrt{3}, 2]$. $\dots\dots\dots 13$ 分

16. 解: (1) 当 $a=1$ 时, $f(x)=(1+\frac{1}{x})\ln x-2x$,

所以 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-2=\frac{x+1-2x^2-\ln x}{x^2}, \dots\dots\dots 2$ 分

设 $m(x)=x+1-2x^2-\ln x$, 则 $m'(x)=1-(4x+\frac{1}{x}) \leq 1-2\sqrt{4x \cdot \frac{1}{x}} < 0, \dots\dots\dots 4$ 分

所以 $m(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 且 $m(1)=0, \dots\dots\dots 6$ 分

所以 $x \in (0, 1)$ 时, $m(x) > 0, f'(x) > 0; x \in (1, +\infty)$ 时, $m(x) < 0, f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减. $\dots\dots\dots 8$ 分

(2) $g(x)$ 的图象与 $y=\ln x$ 图象的公共点个数, 即方程 $(1+\frac{a}{x})\ln x-x=\ln x$ 的实根个数,

显然 $x \neq 1, \ln x \neq 0$, 所以由 $(1+\frac{a}{x})\ln x-x=\ln x$ 得 $a=\frac{x^2}{\ln x}, \dots\dots\dots 9$ 分

设 $h(x)=\frac{x^2}{\ln x}$, 则 $h'(x)=\frac{x(2\ln x-1)}{(\ln x)^2}, \dots\dots\dots 10$ 分

当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) < 0, h(x)$ 单调递减, 且 $h(x) \in (-\infty, 0)$,

当 $x \in (1, e^{\frac{1}{2}}]$ 时, $h'(x) < 0, h(x)$ 单调递减, 且 $h(x) \in [2e, +\infty)$,

当 $x \in (e^{\frac{1}{2}}, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0, h(x)$ 单调递增, 且 $h(x) \in (2e, +\infty), \dots\dots\dots 13$ 分

$a > 2e$ 时 $a = \frac{x^2}{\ln x}$ 有 2 个实根, 即 $g(x)$ 的图象与 $y = \ln x$ 的图象有 2 个公共点. 15 分

17. (1) 证明: 因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $BC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $BC \perp PA$.

又 $BC \perp AB$, $PA \cap AB = A$, $PA, AB \subset$ 平面 PAB , 所以 $BC \perp$ 平面 PAB .

因为 $BC \subset$ 平面 PBC , 所以平面 $PBC \perp$ 平面 PAB 4 分

(2) 解: (i) 连接 ED ,

因为 $BC \perp$ 平面 PAB , $PB \subset$ 平面 PAB , 所以 $BC \perp PB$,

因为 E 为 PC 的中点, 所以 $EB = \frac{1}{2} PC$, 同理, 有 $ED = \frac{1}{2} PC$, $EA = \frac{1}{2} PC$,

$$EB = ED = EA = EP = EC = \frac{1}{2} PC,$$

所以 E 为四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的球心. 7 分

按如图所示建立空间直角坐标系, 连接 DB , 取 AB 的中点 M , 连接 DM , 由 $\triangle ACB \cong \triangle ACD$, 得 $AB = AD$.

又 $\angle DAB = 2\angle CAB = 60^\circ$, 所以 $\triangle ABD$ 是正三角形, 所以 $DM \perp AB$,

易知 $A(0, 0, 0)$, $B(2\sqrt{3}, 0, 0)$, $C(2\sqrt{3}, 2, 0)$, $D(\sqrt{3}, 3, 0)$,

设 $PA = a$, 则 $P(0, 0, a)$, $E(\sqrt{3}, 1, \frac{a}{2})$, 有 $\overrightarrow{AE} = (\sqrt{3}, 1, \frac{a}{2})$, $\overrightarrow{PB} = (2\sqrt{3}, 0, -a)$,

因为 $AE \perp PB$, 所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$,

$$\text{有 } \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} + 1 \times 0 + \frac{a}{2} \cdot (-a) = 0, \text{ 得 } a = 2\sqrt{3},$$

$$\text{即 } PA = 2\sqrt{3}, \text{ 有 } PC = \sqrt{PA^2 + AC^2} = 2\sqrt{7},$$

故四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的半径为 $\sqrt{7}$ 11 分

(ii) 由 (i) 可知 $E(\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$, 得 $\overrightarrow{AB} = (2\sqrt{3}, 0, 0)$, $\overrightarrow{AE} = (\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{AD} = (\sqrt{3}, 3, 0)$, 12 分

设平面 BAE 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \end{cases} \text{ 有 } \begin{cases} 2\sqrt{3}x = 0, \\ \sqrt{3}x + y + \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$$

则 $x = 0$, 取 $z = 1$, $y = -\sqrt{3}$, 得 $\mathbf{m} = (0, -\sqrt{3}, 1)$, 14 分

$$\text{则直线 } AD \text{ 与平面 } BAE \text{ 所成角的正弦值为 } \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{m}|}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\mathbf{m}|} = \frac{|-3\sqrt{3}|}{\sqrt{3+3^2} \cdot \sqrt{3+1}} = \frac{3}{4}.$$
 15 分

18. (1) 解: $\because A, B$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个顶点, 且 $|AB| = \sqrt{5}$, 直线 AB 的斜率为 $-\frac{1}{2}$, 由 $A(a, 0)$,

$$B(0, b), \text{ 得 } |AB| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}, \text{ 2 分}$$

$$\text{又 } k = \frac{b-0}{0-a} = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}, \text{ 解得 } a = 2, b = 1, \text{ 4 分}$$

$$\therefore \text{椭圆 } E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1. \text{ 5 分}$$

(2) 证明: 直线 l 的方程为 $x = -2y + m$, 即 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{m}{2}$, 将其代入 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$,

$$\text{消去 } y, \text{ 整理得 } 2x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0. \text{ 7 分}$$

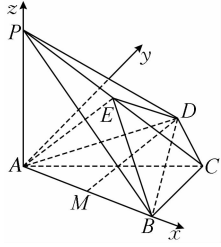
$$\text{设 } C(x_1, y_1), D(x_2, y_2). \therefore x_1 + x_2 = m, x_1 x_2 = \frac{1}{2}m^2 - 2. \text{ 8 分}$$

记 $\triangle OCM$ 的面积是 S_1 , $\triangle ODN$ 的面积是 S_2 .

$$\text{由题意 } M(m, 0), N(0, \frac{m}{2}), \therefore x_1 + x_2 = m,$$

$$\therefore |2y_1| = |2(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{m}{2})| = |-x_1 + m| = |x_2|, \text{ 10 分}$$

$$\therefore S_{\triangle OCM} = \frac{1}{2}|m||y_1|, S_{\triangle ODN} = \frac{1}{2}|\frac{m}{2}||x_2|.$$



∴△OCM的面积等于△ODN的面积. 12分

(3)证明:由(2)知, $M(m,0),x_1+x_2=m,x_1x_2=\frac{1}{2}m^2-2$,

∴ $|CM|^2+|MD|^2=(x_1-m)^2+y_1^2+(x_2-m)^2+y_2^2$
 $=x_1^2-2mx_1+m^2+(-\frac{1}{2}x_1+\frac{m}{2})^2+x_2^2-2mx_2+m^2+(-\frac{1}{2}x_2+\frac{m}{2})^2$
 $=\frac{5}{4}(x_1+x_2)^2-\frac{5}{2}x_1x_2-\frac{5}{2}m(x_1+x_2)+\frac{5}{2}m^2$
 $=\frac{5}{4}m^2-\frac{5}{2}(\frac{1}{2}m^2-2)-\frac{5}{2}m^2+\frac{5}{2}m^2=5.$ 17分

19. (1)解: X的可能取值为 3, 4, 5, 6,

$P(X=3)=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}, P(X=4)=C_3^1\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{3}{4}=\frac{9}{64}, P(X=5)=C_3^2\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64},$
 $P(X=6)=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}.$ 2分

∴X的分布列如下:

X	3	4	5	6
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

..... 4分

∴ $E(X)=3\times\frac{1}{64}+4\times\frac{9}{64}+5\times\frac{27}{64}+6\times\frac{27}{64}=\frac{21}{4}.$ 6分

(2)解: ∴这 n 人的得分之和为 n+1 分,

∴其中只有 1 人计划既参观故宫又参观珍宝馆, 7分

∴ $P_n=C_n^1\times\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{3n}{4^n},$ 8分

∴ $P_1+P_2+P_3+\cdots+P_n=\frac{3}{4}+\frac{3\times 2}{4^2}+\frac{3\times 3}{4^3}+\cdots+\frac{3n}{4^n},$ ① 9分

则 $\frac{1}{4}(P_1+P_2+P_3+\cdots+P_n)=\frac{3}{4^2}+\frac{3\times 2}{4^3}+\frac{3\times 3}{4^4}+\cdots+\frac{3(n-1)}{4^n}+\frac{3n}{4^{n+1}},$ ②

由①-②得 $\frac{3}{4}(P_1+P_2+P_3+\cdots+P_n)=\frac{3}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{3}{4^4}+\cdots+\frac{3}{4^n}-\frac{3n}{4^{n+1}}=\frac{3}{4}\times\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}-\frac{3n}{4^{n+1}},$

∴ $P_1+P_2+P_3+\cdots+P_n=\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)-\frac{n}{4^n}.$ 11分

(3)证明:在随机抽取的若干人的得分之和为 n-1 分的基础上再抽取 1 人,

则这些人的得分之和可能为 n 分或 n+1 分, 12分

记“得分之和为 n 分”为事件 A,“得分之和为 n+1 分”为事件 B, A 与 B 是对立事件.

∴ $P(A)=a_n, P(B)=\frac{3}{4}a_{n-1},$

∴ $a_n+\frac{3}{4}a_{n-1}=1(n\geq 2),$ 即 $a_n-\frac{4}{7}=-\frac{3}{4}\left(a_{n-1}-\frac{4}{7}\right)(n\geq 2).$ 14分

∴ $a_1=\frac{1}{4},$ ∴数列 $\left\{a_n-\frac{4}{7}\right\}$ 是首项为 $-\frac{9}{28},$ 公比为 $-\frac{3}{4}$ 的等比数列,

∴ $a_n-\frac{4}{7}=-\frac{9}{28}\times\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1},$ 15分

∴ $a_n=\frac{4}{7}-\frac{9}{28}\times\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1},$ 16分

∴随着抽取人数的无限增加, a_n 趋近于常数 $\frac{4}{7}.$ 17分

(五)

1. A 由 $z(2-i)=5$ 可得 $z=\frac{5}{2-i}=\frac{5(2+i)}{5}=2+i$, 所以 $\bar{z}=2-i$, 故 $|\bar{z}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$, 故选 A.

2. D 因为 $A\subseteq B$, 所以 $\begin{cases} 6+2a>0, \\ 6-a>0, \end{cases}$ 解得 $-3<a<6$, 即 a 的取值范围是 $(-3, 6)$. 故选 D.

3. A 由 $a^y=3x$, 可得 $y=\log_a 3x=\log_a x+\log_a 3$, 又 $y=\log_a x+1$, $\therefore \log_a 3=1$, 解得 $a=3$. 故选 A.

4. D 圆 $C: x^2+y^2+2ax+a^2-1=0$ 的标准方程为 $(x+a)^2+y^2=1$, 其圆心坐标为 $(-a, 0)$, 则圆与双曲线的两条渐近线都相切, 双曲线 $x^2-4y^2=1$ 的渐近线方程为 $x\pm 2y=0$, 则圆心到渐近线的距离 $d=\frac{|a|}{\sqrt{5}}=1$, 解得 $a=\sqrt{5}$, 故选 D.

5. A 若 $d=0$, 则 $\{a_n\}$ 为常数列, 故 $a_n=a_1$, 即 $S_{2n}=2na_1, S_n=na_1\Rightarrow "S_{2n}\in \mathbf{Z}"$,

当 $S_{2n}\in \mathbf{Z}$ 时, d 不一定为 0, 例如, 数列 1, 3, 5, 7, 9, 11 中, $\frac{S_6}{S_3}=\frac{1+3+5+7+9+11}{1+3+5}=4, d=2$, 故 " $d=0$ " 是

" $S_{2n}\in \mathbf{Z}$ " 的充分不必要条件. 故选 A.

6. C 由函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象知, $A=2, T=4\times(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12})=\pi$, 所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$, 又因为 $f(\frac{\pi}{12})=2\sin(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi)=2$, 所以 $\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$, 解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$, 又因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$, 所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$. 由题意知 $g(x)=f(2x)=2\sin(4x+\frac{\pi}{3})$, 令 $t=4x+\frac{\pi}{3}$, 因为 $x\in(\pi, 2\pi)$, 所以 $t\in(\frac{13\pi}{3}, \frac{25\pi}{3})$, 结合 $y=2\sin t$ 的图象, 易知 $g(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 上有 4 个零点, 故选 C.

7. B 因为 $f(x)=x^{\frac{3}{2}}-(x-4)^{\frac{3}{2}}+ax$, 所以 $f'(x)=\frac{3}{2}(\sqrt{x}-\sqrt{x-4})+a=\frac{6}{\sqrt{x}+\sqrt{x-4}}+a$, 因为 $y=\sqrt{x}+\sqrt{x-4}$ 在 $(4, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $\sqrt{x}+\sqrt{x-4}>2$, 所以 $a<f'(x)<a+3$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由 $f(x)$ 的图象在点 A, B 处的切线互相垂直, 得 $f'(x_1)f'(x_2)=-1$, 因为 $a<f'(x_1)<a+3$, $a<f'(x_2)<a+3$, 所以 $\begin{cases} a(a+3)<0 \\ a(a+3)<-1 \end{cases}$, 解得 $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}<a<\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, 故选 B.

8. C 准线与 x 轴的交点为 $E(-4, 0)$, 可知 $-\frac{p}{2}=-4$, 所以 $p=8$, 故抛物线 $C: y^2=16x$. 设直线 MN 的方程为 $y=k(x+4), M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 联立 $\begin{cases} y^2=16x \\ y=k(x+4) \end{cases}$, 得 $k^2x^2+(8k^2-16)x+16k^2=0$, 由 $\Delta>0$ 得 $-1<k<1$, 所以 $x_1x_2=16$. 因为 $\angle MFE=2\angle NFE$, 所以 $x_1>x_2>0$, 且 FN 是 $\angle MFE$ 的平分线, 于是 $\frac{|MF|}{|FE|}=\frac{|MN|}{|NE|}=\frac{|ME|-|NE|}{|NE|}=\frac{|ME|}{|NE|}-1$, 即 $\frac{x_1+4}{8}=\frac{x_1+4}{x_2+4}-1$, 整理可得 $x_1=3x_2+8$, 与 $x_1x_2=16$ 联立解得 $x_1=12$, 进而 $y_1=8\sqrt{3}$, 于是 $k=\frac{y_1-0}{x_1+4}=\frac{8\sqrt{3}}{16}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 故选 C.

9. BD

10. AD 对于 A, 因为 $\bar{x}=\frac{n_1}{n_1+n_2}\bar{x}_1+\frac{n_2}{n_1+n_2}\bar{x}_2<\frac{n_1}{n_1+n_2}\bar{x}_1+\frac{n_2}{n_1+n_2}\bar{x}_1=\bar{x}_1$, A 正确; 对于 B, 由总样本方差的计算公式知 $s^2=\frac{n_1}{n_1+n_2}[s_1^2+(\bar{x}_1-\bar{x})^2]+\frac{n_2}{n_1+n_2}[s_2^2+(\bar{x}_2-\bar{x})^2]$, B 错误; 对于 C, 不妨假设 $n_1=n_2=5$, 男生分数分别为 100, 110, 120, 130, 140, 则 $\bar{x}_1=120, s_1^2=200$, 女生分数分别为 80, 90, 100, 110, 120, 则 $\bar{x}_2=100, s_2^2=200$, 所以 $\bar{x}=\frac{n_1}{n_1+n_2}\bar{x}_1+\frac{n_2}{n_1+n_2}\bar{x}_2=110$, 所以 $s^2=\frac{n_1}{n_1+n_2}[s_1^2+(\bar{x}_1-\bar{x})^2]+\frac{n_2}{n_1+n_2}[s_2^2+(\bar{x}_2-\bar{x})^2]=\frac{1}{2}\times(200+100)+\frac{1}{2}\times(200+100)=300$, C 错误; 对于 D, 由 $\bar{x}_1=\bar{x}_2$ 可得 $\bar{x}=\bar{x}_1=\bar{x}_2$, 所以 $s^2=\frac{1}{n_1+n_2}[\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{j=1}^{n_2}(y_j-\bar{x})^2]$. 又 $s_1^2=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\bar{x}_1)^2, s_2^2=\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}(y_j-\bar{x}_2)^2$, 所以 $s^2=\frac{1}{n_1+n_2}(n_1s_1^2+n_2s_2^2)=s_1^2=s_2^2$, 则 $s^2=\frac{s_1^2+s_2^2}{2}$, D 正确. 故选 AD.

11. ABC 在 $f(\frac{x_1}{x_2})+\frac{x_1}{x_2}=x_1f(\frac{1}{x_2})+\frac{1}{x_2}f(x_1)$ 中, 取 $x_1=x_2=1$ 得 $f(1)+1=2f(1)$, 所以 $f(1)=1$, 取 $x_1=$

$x_2 = -1$ 得 $f(1) + 1 = -2f(-1)$, 所以 $f(-1) = -1$, 取 $x_1 = x, x_2 = -1$ 得 $f(-x) - x = xf(-1) - f(x)$, 即 $f(-x) = -f(x)$, $f(x)$ 是奇函数, A 正确;

取 $x_1 = x_2 = x \neq 0$, 则 $f(1) + 1 = xf\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}f(x) = 2$, B 正确;

取 $x_1 = x, x_2 = \frac{1}{2}$, 得 $f(2x) + 2x = xf(2) + 2f(x)$, 因为 $f(2) = 2$, 所以 $f(2x) = 2f(x)$, $f(4x) = 2f(2x) = 4f(x)$, $f(8x) = 2f(4x) = 8f(x)$, C 正确;

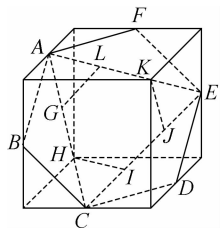
由 $x \in [1, 2]$ 时 $f(x) = x$, 所以 $f(2) = 2, f(2x) = 2f(x), f(16x) = 16f(x)$, 当 $x \in \left[\frac{1}{16}, \frac{1}{8}\right]$ 时 $16x \in [1, 2]$, 所以 $f(x) = \frac{1}{16}f(16x) = \frac{1}{16} \times 16x = x$, 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $x \in \left[-\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}\right]$ 时 $f(x) = x$,

D 错误, 故选 ABC.

12. $-\frac{1}{2}$ 因为 $a + 2b = (1, 0) + 2(x, 2) = (1 + 2x, 4)$, 由题意得 $1 + 2x = 0$, 即 $x = -\frac{1}{2}$.

13. $8p^3 - 24p^4 + 24p^5 - 8p^6$ 由题意比赛局数分别为 2, 4, 6, 8, 每两局看作一轮, 每轮比赛后停止比赛的概率为 $p^2 + (1-p)^2 = 2p^2 - 2p + 1$, 所以比赛 8 局停止比赛的概率为 $[1 - (2p^2 - 2p + 1)]^3 = 8p^3 - 24p^4 + 24p^5 - 8p^6$.

14. $9\sqrt{3}$ 如图所示, 所得到的截面 α 是正六边形 $ABCDEF$, 由正方体的棱长为 6, 可得 $AF = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$, 设 G, H 是线段 AC 的三等分点, I, J 是线段 CE 的三等分点, K, L 是线段 AE 的三等分点, 由题意知各垂足组成的凸多边形为正六边形 $GHIJKL$, $\triangle ACE$ 是边长为 $3\sqrt{6}$ 的正三角形, 正六边形 $GHIJKL$ 的边长为 $\sqrt{6}$, 其面积为 $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{6})^2 = 9\sqrt{3}$.



15. 解: (1) 由 $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} = \frac{2\sin C}{c}$ 结合正弦定理可得

$$\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{2\sin C}{\sin C} = 2, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

所以 $2\sin A \sin B = \sin B \cos A + \cos B \sin A$,

所以 $2\sin A \sin B = \sin(A+B) = \sin C$, $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

因为 $\sin B = \frac{1}{4}$, 所以 $\frac{1}{2} \sin A = \sin C$, 即 $\frac{a}{c} = 2$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 设外接圆半径为 R ,

由 (1) 中 $2\sin A \sin B = \sin C$,

得 $2 \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} = \frac{c}{2R}$, 即 $ab = Rc$, $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

所以 $Rc^2 = abc = 2\left(\frac{1}{2}ab\sin C\right) \frac{c}{\sin C} = 4RS = 32R$, 所以 $c = 4\sqrt{2}$. $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

又 $8 = S = \frac{1}{2}ab\sin C \leq \frac{1}{2}ab \leq \frac{1}{8}(a+b)^2$, 所以 $a+b \geq 8$, $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

故 $\triangle ABC$ 的周长 $a+b+c \geq 8+4\sqrt{2}$,

当且仅当 $a=b=4$, 且 $C = \frac{\pi}{2}$ 时, 周长取得最小值 $8+4\sqrt{2}$. $\dots\dots\dots 13 \text{ 分}$

16. (1) 证明: 由题意可得正四棱锥所有棱长均为 $\sqrt{2}$, 而 P 是 SD 的中点,

所以 $CP \perp SD, AP \perp SD$,

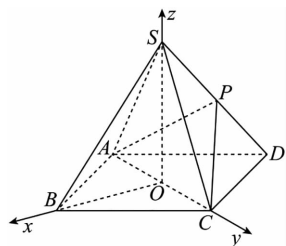
又因为 $AP \cap CP = P$, 且 $AP, CP \subset$ 平面 PAC , 所以 $SD \perp$ 平面 PAC , $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

又因为 $SD \subset$ 平面 SAD , 所以平面 $SAD \perp$ 平面 PAC . $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 解: 如图, 连接 OB , 易知 OB, OC, OS 两两互相垂直, 分别以 OB, OC, OS 为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$,

则 $A(0, -1, 0), C(0, 1, 0), S(0, 0, 1), D(-1, 0, 0)$, 可得 $\vec{AC} = (0, 2, 0)$, $\vec{SD} = (-1, 0, -1)$. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

由 $\vec{SP} = \frac{1}{4}\vec{SD}$, 得 $\vec{SP} = \left(-\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}\right)$, 所以 $P\left(-\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}\right)$, 进而 $\vec{AP} = \left(-\frac{1}{4}, 1, \frac{3}{4}\right)$. $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$



设平面 PAC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AP} = -\frac{1}{4}x + y + \frac{3}{4}z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2y = 0 \end{cases}$,
 令 $z=1$, 则 $x=3$, 所以平面 PAC 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (3, 0, 1)$ 12 分
 易知平面 SAC 的一个法向量为 $\overrightarrow{OB} = (1, 0, 0)$, 13 分
 设二面角 $S-AC-P$ 的平面角为 θ , 则 $\cos \theta = |\cos \langle \overrightarrow{OB}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{OB} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{OB}| |\mathbf{n}|} = \frac{3}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,
 故二面角 $S-AC-P$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 15 分

17. (1) 解: 因为离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ① 1 分

因为当 MP 过点 F 时, $|MP|=1$, 所以 $\frac{2b^2}{a} = 1$, ② 2 分

由①②解得 $a=2, b=1$, 3 分

所以椭圆 C 的标准方程是 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 4 分

(2) (i) 解: 因为 $P(x_0, y_0)$, 所以 $M(x_0, -y_0)$.

由(1)得 $A(-2, 0), B_1(0, 1), B_2(0, -1)$,

所以直线 AB_1 的方程为 $y = \frac{1}{2}x + 1$,

令 $y=y_0$, 得 $x=2y_0-2$, 所以 $Q(2y_0-2, y_0)$ 7 分

又直线 PB_2 的方程为 $y = \frac{y_0+1}{x_0}x - 1$,

令 $x=2y_0-2$, 得 $y = \frac{y_0+1}{x_0}(2y_0-2) - 1 = \frac{2}{x_0}(y_0^2-1) - 1 = \frac{2}{x_0} \cdot (-\frac{x_0^2}{4}) - 1 = -\frac{1}{2}x_0 - 1$,

所以 $N(2y_0-2, -\frac{1}{2}x_0-1)$ 10 分

(ii) 证明: 由(i)可得直线 MN 的斜率

$$k_{MN} = \frac{-y_0 - (-\frac{1}{2}x_0 - 1)}{x_0 - (2y_0 - 2)} = \frac{-y_0 + \frac{1}{2}x_0 + 1}{x_0 - 2y_0 + 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2y_0 + x_0 + 2}{x_0 - 2y_0 + 2} = \frac{1}{2}, \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

即 $\tan(\frac{\pi}{2} - \angle MNQ) = \frac{1}{2}$, 则 $\frac{1}{\tan \angle MNQ} = \frac{1}{2}, \tan \angle MNQ = 2$ 15 分

18. 解: (1) 因为 $f(x) = \frac{a}{2}e^{ax} - x \ln x$,

所以 $f'(x) = \frac{a^2}{2}e^{ax} - \ln x - 1$, 1 分

设 $g(x) = f'(x)$, 则 $g'(x) = \frac{a^3}{2}e^{ax} - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

且 $g'(1) = \frac{a^3}{2}e^a - 1 = 0$, 3 分

所以 $x \in (0, 1)$ 时 $g'(x) < 0, f'(x)$ 单调递减, $x \in (1, +\infty)$ 时 $g'(x) > 0, f'(x)$ 单调递增,

所以 $f'(x) \geq f'(1) = \frac{a^2}{2}e^a - 1$, 5 分

由 $a > 0$ 及 $a^3 e^a = 2$ 可得 $0 < a < 1$, 所以 $\frac{a^2}{2}e^a - 1 > \frac{a^3}{2}e^a - 1 = 0$,

所以 $f'(x) > 0, f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 7 分

(2) 若 $0 < a < \frac{2}{e}$, 则 $x=e$ 时, $\frac{a}{2}e^{ae} < \frac{1}{e} \cdot e^2 = e$, 而 $x \ln x = e \ln e = e$,

不等式 $\frac{a}{2}e^{ax} \geq x \ln x$ 不成立, 9 分

若 $a \geq \frac{2}{e}$, 则 $\frac{a}{2}e^{ax} - x \ln x \geq \frac{1}{e}e^{\frac{2}{e}x} - x \ln x = x(\frac{1}{ex}e^{\frac{2}{e}x} - \ln x)$

$$= x\left(\frac{1}{x}e^{\frac{x}{e}-1} \cdot e^{\frac{x}{e}} - \ln \frac{x}{e} - 1\right) = x\left[\frac{1}{x}\left(e^{\frac{x}{e}-1} - \frac{x}{e}\right) \cdot e^{\frac{x}{e}} + e^{\frac{x}{e}-1} - \ln \frac{x}{e} - 1\right]$$

$$= x\left\{\frac{1}{x}\left[e^{\frac{x}{e}-1} - 1 - \left(\frac{x}{e} - 1\right)\right] \cdot e^{\frac{x}{e}} + e^{\frac{x}{e}-1} - 1 - \left(\frac{x}{e} - 1\right) + \frac{x}{e} - \ln \frac{x}{e} - 1\right\}$$

=e^{\frac{x}{e}}(e^{\frac{x}{e}-1}-1-\ln e^{\frac{x}{e}-1})+x(e^{\frac{x}{e}-1}-1-\ln e^{\frac{x}{e}-1})+x(\frac{x}{e}-\ln \frac{x}{e}-1), \dots\dots\dots 12 分

设 $h(x)=\ln x-x+1$, 则 $h'(x)=\frac{1-x}{x}$,

当 $x \in (0,1)$ 时, $h'(x)>0$, $h(x)$ 单调递增; 当 $x \in (1,+\infty)$ 时, $h'(x)<0$, $h(x)$ 单调递减, 所以 $h(x) \leq h(1)=0$, 即 $\ln x-x+1 \leq 0$, 即 $x-\ln x-1 \geq 0$, \dots\dots\dots 14 分

所以 $\frac{x}{e}-\ln \frac{x}{e}-1 \geq 0, e^{\frac{x}{e}-1}-1-\ln e^{\frac{x}{e}-1} \geq 0$,

所以 $\frac{a}{2}e^{ax}-x \ln x \geq 0$. \dots\dots\dots 16 分

综上, a 的取值范围是 $[\frac{2}{e},+\infty)$. \dots\dots\dots 17 分

19. 解: (1) $a_{m+n}=a_m a_n$ 中, 令 $m=1$, 得 $a_{n+1}=a_1 a_n=3a_n$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 3, 公比为 3 的等比数列, \dots\dots\dots 2 分

所以 $a_n=3 \times 3^{n-1}=3^n$, \dots\dots\dots 3 分

$a_{n+2}-a_{n+1}-(a_{n+1}-a_n)=3^{n+2}+3^n-2 \times 3^{n+1}=4 \times 3^n>0$,

所以 $a_{n+2}-a_{n+1}>a_{n+1}-a_n$, $\{a_n\}$ 是“递增数列”. \dots\dots\dots 5 分

(2) ① 因为 $\{a_n\}$ 是“递增数列”, 所以 $a_{n+2}-a_{n+1}>a_{n+1}-a_n$,

设 $b_n=a_{n+1}-a_n$, 则数列 $\{b_n\}$ 是递增数列,

$a_{20}-a_1=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{20}-a_{19})=b_1+b_2+\cdots+b_{19}$,

因为 $a_1=a_{20}=-5$,

所以 $b_1+b_2+\cdots+b_{19}=0$,

所以存在正整数 $k, 2 \leq k \leq 19$, 使得 $b_{k-1}<0, b_k \geq 0$, \dots\dots\dots 7 分

则 $n \leq k$ 时 $a_n-a_{n-1}<0, \{a_n\}$ 单调递减, $n \geq k$ 时 $a_{n+1}-a_n \geq 0$,

所以 $\{a_n\}$ 中存在最小项 a_k .

因为 $b_n \in \mathbf{Z}, b_k \geq 0, \{b_n\}$ 是递增数列,

所以 $b_{k+1} \geq 1, b_{k+2} \geq 2, \cdots, b_{19} \geq 19-k$,

且 $b_{k-1} \leq -1, b_{k-2} \leq -2, \cdots, b_1 \leq -k+1$,

所以 $a_k=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_k-a_{k-1})$

$=-5+b_1+b_2+\cdots+b_{k-1} \leq -5-\frac{k(k-1)}{2}$, \dots\dots\dots 9 分

同理 $a_k=-(a_{k+1}-a_k)-(a_{k+2}-a_{k+1})-\cdots-(a_{20}-a_{19})+a_{20}=-5-(b_k+b_{k+1}+\cdots+b_{19}) \leq -5-\frac{(20-k)(19-k)}{2}$, 所以 $a_k \leq \min \left\{ -5-\frac{k(k-1)}{2}, -5-\frac{(20-k)(19-k)}{2} \right\}$. \dots\dots\dots 10 分

因为 $-5-\frac{k(k-1)}{2}-\left[-5-\frac{(20-k)(19-k)}{2}\right]=19(10-k)$, 所以当 $k=10$ 时 a_k 的最大值为 $-5-\frac{10 \times 9}{2}=-50$,

此时 $b_n=n-10, a_{11}-a_{10}=b_{10}=0$, \dots\dots\dots 11 分

所以 $\{a_n\}$ 的最小项的最大值为 -50 . \dots\dots\dots 12 分

② 由 $a_1=-5, a_{n+1}-a_n=n-10$, 得 $a_1, a_2, \cdots, a_{11}$ 的值依次为:

$-5, -14, -22, -29, -35, -40, -44, -47, -49, -50, -50$, 其中偶数有 6 个, 奇数有 5 个,

X 的取值依次为 2, 3, 6, \dots\dots\dots 14 分

当所取 4 项全为偶数或全为奇数时 $X=6, P(X=6)=\frac{C_6^4+C_5^4}{C_{11}^4}=\frac{2}{33}$,

当所取 4 项中有 3 个偶数或 3 个奇数时 $X=3, P(X=3)=\frac{C_6^3 C_5^1+C_6^1 C_5^3}{C_{11}^4}=\frac{16}{33}$,

当所取 4 项为 2 个偶数 2 个奇数时 $X=2, P(X=2)=\frac{C_6^2 C_5^2}{C_{11}^4}=\frac{15}{33}$,

所以 X 的分布列为

X	2	3	6
P	$\frac{15}{33}$	$\frac{16}{33}$	$\frac{2}{33}$

\dots\dots\dots 16 分

$E(X)=2 \times \frac{15}{33}+3 \times \frac{16}{33}+6 \times \frac{2}{33}=\frac{30}{11}$. \dots\dots\dots 17 分