Z20+名校联盟（浙江省名校新高考研究联盟）2026 届高三第一次联考

数学参考答案

一、单项选择题：（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.）

1	2	3	4	5	6	7	8
A	**D**	**B**	**D**	**A**	**D**	**C**	**D**

1．A

设 $z=a+bi$，则 $2z+\overline{z}=3a+bi=3-i$，故 $b=-1$，即 z 的虚部为 -1．

2．D

由于焦点为 $(0,1)$，故 $k>4$ 且 $1=c^2=k-4$，解得：$k=5$．

3．B

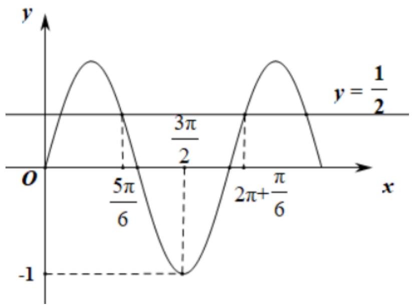
因为 $\vec{a}//\vec{b}$，故 $2(x-1)=x-5$，解得：$x=-3$．

4．D

由题意：$N\subseteq\{1,2,3,4,16\}$ 且 $\{4,16\}\subseteq N$，满足条件的 N 的个数即为 $\{1,2,3\}$ 的子集个数，因此满足条件的 N 的个数等于 8．

5．A

作出 $y=\sin x$ 的一个简图，如图，由于函数的值域为 $\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$，



$\sin\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$，$\sin\dfrac{3\pi}{2}=-1$，$\sin(2\pi+\dfrac{\pi}{6})=\sin\dfrac{13\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$，

则令 $t=2x-\dfrac{\pi}{6}$，则 $t\in\left[\dfrac{5\pi}{6},2a-\dfrac{\pi}{6}\right]$，

则有 $\dfrac{3\pi}{2}\le 2a-\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{13\pi}{6}$，解得：$\dfrac{5\pi}{6}\le a\le\dfrac{7\pi}{6}$，

即 a 的取值范围是 $\left[\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}\right]$．

6．D

考虑曲面区域 $ABFE$，由于 $\overset{\frown}{AE}$ 所对的圆心角为 $\dfrac{\pi}{3}$，故曲面区域 $ABFE$ 的面积为一个底面半径为 $5m$，高为 $20m$ 圆柱的侧面积的 $\dfrac{1}{6}$，即 $S_{ABFE}=\dfrac{1}{6}S_{侧}=\dfrac{1}{6}\cdot 2\pi r\cdot h=\dfrac{100\pi}{3}\ m^2$，

因此 $S_{总}=2S_{ABFE}=\dfrac{200}{3}\ m^2$．

7．C

考虑 X,Y 的概率密度函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，因为 $X\sim N(1,4)$，$Y\sim N(2,4)$，所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 图象分别关于 $x=1$ 和 $x=2$ 对称，且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 图像形状完全相同，

故 $f(x)$ 和 $g(x)$ 图象关于 $x=\dfrac{3}{2}$ 对称；由于 $P(X\le a)=P(Y\ge b)$，因此由图像可知，直线 $x=a$ 与直线 $x=b$ 关于 $x=\dfrac{3}{2}$ 对称，即 $a+b=3$，

则$\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}=\dfrac{1}{3}(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}\right)=\dfrac{1}{3}\left(5+\dfrac{b}{a}+\dfrac{4a}{b}\right)\geq\dfrac{1}{3}\left(5+2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{4a}{b}}\right)=3$，当且仅当$a=1,b=2$时等号成立.

8．D

由题意：$3f(x-1)-3f(x-2)\geq f(x)-f(x-1)\geq 2f(x-1)-2f(x-2)$，

设$a_n=f(n)-f(n-1)$，$n\geq 2$，则$3a_{n-1}\geq a_n\geq 2a_{n-1}$，$a_2=f(2)-f(1)=1$，

所以$a_n\geq 2a_{n-1}\geq 4a_{n-2}\geq\cdots\geq 2^{n-2}a_2=2^{n-2}$，$a_n\leq 3a_{n-1}\leq 9a_{n-2}\leq\cdots\leq 3^{n-2}a_2=3^{n-2}$，

即$3^{n-2}\geq f(n)-f(n-1)\geq 2^{n-2}$.

累加得到：$f(n)-f(1)\geq 2^{n-2}+2^{n-1}+\cdots+2^0=2^{n-1}-1$，即$f(n)\geq 2^{n-1}$，

同理累加得：$f(n)-f(1)\leq 3^{n-2}+3^{n-1}+\cdots+3^0=\dfrac{3^{n-1}-1}{2}$，即$f(n)\leq\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$，

因此$16\leq f(5)\leq 41$，$f(10)\geq 2^9=512>500$，只有 D 项符合题意.

二、多选题：（本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.）

9	10	11
BC	ABD	BCD

9．BC

A 项：由于$A_1B_1//C_1D_1$，且C_1D_1与平面BC_1M 相交，故A_1B_1与平面BC_1M 不平行，A 项错误；

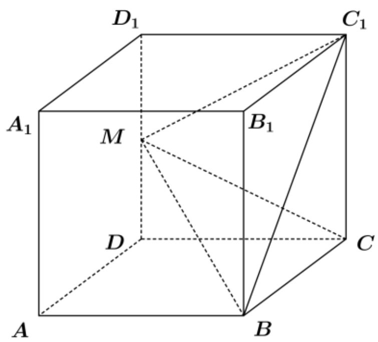
B 项：由于$BC_1//AD_1$，且ΔAD_1B_1为正三角形，故B_1D_1与AD_1所成夹角为$60°$，即B_1D_1与BC_1所成夹角为$60°$，B 项正确；

C 项：由于$BC_1\perp B_1C$，故$BC_1\perp A_1D$，因为$A_1B_1\perp$面BB_1C_1C，所以$A_1B_1\perp BC_1$

因为$A_1D\cap A_1B_1=A_1$，所以$BC_1\perp$面A_1B_1D，所以平面$A_1B_1D\perp$平面BC_1M，C 项正确；

D 项：$V_{C-BC_1M}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta CMC_1}\cdot CB=\dfrac{1}{6}$，D 项错误.

综上，选 BC.



10．ABD

A 项：在ΔABC中，由正弦定理：$\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}$，代入得：$\sin B=\dfrac{3}{2}\sin C$，A 项正确；

B 项：由$B=C+\dfrac{\pi}{2}$，可知：$\dfrac{3}{2}\sin C=\sin\left(C+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos C$，则$\tan C=\dfrac{2}{3}$，B 项正确；

C 项：由前知：$\sin C=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\cos C=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$，

因为$A=\pi-B-C=\frac{\pi}{2}-2C$，所以$\sin A=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2C\right)=\cos 2C=1-2\sin^2 C=\frac{5}{13}$，

则由正弦定理：$BC=\frac{AB}{\sin C}\cdot\sin A=\frac{5}{\sqrt{13}}$，C 项错误；

D 项：因为$\cos A=\frac{12}{13}$，所以$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}=\frac{1}{\sqrt{26}}$，

则$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot(AB+AC)\times\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot\frac{5}{\sqrt{26}}=\frac{15}{13}$，解得：$AD=\frac{6\sqrt{26}}{13}$，D 项正确.

综上，选 ABD.

11．BCD

A 项：设球在甲乙丙丁手中的概率分别为q_1,q_2,q_3,q_4，当$n=1$时，$q_1=0,q_2=q_3=q_4=\frac{1}{3}$；

当$n=2$时，$q_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{9}$，$q_2=0+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$，$q_3=q_4=\frac{1}{2}(1-q_1-q_2)=\frac{1}{3}$，此时$q_1\neq q_2$，即球在甲乙手中概率不相等，$A$项错误；

B 项：当$n=3$时，$q_1=\frac{1}{9}\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{4}{27}$，$q_2=\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{27}$，B 项正确；

C 项：由题意，球在A队手中时，下一次传球后，球有$\frac{1}{3}$的概率仍在A队手中，球在B队手中时，下一次传球后，球有$\frac{1}{3}$的概率传到A队手中，设传球n次后，球在A队成员手中的概率为r_n，在B队成员手中的概率为$1-r_n$。则由全概率公式可知$r_n=\frac{1}{3}r_{n-1}+\frac{1}{3}(1-r_{n-1})=\frac{1}{3}$，为定值，C 项正确；

D 项：传球n次后，球在乙手中的概率为p_n，由前知，球在甲手中的概率为$\frac{1}{3}-p_n$，球在B队手中的概率始终为$\frac{2}{3}$；由题意，球在B队手中时，下一次传球后，球有$\frac{1}{6}$的概率传到乙手中。

由全概率公式可知：$p_n=0\times p_{n-1}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}-p_{n-1}\right)+\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{9}-\frac{1}{3}p_{n-1}$，即$p_n-\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}\left(p_{n-1}-\frac{1}{6}\right)$，

由前得，$p_1=\frac{1}{3}$，则$\left\{p_n-\frac{1}{6}\right\}$是以$\frac{1}{6}$为首项，$-\frac{1}{3}$为公比的等比数列，解得：$p_n=\frac{1}{6}\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)(n\geq 2)$，D 项正确.

综上，选 BCD.

三、填空题：（本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.）

12．1　　13．21　　14．$\frac{\sqrt{17}}{3}$

12．1

由题意：$a=\log_2 3$，$b=\log_3 2$，则$ab=\log_2 3\cdot\log_3 2=1$.

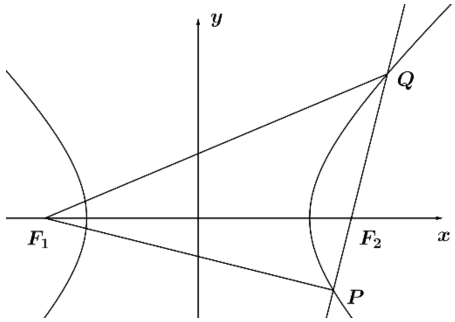
13．21

由题意，总共能构成的5位数的个数为$A_4^4=24$，

考虑重复的情况，此时1与2相邻，且1排在2前，这样的5位数相当于将12,12,3三个数进行排列得到，共有$C_3^1=3$个，

因此共能组成不同的5位数的个数为$24-3=21$个.

14．$\frac{\sqrt{17}}{3}$



由题意，$S_{\Delta QF_1F_2}:S_{\Delta PF_1F_2}=QF_2:PF_2=2:1$，

故可设$PF_2=x$，则$QF_2=2x$，

所以$PF_1=x+2$，$QF_1=2x+2$，$PQ=3x$，

因为ΔF_1PQ为直角三角形,

所以$PF_1^2+PQ^2=F_1Q^2$，即$(2x+2)^2=(3x)^2+(x+2)^2$，

解得：$x=\frac{2}{3}$，

则$F_1F_2=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{17}}{3}$，

则$e=\frac{\sqrt{17}}{3}$.

四、解答题：（本题共5小题，共77分.）

15．答案：

（1）$\because$每组小矩形的面积之和为1，

$\therefore(0.005+0.010+0.020+a+0.025+0.010)\times10=1$，

$\therefore a=0.030.$　　（2分）

成绩落在$[40,70)$内的频率为$(0.005+0.010+0.020)\times10=0.35<0.5$，

成绩落在$[40,80)$内的频率为$(0.005+0.010+0.020+0.030)\times10=0.65>0.5$，

$\therefore$中位数落在$[70,80)$内，　　（4分）

设中位数为m，则$0.35+(m-70)\times0.030=0.5$，

解得$m=75$，

即中位数为75.　（6分）

（2）由分层抽样可知，成绩在$[80,90)$的人数为$7\times\frac{0.025}{0.025+0.01}=5$人，成绩在$[90,100]$的人数为2人，　（8分）

故X的可能取值为$0,1,2$，　　（9分）

且$P(X=0)=\frac{C_2^0C_5^3}{C_7^3}=\frac{2}{7}$，$P(X=1)=\frac{C_2^1C_5^2}{C_7^3}=\frac{4}{7}$，$P(X=2)=\frac{C_2^2C_5^1}{C_7^3}=\frac{1}{7}$　（11分）

X	0	1	2
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

故$E(X)=0\cdot\frac{2}{7}+1\cdot\frac{4}{7}+2\cdot\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$.　（13分）

16．答案：

（1）作 $PO\perp AB$ 于 O，连接 DO，

因为面 $PAB\perp$ 面 $ABCD$， AB 为面 PAB 和面 $ABCD$ 的交线，所以 $PO\perp$ 面 $ABCD$．（2 分）

由题意，$ABCD$ 为直角梯形，所以易求得 $S_{ABCD}=2\sqrt{3}+1$．

因为 $V_{P-ABCD}=\dfrac{2\sqrt{3}+1}{3}=\dfrac{1}{3}\cdot PO\cdot S_{ABCD}$，解得：$PO=1$，（4 分）

由 $PB=2$，可知 $BO=\sqrt{PB^2-PO^2}=\sqrt{3}=CD$，

因为 $BO//CD$，所以四边形 $BODC$ 为平行四边形，$BC//DO$，即 $DO\perp AB$，（5 分）

由于 $PO\perp AB$， $DO\perp AB$， $PO\cap DO=O$，所以 $AB\perp$ 面 POD．（6 分）

因为 $PD\subset$ 面 POD，所以 $AB\perp PD$．（7 分）

（2）设平面 PAB 与平面 PDC 所成角为 θ，

法一：如图，以 O 为原点建立空间直角坐标系，

由（1）可知：$P(0,0,1)$，$D(2,0,0)$，$C\left(2,\sqrt{3},0\right)$，（9 分）

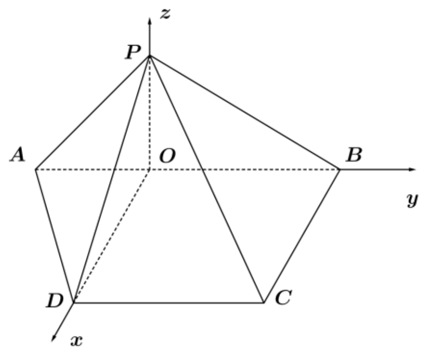
易知，$\overrightarrow{n_1}=(1,0,0)$ 是面 PAB 的法向量，（10 分）

设 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$ 是面 PDC 的法向量，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2y=0\\ 2x-z=0\end{cases}$，取 $x=1$，得到 $\overrightarrow{n_2}=(1,0,2)$，（12 分）

则 $\cos\theta=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}\cdot 1}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，（14 分）

所以平面 PAB 与平面 PDC 所成角 θ 的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$．（15 分）



法二：过 P 作直线 $l//CD$，则 $l\subset$ 面 PCD．（8 分）

因为 $AB//CD//l$，所以 $l\subset$ 面 PAB，

故 l 是面 PCD 和面 PAB 的交线．（10 分）

因为 $PD\perp AB$，即 $PD\perp l$；$PO\perp AB$，即 $PO\perp l$，

所以 $\angle DPO$ 即为所求夹角 θ．（12 分）

因为 $\angle POD=90^\circ$，$PO=1,DO=BC=2$，

所以 $\sin\theta=\sin\angle DPO=\dfrac{OD}{PD}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$．（15 分）

17．答案：

（1）$n\ge 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\left(n\ge 2\right)$，化简得：$a_n=\frac{1}{n^2+n}\left(n\ge 2\right)$，（2 分）

经检验得，$n=1$时也满足，（3 分）

故$a_n=\frac{1}{n^2+n}$．（4 分）

（注：答案对但未检验，扣 1 分）

（2）（i）由题意：$\tan\beta_n=\frac{1}{n}$，

则$\tan\beta_2=\frac{1}{2}$，$\tan\beta_3=\frac{1}{3}$，（6 分）

所以$\tan\left(\beta_2+\beta_3\right)=\frac{\tan\beta_2+\tan\beta_3}{1-\tan\beta_2\cdot\tan\beta_3}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1$，（8 分）

即$\tan\left(\beta_2+\beta_3\right)=1$．（9 分）

（ii）由题意可知：$A_n\left(n^2+n+1,1\right)$，

则$\tan\alpha_n=\frac{1}{n^2+n+1}$，$\tan\beta_n=\frac{1}{n}$，（11 分）

先证明以下结论：$\alpha_n=\beta_n-\beta_{n+1}$．

因为$\tan\left(\beta_n-\beta_{n+1}\right)=\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n^2+n+1}=\tan\alpha_n$，（13 分）

且$\beta_n-\beta_{n+1}\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，$\alpha_n\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，

所以$\beta_n-\beta_{n+1}=\alpha_n$，（14 分）

故$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\beta_{n+1}=\left(\beta_1-\beta_2\right)+\left(\beta_2-\beta_3\right)+\cdots+\left(\beta_n-\beta_{n+1}\right)+\beta_{n+1}=\beta_1$．（15 分）

因为$\tan\beta_1=1$，则$\beta_1=\frac{\pi}{4}$，原式得证.

18．答案：

（1）当l与x轴垂直时，$\left|y_A\right|=\left|y_B\right|=2\sqrt{p}$，

则$AB=4\sqrt{p}=4\sqrt{2}$，（2 分）

解得：$p=2$，即$C:y^2=4x$．（4 分）

（2）（i）由l与抛物线交于A,B两点，可设$l:x=my+2$，$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，

联立方程组：$\begin{cases}y^2=4x\\x=my+2\end{cases}$，得到：$y^2-4my-8=0$，

由韦达定理：$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-8$，（6 分）

则$x_1+x_2=\frac{y_1^2}{4}+\frac{y_2^2}{4}=\frac{\left(y_1+y_2\right)^2-2y_1y_2}{4}=4m^2+4$，$x_1x_2=\frac{\left(y_1y_2\right)^2}{16}=4$，

法一：因为 $\cos\angle AOB=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}=$

$\dfrac{-4}{\sqrt{x_1^2+4x_1}\cdot\sqrt{x_2^2+4x_2}}=\dfrac{-4}{\sqrt{x_1x_2\left[x_1x_2+4\left(x_1+x_2\right)+16\right]}}$，

（8 分）

代入可知：$\cos\angle AOB=\dfrac{-1}{\sqrt{9+4m^2}}=-\dfrac{\sqrt{13}}{13}$，解得：$m=\pm1$，

即 $l:x=y+2$ 或 $l:x=-y+2$.　　　　（10 分）

法二：因为 $\cos\angle AOB=-\dfrac{\sqrt{13}}{13}$，所以 $\tan\angle AOB=-2\sqrt{3}$.

因为 $\tan\angle AOx=\left|\dfrac{y_1}{x_1}\right|=\left|\dfrac{4}{y_1}\right|$，$\tan\angle BOx=\left|\dfrac{4}{y_2}\right|$，

所以 $\tan\angle AOB=\tan\left(\angle AOx+\angle BOx\right)=\dfrac{\tan\angle AOx+\tan\angle BOx}{1-\tan\angle AOx\cdot\tan\angle BOx}=\dfrac{\left|\dfrac{4}{y_1}\right|+\left|\dfrac{4}{y_2}\right|}{1-\left|\dfrac{16}{y_1y_2}\right|}=$

$\dfrac{4\left|y_2-y_1\right|}{\left|y_1y_2\right|-16}=-\dfrac{\left|y_2-y_1\right|}{2}=-2\sqrt{3}$，即 $\left|y_2-y_1\right|=4\sqrt{3}$.（8 分）

由 $\left(y_2+y_1\right)^2-\left(y_2-y_1\right)^2=4y_1y_2$，得 $16m^2-48=-32$，解得：$m=\pm1$，

即 $l:x=y+2$ 或 $l:x=-y+2$.　　　　（10 分）

（ii）法一：由对称性，不妨取 $l:x=y+2$，

由于 $A\left(\dfrac{y_1^2}{4},y_1\right)$，故 $OA:y=\dfrac{4}{y_1}x$，

因为 $PE\perp OA$，所以 $PE:y=-\dfrac{y_1}{4}(x-a)$，联立解得：$E\left(\dfrac{ay_1^2}{y_1^2+16},\dfrac{4ay_1}{y_1^2+16}\right)$，（11 分）

同理有：$F\left(\dfrac{ay_2^2}{y_2^2+16},\dfrac{4ay_2}{y_2^2+16}\right)$，

所以 $k_{EF}=\dfrac{y_E-y_F}{x_E-x_F}=\dfrac{\dfrac{4ay_1}{y_1^2+16}-\dfrac{4ay_2}{y_2^2+16}}{\dfrac{ay_1^2}{y_1^2+16}-\dfrac{ay_2^2}{y_2^2+16}}=\dfrac{4y_1y_2(y_2-y)+64(y_1-y_2)}{16(y_1^2-y_2^2)}=\dfrac{64-4y_1y_2}{16(y_1+y_2)}$，

由（2）得：$y_1+y_2=4$，$y_1y_2=-8$，

代入可知：$k_{EF}=\dfrac{3}{2}$，　　　　（13 分）

故 $EF:y=\dfrac{3}{2}\left(x-\dfrac{ay_1^2}{y_1^2+16}\right)+\dfrac{4ay_1}{y_1^2+16}$，

由于 $y_1^2-4y_1-8=0$，故 $4y_1=y_1^2-8$，

则 $\dfrac{4ay_1}{y_1^2+16}-\dfrac{3ay_1^2}{2(y_1^2+16)}=\dfrac{a(8y_1-3y_1^2)}{2(y_1^2+16)}=\dfrac{-a(y_1^2+16)}{2(y_1^2+16)}=-\dfrac{a}{2}$，

即 $EF: y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{a}{2}$，（15 分）

因为 $k_{PG}=-1$，所以 $PG: y=-(x-a)$，联立解得：$G\left(\dfrac{a+2}{2},\dfrac{a-2}{2}\right)$，

因为 E,F,G 三点共线，所以 G 在直线 EF 上，代入得：$\dfrac{a-2}{2}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{a+2}{2}-\dfrac{a}{2}$，解得：$a=10$，

故 P 的坐标为 $(10,0)$．（17 分）

法二：由对称性，不妨取 $l: x=y+2$，设 A 在第一象限，

联立方程：$\begin{cases}y^2=4x\\ y=x-2\end{cases}$，解得：$y_1=2+2\sqrt{3}$，$y_2=2-2\sqrt{3}$，

则：$A\left(4+2\sqrt{3},2+2\sqrt{3}\right)$，$B\left(4-2\sqrt{3},2-2\sqrt{3}\right)$，（11 分）

故 $OA: y=(\sqrt{3}-1)x$，

因为 $PE\perp OA$，所以 $PE: y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}(x-a)$，

联立方程：$\begin{cases}y=(\sqrt{3}-1)x\\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}(x-a)\end{cases}$，解得：$E\left(\dfrac{5+2\sqrt{3}}{13}a,\dfrac{1+3\sqrt{3}}{13}a\right)$，（13 分）

同理有：$F\left(\dfrac{5-2\sqrt{3}}{13}a,\dfrac{1-3\sqrt{3}}{13}a\right)$，

可知 $k_{EF}=\dfrac{y_E-y_F}{x_E-x_F}=\dfrac{3}{2}$，（14 分）

因为 $k_{PG}=-1$，所以 $PG: y=-(x-a)$，联立解得：$G\left(\dfrac{a+2}{2},\dfrac{a-2}{2}\right)$，

则：$k_{EG}=\dfrac{y_E-y_G}{x_E-x_G}=\dfrac{(6\sqrt{3}-11)a+26}{(4\sqrt{3}-3)a-26}$，（15 分）

因为 E,F,G 三点共线，所以 $k_{EG}=k_{EF}$，代入解得：$a=10$，

故 P 的坐标为 $(10,0)$．（17 分）

19．答案：

（1）$a=0$ 时，$g(x)=2\ln(x+1)-3x$，$g'(x)=\dfrac{2}{x+1}-3$，（1 分）

所以 $g'(1)=-2$，由于 $g(1)=2\ln 2-3$，（2 分）

所以 $g(x)$ 在 $\left(1,g(1)\right)$ 处的切线 l 的方程为 $y=-2(x-1)+2\ln 2-3$，

化简得：$l: y=-2x+2\ln 2-1$．（4 分）

（2）$f'(x)=\ln(x+a)+\dfrac{x}{x+a}-2+\dfrac{2}{x+1}$，若 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极值点，则有 $f'(0)=0$，

代入得：$\ln a=0$，即 $a=1$．（6 分）

当 $a\neq 1$ 时，$x=0$ 不是函数 $f(x)$ 的极值点；

当 $a=1$ 时，$f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}-2+\dfrac{2}{x+1}=\ln(x+1)-1+\dfrac{1}{x+1}$，

令 $F(x)=\ln(x+1)-1+\dfrac{1}{x+1}$，则 $F'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{x}{(x+1)^2}$，则 $F(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

则 $F(x)\geq F(0)=0$，即 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，不合题意．（8 分）

综上：$x=0$ 不是函数 $f(x)$ 的极值点．（9 分）

（3）由题意：$x\ln(x+a)-2\ln(x+a+1)>-x-2\ln(x+1)+k(x-2)$，

上式对任意 $a\in[0,2]$ 恒成立，以 a 为主元，令 $h(a)=x\ln(x+a)-2\ln(x+a+1)$，则只需 $h(a)_{\min}>-x-2\ln(x+1)+k(x-2)$，（10 分）

因为 $h'(a)=\dfrac{x}{x+a}-\dfrac{2}{x+a+1}=\dfrac{x^2-x+(x-2)a}{(x+a)(x+a+1)}>0$，所以 $h(a)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增，

则 $h(a)_{\min}=h(0)=x\ln x-2\ln(x+1)$，故 $x\ln x-2\ln(x+1)>-x-2\ln(x+1)+k(x-2)$，

即 $x\ln x+x>k(x-2)$ 对任意 $x\in(2,+\infty)$ 恒成立．（12 分）

法一：设 $\varphi(x)=x\ln x+x-k(x-2)$ $\left(x\in(2,+\infty)\right)$，$\varphi'(x)=\ln x+2-k$，

当 $k\leq 2+\ln 2$ 时，$\varphi'(x)>0$ 恒成立，故 $\varphi(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $\varphi(x)>\varphi(2)=2\ln 2+2>0$，成立，（13 分）

当 $k>2+\ln 2$ 时，$\varphi(x)$ 在 $\left(2,e^{k-2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(e^{k-2},+\infty\right)$ 上单调递增，

故只需 $\varphi(e^{k-2})>0$，即 $2k-e^{k-2}>0$，

令 $H(k)=2k-e^{k-2}$，$H'(k)=2-e^{k-2}<2-e^{\ln 2}=0$，所以 $H(k)$ 在 $(2+\ln 2,+\infty)$ 上单调递减，

由于 $e^2<8$，$e^3>10$，故 $H(4)=8-e^2>0$，$H(5)=10-e^3<0$，（15 分）

则自然数 k 最大可取到 4．

综上：$k_{\max}=4$．（17 分）

法二：由题意得：$k<\dfrac{x\ln x+x}{x-2}$，

设 $\varphi(x)=\dfrac{x\ln x+x}{x-2}$，$\varphi'(x)=\dfrac{x-2\ln x-4}{(x-2)^2}$，

令 $H(x)=x-2\ln x-4$，$H'(x)=1-\dfrac{2}{x}>0$，故 $H(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

由于 $e^2<8$，$e^3>10$，故 $H(8)=4-2\ln 8=2(2-\ln 8)<0$，$H(10)=6-2\ln 10=2(3-\ln 10)>0$，

所以 $\exists x_0\in(8,10)$，使得 $\varphi(x)$ 在 $(2,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，且 x_0 满足 $x_0-2\ln x_0-4=0$，（14 分）

故 $k<\varphi(x_0)=\dfrac{x_0\ln x_0+x_0}{x_0-2}=\dfrac{\dfrac{x_0(x_0-4)}{2}+x_0}{x_0-2}=\dfrac{x_0}{2}$，（15 分）

而 $\dfrac{x_0}{2}\in(4,5)$，因此自然数 k 最大可取到 4．（17 分）

法三：由题意得：$k<\dfrac{x\ln x+x}{x-2}$，

取 $x=e^2$，则 $k<\dfrac{e^2\ln e^2+e^2}{e^2-2}=3+\dfrac{6}{e^2-2}$，

由于 $5 < e^2 < 8$，所以 $3+\dfrac{6}{e^2-2}\in(4,5)$，故 $k\le 4$，（13 分）

下面说明 $k=4$ 时原不等式恒成立，代入原不等式，即证：$\ln x-3+\dfrac{8}{x}>0$ 对任意 $x\in(2,+\infty)$ 恒成立

设 $\varphi(x)=\ln x-3+\dfrac{8}{x}$，$\varphi'(x)=\dfrac{x-8}{x^2}$，故 $\varphi(x)$ 在 $(2,8)$ 上单调递减，在 $(8,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $\varphi(x)>\varphi(8)=\ln 8-2>0$，即 $k=4$ 成立，（15 分）

因此，自然数 k 最大可取到 4．（17 分）