

2025 年高考模拟考试

数学试题

本试卷共 4 页，19 小题，满分 150 分.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的. 请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

1. 设集合 $A = \{x | x^2 - 5x + 6 < 0\}$ ，集合 $B = \{x | \log_2(x-1) \leq 1\}$ ，则 $A \cap B = (\quad)$

- A. $(1, 3)$ B. $[2, 3)$ C. $(2, 3)$ D. $[1, 3)$

2. 若复数 $Z = \frac{2+i}{1-3i}$ ，则 $|Z| =$

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. 2

3. 已知 $\vec{a} = (1, 2)$ 和 $\vec{b} = (m, 1)$ ，若 $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$ ，则 $m = (\quad)$

- A. 3 B. 2 C. -1 D. -3

4. 中国空间站开展“天宫课堂”实验，需将 3 项不同实验分配给 2 名航天员，每名航天员至少承担 1 项，则分配方式共有 (\quad)

- A. 6 种 B. 8 种 C. 12 种 D. 24 种

5. 某航天器轨道近地点距离地球 300 公里，远地点距离 800 公里，若将其轨道近似视为椭圆，则离心率为 (\quad)

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{5}{11}$ D. $\frac{3}{5}$

6. 若 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = 7$ ，则 $\cos 2\alpha$ 的值为

- A. $\frac{7}{25}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{12}{25}$ D. $\frac{4}{5}$

7. 正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=3$ ， $A_1B_1=3$ ，若异面直线 AA_1 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ，则正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 (\quad)

- A. $\frac{13\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{13}{3}$ C. $\frac{26\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{26}{3}$

8. 已知函数 $f(x) = xe^{-x}$ ， $g(x) = \ln x - x + b$ ($b \in \mathbb{R}$)，若 $f(x) \geq g(x)$ 在 $x > 0$ 恒成立，则 b 的取值范围为.

- A. $(-\infty, \frac{1}{e} + 1)$ B. $(-\infty, \frac{1}{e}]$ C. $(-\infty, \frac{1}{e})$ D. $(-\infty, \frac{1}{e} + 1]$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，

有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分, 部分选对的得部分分, 选对但不全的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知 $(x - \frac{3}{x})^n$ 的展开式中各项系数的和为 64, 则

- A. $n = 6$
- B. 展开式中常数项为 540
- C. 展开式中含 x^2 项的系数为 315
- D. 展开式中各项系数的绝对值的和为 4096

10. 某新能源汽车公司研发的电池容量衰减模型为 $C(t) = C_0 e^{-kt}$, 其中 C_0 为初始容量, t 为使用年限, $k > 0$. 实验测得 2 年后容量衰减至 80%. 下列说法正确的是 ()

- A. 衰减常数 $k = \ln\sqrt{5}$
- B. 10 年后电池容量不足初始的 30%
- C. 容量衰减速率随时间增加而减小
- D. 若要使容量保持 50% 以上, 需在 $t < \frac{\ln 2}{k}$ 年内更换电池

11. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F , 准线为 l , A, B 为 C 上的两个动点, 则

- A. 当 $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$ 时, 直线 AB 的斜率为 $\sqrt{3}$
- B. 记 l 与 x 轴交于点 P , 存在 A, B , 使得 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} < 0$
- C. 若 M 为圆 $K: (x-8)^2 + (y-4)^2 = 1$ 上任意一点, 则 $|AF| + |AM|$ 的最小值为 9
- D. 若以线段 AB 为直径的圆与 l 相切, 则 A, F, B 三点共线

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 已知函数 $f(x) = e^x - ax$ 与 $g(x) = \ln(x+1) + 1$ 的图像在点 $(0, 1)$ 处有公切线, 则实数 $a =$ _____

13. 若圆 $M: (x-1)^2 + (y-m)^2 = 25$ 被直线 $3x - 4y - 7 = 0$ 所截得的弦长为 10, 过点 $P(-7, 5)$ 作圆 M 的切线, 其中一个切点为 A , 则 $|PA|$ 的值为 _____

14. 甲、乙、丙三人进行羽毛球比赛, 每轮比赛甲胜乙的概率为 $\frac{2}{3}$, 乙胜丙的概率为 $\frac{3}{4}$, 丙胜甲的概率为 $\frac{1}{2}$. 比赛采用“擂台赛”制: 首轮甲、乙先赛, 胜者与丙比赛, 此后每轮由上一轮胜者迎战未参赛者, 某人累计两胜则获得冠军. 则甲最终夺冠

的概率为_____

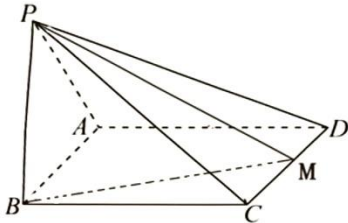
四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $2a \cos B = c \cos B + b \cos C$ ，且 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$ 。

- (1) 求角 B；
- (2) 若 $a + c = 7$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长

16. 如图，四棱锥 P-ABCD 中，四边形 ABCD 是正方形， $AB=PD=4, PA=2\sqrt{2}$ ， $PA \perp PB$ ，点 M 是棱 CD 的中点。

- (1) 证明： $PM \perp AB$ ；
- (2) 求直线 PC 与平面 PBM 所成角的余弦值。



17. 某工厂生产两种型号的零件，A 型合格率为 0.9，B 型合格率为 0.8。质检方案如下：每批随机抽取 3 个 A 型和 2 个 B 型零件，若 A 型合格数 ≥ 2 ，且 B 型合格数 ≥ 1 ，则该批通过验收。（ $0.972 \times 0.96 = 0.93312$ ， $0.93312^5 = 0.707$ ）

- (1) 求单批通过验收的概率；

(2) 假设各批验收结果相互独立, 求在 5 批生产中至少有一批未通过验收的概率 (结果保留 3 位小数)

18. 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2 - bx$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 且 $f(1) = 0$, 求 a 和 b 的值;

(2) 若 $a = 1, b = 0$. 证明: 当 $x > 0$ 时, $f(x) > \ln(x+1)$

19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左右焦点分别为 $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$, P 是圆 $x^2 + y^2 - 4x - 32 = 0$ 上一点, 线段 PF_2 与 C 交于点 Q , 且 $|PQ| = |F_1Q|$.

(1) 求曲线 C 的标准方程;

(2) 过点 F_2 的直线与 C 交于 A, B 两点, 记 O 为坐标原点, 线段 AB 的中点为 N , C 的左顶点为 D .

① 求 $\triangle ODN$ 面积的最大值;

② 若 $\triangle ABD$ 的外心为 M , 直线 OM 的斜率为 k_1 , 直线 ON 的斜率为 k_2 , 试判断 $\frac{k_1}{k_2}$ 是否为定值. 若是, 求出该定值; 若不是, 请说明理由.