

宁波市 2024 学年高三第二学期高考模拟考试

数 学

注意事项:

- 答卷前, 考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、准考证号填写在答题卷上。将条形码横贴在答题卷右上角“贴条形码区”。
- 作答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卷上对应题目选项的答案标号涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案, 答案不能答在试题卷上。
- 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卷各题目指定区域内相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新的答案; 不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
- 考生必须保持答题卷的整洁, 不要折叠、不要弄破。

选择题部分(共 58 分)

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

- 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - x - 2 > 0\}$, 则 $\complement_{\mathbb{Z}} A =$
A. $\{-1, 0, 1, 2\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{-1, 0\}$
- 下列四个函数中, 以 π 为最小正周期, 且在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递减的是
A. $y = \cos x$ B. $y = |\sin x|$ C. $y = \tan x$ D. $y = \sin \frac{x}{2}$
- 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2$, $\vec{a} \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 9$, 则 $\vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) =$
A. 3 B. 4 C. 6 D. 7
- 设 $z = \frac{1+i}{1-i} - 2i$, 则 $|z| =$
A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{2}$
- 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 1$, 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $2S_n = na_n$, 则 a_{2025} 的值为
A. 2023 B. 2024 C. 2025 D. 2026
- 已知点 $M(a, 0)$, $N(2, 3)$ 到同一直线的距离分别为 2, 3, 若这样的直线恰有 2 条, 则 a 的取值范围为
A. $(-2, 0)$ B. $(-2, 6)$ C. $(0, 6)$ D. $(2, 6)$
- 一个长方体墨水瓶的长、宽、高分别为 10cm、8cm、15cm, 内部装有 400 毫升墨水。将墨水瓶倾斜, 使其一条长边 (10cm) 置于水平地面, 高边 (15cm) 所在直线与水平地面成 45° 角, 则此时墨水与墨水瓶接触部分的面积为
A. 180 B. 220 C. 260 D. 300

8. 已知函数 $f(x) = (x-a)(x-b)^2$ ，其中 $a < b$ ，5 为 $f(x)$ 的极小值点. 若 $f(x)$ 在 $(a, a+3)$ 内有最大值，则 a 的取值范围是

- A. $(-4, 5)$ B. $(-4, 5]$ C. $\left(-4, \frac{11}{4}\right)$ D. $\left(-4, \frac{11}{4}\right]$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 下面说法正确的是

- A. 若数据 $2x_1, 2x_2, \dots, 2x_{16}$ 的方差为 8，则数据 $x_1, x_2, \dots, x_{16}$ 的方差为 4
 B. 若 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是等差数列，则这些数的中位数与平均数相等
 C. 已知 X 是随机变量，则 $E(X^2) \geq E^2(X)$
 D. 若两个具有线性相关关系的变量的相关性越强，则线性相关系数 r 的值越接近于 1

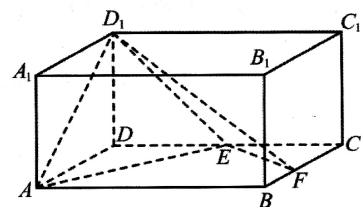
10. 国家知识产权局信息显示，华为技术有限公司申请一项名为“三进制逻辑门电路、计算电路、芯片及其电子设备”的专利，该项专利可以实现大幅度减少二进制逻辑电路的晶体管数量，降低电路的功耗，提高计算效率. 该专利蕴含的数学背景是一种以 3 为基数，以 $-1, 0, 1$ 为基本数码的计数体系（对称三进制）：三进制数 $(a_k a_{k-1} \dots a_0 \cdot b_1 b_2 \dots b_t)_3$ 对应的十进制数为 $a_k \cdot 3^k + a_{k-1} \cdot 3^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 3^1 + a_0 \cdot 3^0 + b_1 \cdot 3^{-1} + b_2 \cdot 3^{-2} + \dots + b_t \cdot 3^{-t}$ ，其中 $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, b_1, b_2, \dots, b_t \in \{-1, 0, 1\}$ ， $a_k \in \{-1, 1\}$ ，为了记号的方便，我们用 F 表示数码 -1 ，比如 $(11)_3 = 1 \times 3^1 + 1 \times 3^0 = 4$ ， $(1.F)_3 = 1 \times 3^0 + (-1) \times 3^{-1} = \frac{2}{3}$ ， $(FFF)_3 = (-1) \times 3^2 + (-1) \times 3^1 + (-1) \times 3^0 = -13$. 下面选项正确的是

- A. $(10F1)_3 = 25$
 B. $(101010)_3 - (10101)_3 = (F0F0F)_3$
 C. 若 $n = (0.b_1 b_2 \dots b_m)_3$ ， $b_i \in \{F, 0, 1\}$ ， $i = 1, 2, \dots, m, m \in \mathbf{N}^*$ ，则 $|n| < \frac{1}{2}$
 D. 存在唯一的 $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 \in \{0, 1\}$ ，使得 $(1a_4 a_3 a_2 a_1)_3 - (1b_4 b_3 b_2 b_1)_3 = 20$ 成立

11. 如图，在平行六面体 $ABCD - A_1 B_1 C_1 D_1$ 中， $AB = 2$ ， $AD_1 = \sqrt{2}$ ，

$BC = CC_1 = 1$ ， $CC_1 \perp CD$ ， $\angle ADC = 120^\circ$ ， E 为 CD 中点， F 在线段 BC 上（包含端点），则下列说法正确的是

- A. 存在点 F ，使得 $A_1 F \parallel$ 平面 $AD_1 E$
 B. 存在点 F ，使得平面 $AD_1 E \perp$ 平面 $D_1 E F$
 C. 不存在点 F ，使得 $|D_1 F| + |EF| = \sqrt{10}$
 D. 不存在点 F ，使得四棱锥 $F - CDD_1 C_1$ 有内切球



非选择题部分(共 92 分)

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项为 ▲ .

13. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A = 8 \sin B \sin C$, $\cos A = 8 \cos B \cos C$, 则 $\tan A =$ ▲ .

14. 关于 x 的方程 $e^x + b^x = 2$ ($b > 0$ 且 $b \neq 1$) 有唯一实数解, 其中 e 为自然对数的底数, 则实数 b 的取值范围是 ▲ .

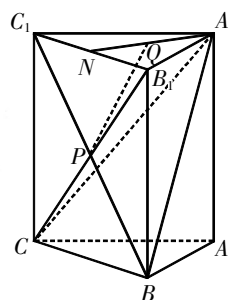
四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分) 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 2$,

$AA_1 = 2\sqrt{2}$. N 是 B_1C_1 的中点, P 是 BC_1 与 B_1C 的交点.

(1) 若 Q 是 A_1N 的中点, 证明: $PQ \parallel$ 平面 A_1BC ;

(2) 求 A_1P 与平面 A_1BC 所成角的正弦值.



16. (15 分) 在 $1, 2, 3, \dots, 7$ 这 7 个自然数中, 任取 3 个数.

(1) 求这 3 个数中恰有 1 个是偶数的概率;

(2) 设 X 为这 3 个数中两数相邻的组数 (例如: 若取出的数为 1, 2, 3, 则有两组相邻的数 1, 2 和 2, 3, 此时 X 的值是 2). 求随机变量 X 的分布列及其数学期望 $E(X)$.

17. (15 分) 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) + ax^2 - x$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 当 $a = 1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

(3) 求证: 当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $1 + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{3^2} + \dots + \frac{2n-1}{n^2} < 2\ln(n+1)$.

18. (17分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{m+2} + y^2 = 1 (m > 0)$, 点 $P(0, -1)$ 到椭圆 E 上点的距离的最大值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 若过定点 $(0, 2)$ 的直线 l 交椭圆 E 于点 A, B , 设点 $Q\left(0, \frac{1}{2}\right)$, 直线 AP 与直线 BQ 交于直线 $y = \frac{5}{4}$ 上一点, 求直线 AB 的方程.

19. (17分) 设 n 维向量 $\vec{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{b} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, 定义运算: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$.

(1) 当 $n=2$ 时, 若 $\vec{c} = (y_2, y_1)$ 且 $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$, 试比较 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 与 $\vec{a} \cdot \vec{c}$ 的大小;

(2) 已知 $n \in \mathbb{N}^+$, 记 $M(n) = \{\vec{a} \cdot \vec{b} \mid \vec{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{b} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ 且 } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ 和 } y_1, y_2, \dots, y_n \text{ 均为 } 1, 2, \dots, n \text{ 的某一排列}\}$.

(i) 求 $M(3)$, $M(4)$;

(ii) 若 $n \geq 4$, 求 $M(n)$. (提示: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.)