浙江省 Z20 联盟（名校新高考研究联盟）2021 届高三第三次联考

数学参考答案

一、选择题

1-5：DAACD　　6-10：BBAAC

二、填空题

11．$-20,\ -1$　　12．$60°,\sqrt{13}$　　13．$3,\ 1683$　　14．2

15．$\frac{3}{10},\frac{33}{5}$　　16．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　17．$\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{2}}{6}\right]$

三、解答题

18．解：

（1）$\because f(x)=\frac{3}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{6})$ ....4 分

$\therefore$ 对称中心为 $(k\pi-\frac{\pi}{6},0)(k\in Z)$ ....6 分

（2）$g(x)=\sqrt{3}\sin(x+\varphi+\frac{\pi}{6})$ ....8 分

$\because \varphi\in(0,\frac{\pi}{2}),\tan\varphi=\frac{3}{4},\therefore \sin\varphi=\frac{3}{5},\cos\varphi=\frac{4}{5},\varphi\in(0,\frac{\pi}{4})$ ....10 分

$\because x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$\therefore x+\varphi+\frac{\pi}{6}\in[\varphi+\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}+\varphi]$

当 $\therefore x+\varphi+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 时，$g_{\max}(x)=\sqrt{3}$，

当 $\therefore x+\varphi+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}+\varphi$ 时，$g_{\min}(x)=\sqrt{3}\sin(\frac{2\pi}{3}+\varphi)=\frac{12-3\sqrt{3}}{10}$．

$\therefore g(x)\in\left[\frac{12-3\sqrt{3}}{10},\sqrt{3}\right]$ ....14 分

19．解

（1）证明：取 MD 中点 N，连接 PN，QN.

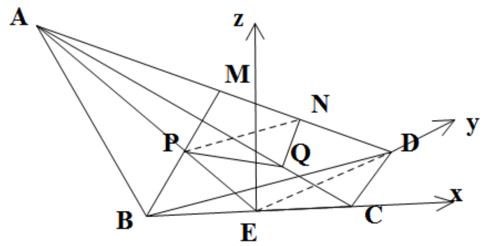
在 ΔMBD 中，PN//BD　..2 分

在 ΔACD 中，$\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{QC}$，$\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{ND}$

$\therefore$ NQ//CD　..4 分

$\therefore$ 平面 PQN//平面 BCD　PQ$\subset$平面 PQN

$\therefore$ PQ//平面 BCD　..6 分



（2）取 BC 中点 E，连接 DE，AE，则

DE$\perp$BC，BC$\perp$AD，AD$\cap$DE=D

$\therefore BC\perp$平面AED　且$\angle AED$为二面角 A-BC-D 的平面角　..8 分

不妨设 CD=1，则 AD=$\frac{3}{2}$， DE=$\frac{\sqrt{3}}{2}$，由余弦定理可得 AE=$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ....9 分

方法一：（定义法）由题意得：面 $ABC\perp$ 面 AED，过点 M 作 $MF\perp AE$，连接 BF

则 $MF\perp$ 面 ABC，所以 $\angle MBF$ 是直线 BM 与面 ABC 所成角................................12 分

由题意得：$AB=AC=1$，所以 $BM=\frac{\sqrt{7}}{4},MF=\frac{1}{2}AM=\frac{3}{8}$，

$\therefore \sin\angle MBF=\frac{MF}{MB}=\frac{3\sqrt{7}}{14}$ ....15 分

方法二：（坐标法）以 E 为原点，建系。B($-\frac{1}{2}$,0,0)，C($\frac{1}{2}$,0,0)，D(0,$\frac{\sqrt{3}}{2}$,0)，A(0,$-\frac{\sqrt{3}}{4}$,$\frac{3}{4}$)

设平面 ABC 的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=x=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{4}y-\frac{3}{4}z=0.\end{cases}\quad \vec{n}=\left(0,\sqrt{3},1\right)$$ ....13 分

设所求角θ则 $\sin\theta=\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{BM}\right\rangle=\frac{3\sqrt{7}}{14}$ ....15 分

20．解

（1）$\because G_n=(a_{n+1}-a_n)+(a_n+a_{n-1})+\cdots(a_2-a_1)+a_1=a_{n+1}-1$ ....2 分

$T_n=\frac{b_{n+1}}{b_n}\cdot\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{b_2}{b_1}=b_{n+1}$ ....4 分

$\because G_n=2T_n-2 \quad \therefore a_{n+1}=2b_{n+1}-1$ ....5 分

$\because S_n=\frac{3^n-1}{2} \quad \therefore b_n=S_n-S_{n-1}=\frac{3^n-1}{2}-\frac{3^{n-1}-1}{2}=3^{n-1}(n\geq 2)$

$\because b_1=1 \quad \therefore b_n=3^{n-1} \quad \therefore a_n=2b_n-1=2\cdot 3^{n-1}-1$ ....7 分

（2）$\because S_n=a_n \quad S_{n-1}=a_{n-1}(n\geq 2)$

$\therefore b_n=a_n-a_{n-1}(n\geq 2) \quad \because a_n=2b_n-1$ ....9 分

$\therefore \frac{a_n+1}{2}=a_n-a_{n-1}(n\geq 2)$

$\therefore a_n=2a_{n-1}+1(n\geq 2) \quad \therefore a_n=2^n-1,b_n=2^{n-1}$ ....11 分

$\because \frac{b_1}{a_1a_2}+\frac{b_2}{a_2a_3}+\cdots+\frac{b_n}{a_na_{n+1}}=\frac{2^0}{(2^1-1)(2^2-1)}+\frac{2^1}{(2^2-1)(2^3-1)}\cdots+\frac{2^{n-1}}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}$

$\therefore \frac{b_1}{a_1a_2}+\frac{b_2}{a_2a_3}+\cdots+\frac{b_n}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{2}\left[(\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^2-1})+(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1})\cdots+(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1})\right]$

$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{n+1}-1})$

.............13 分

$\therefore \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{n+1}-1})>(-1)^n\cdot\lambda\cdot\frac{1}{2^{n+1}-1} \quad \therefore (2^n-1)>(-1)^n\cdot\lambda$

$\therefore (2^n-1) > (-1)^n \cdot \lambda \qquad \therefore -1 < \lambda < 3$ ....15 分

21．解

（1）焦点坐标 $(0,1)$，准线方程 $y=-1$ ....4 分

（2）已知 $x_0^2 = 4y_0$，则点 A 处的切线方程：$y=\dfrac{x_0}{2}x-\dfrac{x_0^2}{4}$，..........................6 分

同（1）得：$\begin{cases} \dfrac{t-\dfrac{x_0^2}{4}}{r-x_0}\cdot\dfrac{x_0}{2}=-1 \\ (x_0-r)^2+(\dfrac{x_0^2}{4}-t)^2=r^2 \end{cases}$，化简得：$t^2+\dfrac{x_0^2}{2}t-\dfrac{3}{16}x_0^4-x_0^2=0$ ....8 分

由 $t>0$ 得：$t=\dfrac{-\dfrac{x_0^2}{2}+\sqrt{x_0^4+4x_0^2}}{2}=-y_0+2\sqrt{y_0^2+y_0}\,(t>0)$ ....10 分

设 $E(x_1,y_1),F(x_2,y_2)$ 则由 $k_1+k_2=0$ 得：$\dfrac{x_1+x_0}{4}+\dfrac{x_2+x_0}{4}=0$，

即 $-2x_0=x_1+x_2$， ....11 分

所以 $k_{EF}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\dfrac{x_0}{2}$，由 $\overrightarrow{OM}=8\overrightarrow{NO}$ 得 $N(0,-\dfrac{t}{8})$

所以，直线 $l: y=-\dfrac{x_0}{2}x-\dfrac{t}{8}$，

则 $d=\dfrac{|\dfrac{x_0^2}{2}+y_0+\dfrac{t}{8}|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{4}+1}}=\dfrac{\dfrac{23y_0}{8}+\dfrac{1}{4}\sqrt{y_0^2+y_0}}{\sqrt{y_0+1}}$ ....13 分

$=\dfrac{23}{8}\sqrt{y_0+1}-\dfrac{\dfrac{23}{8}}{\sqrt{y_0+1}}+\dfrac{1}{4}\sqrt{y_0}$ 关于 y_0 单调递增

所以，当 $y_0=1$ 时，$d_{\min}=\dfrac{23\sqrt{2}+4}{16}$，...15 分

此时，直线 l 与抛物线相交.

22．解：

（1）设 $g(x)=f(2x-1)=\ln(2x-1)-(2x-1)^2+1$，

$\therefore g'(x)=\dfrac{2}{2x-1}-4(2x-1), \therefore g'(1)=-2$，且 $g(1)=0$，

$\therefore$ 切线方程：$y=-2(x-1)$ ....4 分

（3）$\therefore\ f'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax$，

若 $a\le 0$，则 $f'(x)$ 单调，至多一个零点；

若 $a>0$，则 $f'(x)=\dfrac{1-2ax^2}{x}$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{\sqrt{2a}})\uparrow, (\dfrac{1}{\sqrt{2a}},+\infty)\downarrow$

$\therefore f(\frac{1}{\sqrt{2a}})=-\frac{1}{2}\ln(2a)+\frac{1}{2}>0$ $\therefore 0<a<\frac{e}{2}$ ....8 分

由极值点偏移证得 $x_1+x_2>\frac{2}{\sqrt{e}}$ ....11 分

$\therefore x_2{}^2-x_1<x_2^2+x_2-\frac{2}{\sqrt{e}}<x_2^2+x_2-1$

只需证 $x_2^2+x_2<\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}$，即证 $x_2<\frac{1}{a}$，即证 $f(x_2)>f(\frac{1}{a})$

即证 $0>f(\frac{1}{a})$，即证 $\ln\frac{1}{a}<\frac{1}{a}-1$成立. ....15 分