义乌市2021届高三适应性考试
数学试卷参考答案与评分细则

一、选择题(本大题共10小题，每小题4分，共40分.)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	D	B	A	C	D	A	B	A	C

二、填空题(本大题共7小题，多空题每小题6分，单空题每小题4分，共36分.)

11.2,4　　12.4,15　　13. 0.5,1　　14. 1，$2\sqrt{6}+3$

15．$S_n=\begin{cases}-2^{n+1}+2n^2+2n+2,(1\le n\le 4.n\in N^*)\\ 2^{n+1}-2n^2-2n+18,\quad (\mathrm{n}\ge 5,n\in N^*)\end{cases}$　　16.90　　17. $[1,4]$

二、解答题（本大题共5小题，共74分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

18.解：（Ⅰ）由题意可得

$f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{3})+\frac{1}{2}\cos(2x-\frac{2\pi}{3})+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\sin(2x+\frac{\pi}{3})-\cos(2x+\frac{\pi}{3}))+\frac{1}{2}$ ----------------5分

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{12})+\frac{1}{2}$

$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{12}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，解得$-\frac{7\pi}{24}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{24}+k\pi$，$k\in Z$，

所以函数$f(x)$的单调递增区间为$\left[\mathrm{k}\pi-\frac{7\pi}{24},k\pi+\frac{5\pi}{24}\right],k\in Z$ -----------------------7分

（Ⅱ）由题意及（Ⅰ）可知$g(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$s神墙in$(2x+2\varphi)$， --------------------------9分

因为$0\le x\le\frac{\pi}{2}$，$2\varphi\le 2x+2\varphi\le\pi+2\varphi$，

又$\varphi\in(0,\pi)$，且$\tan\varphi=\frac{3}{4}$，所以$\sin\varphi=\frac{3}{5}$，$\cos\varphi=\frac{4}{5}$，$0<\varphi<\frac{\pi}{4}$， --------------------------10分

则$0<2\varphi<\frac{\pi}{2}$，$\pi<\pi+2\varphi<\frac{3\pi}{2}$，

所以 $\sin(\pi+2\varphi)=-\sin 2\varphi=-2\sin\varphi\cos\varphi=-\dfrac{24}{25}$， --------------12 分

所以 $-\dfrac{24}{25}\le\sin(2x+2\varphi)\le 1$，

则 $-\dfrac{12\sqrt{2}}{25}\le g(x)\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 $g(x)$ 在区间 $[0，\dfrac{\pi}{2}]$ 上的取值范围为 $[-\dfrac{12\sqrt{2}}{25}，\dfrac{\sqrt{2}}{2}]$ ------------14 分

19. 解：（Ⅰ）作 $BO\perp AE$ 垂足为 O，根据题意得 $OA=1$，则 $OE=3$，又 $D'E=DE=6$，$\angle OED=\dfrac{\pi}{3}$，在 ΔDEO 中，由余弦定理得 $OD=3\sqrt{3}$ ------------------------2 分

$OD'=OD=3\sqrt{3}$ 又 $(D'E)^2=(OE$神墙$)^2+(OD')^2$

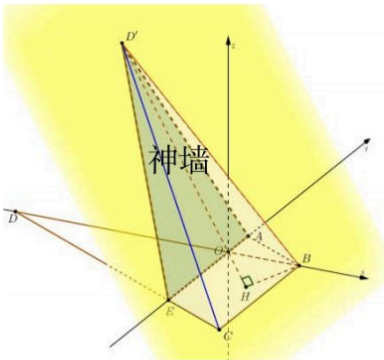
由勾股定理得 $OD'\perp AE$， ---4 分

又 $OB\perp AE$，

则 $AE\perp$ 平面 BOD' ---6 分

又 $BD'\subset$ 平面 BOD' 则 $AE\perp BD'$ --7 分

（Ⅱ）（法一几何法）



$\because BC\,//\,AE\quad\therefore BC\,//$ 平面 $AD'E$

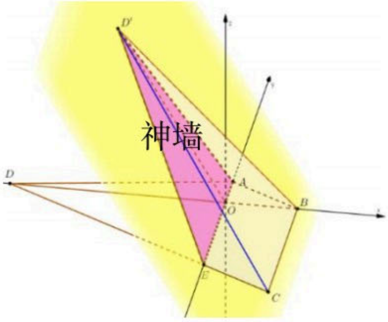
$\therefore C$ 到平面 $AD'E$ 的距离等于 B 到平面 $AD'E$ 的距离 ---------------------------------10 分

作 $BH\perp D'O$ 的延长线于 H，连 OH，则 $\angle BHO$ 为直线 CD' 与面 $AD'E$ 所成的角，

$BH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}OB=\dfrac{3}{2}$ --12 分

$\therefore \sin\angle CD'H=\dfrac{CH}{D'H}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\sqrt{55}}=\dfrac{3\sqrt{55}}{110}$ --15 分

（法二坐标法）



作 $BO\perp AE$ 于 O，以 OB 为 x 轴，OA 为 y 轴，竖直向上为 z 轴，由已知条件得

$O(0,0,0),A(0,1,0),B(\sqrt{3},0,0),C(\sqrt{3},-4,0),E(0,-3,0)$，$D(-3\sqrt{3},0,0)$， ------9 分

$\because BC//AE$，$\therefore BC\perp$ 面 BOD'，$\therefore BC\perp BD'$，$\therefore BD'=\sqrt{(\sqrt{55})^2-4^2}=\sqrt{39}$.

又 $OB=\sqrt{3},OD'=OD=3\sqrt{3}$，$\therefore \cos\angle BOD'=\dfrac{(\sqrt{3})^2+(3\sqrt{3})^2-(\sqrt{39})^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \angle BOD'=\dfrac{2\pi}{3}$， $\therefore \angle DOD'=\dfrac{\pi}{3}$， --12 分

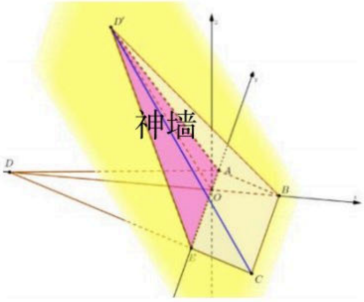
$\therefore D'(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},0,\dfrac{9}{2})$ --13 分

由 D',A,E 的坐标易求面 $AD'E$ 的法向量 $\vec{n}=(\sqrt{3},0,1)$， ----------------------------14 分

$\overline{CD'}=(\dfrac{5\sqrt{3}}{2},-4,-\dfrac{9}{2})$，设直线 CD' 与面 $AD'E$ 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overline{CD'}|}{|\vec{n}|\cdot|\overline{CD'}|}=\dfrac{\frac{15}{2}-\frac{9}{2}}{2\sqrt{\frac{75}{4}+16+\frac{81}{4}}}=\dfrac{3}{2\sqrt{55}}=\dfrac{3\sqrt{55}}{110}$ --------------------------------15 分

（法三体积法）



作 $BO\perp AE$ 于 O，以 OB 为 x 轴，OA 为 y 轴，竖直向上为 z 轴，由已知条件得

$O(0,0,0),A(0,1,0),B(\sqrt{3},0,0),C(\sqrt{3},-4,0),E(0,-3,0)$，$D(-3\sqrt{3},0,0)$，------9 分

$\because BC//AE$，$\therefore BC\perp$ 面 BOD'，$\therefore BC\perp BD'$，$\therefore BD'=\sqrt{(\sqrt{55})^2-4^2}=\sqrt{39}$.

又 $OB=\sqrt{3},OD'=OD=3\sqrt{3}$，$\therefore \cos\angle BOD'=\dfrac{(\sqrt{3})^2+(3\sqrt{3})^2-(\sqrt{39})^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \angle BOD'=\dfrac{2\pi}{3}$，$\therefore \angle DOD'=\dfrac{\pi}{3}$ --11 分

$\therefore D'(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},0,\dfrac{9}{2})$ --12 分

设点 C 到面 $AD'E$ 的距离为 h，直线 CD' 与面 $AD'E$ 所成角为 θ，神墙由 $V_{D'-ACE}=V_{C-AD'E}$ 得

$$\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times 2\times 4\times\sin 120^{\circ})\times\frac{9}{2}=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times 4\times 3\sqrt{3})\times h$$

解得 $h=\dfrac{3}{2}$，则 $\sin\theta=\dfrac{h}{CD'}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\sqrt{55}}=\dfrac{3\sqrt{55}}{110}$ --15 分

20.解：（Ⅰ）由 $2S_{n-1}=a_n^{\ 2}-a_n(n\ge 2)$ 可得 $2S_n=a_{n+1}^{\ \ 2}-a_{n+1}$，---------------------2 分

两式相减得 $(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-1)=0(n\ge 2)$ ---------------------3 分

由题意可得 $a_{n+1}-a_n=1(n\ge 2)$，由 $2S_{n-1}=a_n^{\ 2}-a_n(n\ge 2)$

可得 $2S_1=a_2^{\ 2}-a_2$，所以 $a_2=2$，故 $a_2-a_1=1$ ---------------------5 分

所以 $\{a_n\}$ 是首项和公差都为 1 的等差数列，$\therefore a_n=n$ -------------------6 分

（Ⅱ）$b_n=\dfrac{n+1}{2^n}$, --------------------7 分

$T_n=2\cdot\dfrac{1}{2^1}+3\cdot\dfrac{1}{2^2}+\cdots+(n+1)\cdot\dfrac{1}{2^n}$ --------------------8 分

$$\frac{1}{2}T_n = 2\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots+n\cdot\frac{1}{2^n}+(n+1)\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\therefore \frac{1}{2}T_n = 1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-(n+1)\cdot\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$\therefore T_n = 3-\frac{2+n+1}{2^n} = 3-\frac{n+3}{2^n}$$ --------------------10 分

（Ⅲ）因为 $c_{n+1}(\frac{1}{c_n}-\frac{1}{{a_n}^2+c_n})=1, n\in N^*$ ，$c_n>0$

所以 $\frac{1}{c_n}-\frac{1}{c_{n+1}}=\frac{1}{n^2+c_n}<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\ (n\geq 2)$ --------------------12 分

-

所以由累加可得

$$\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_n}=\frac{1}{1+c_1}+\frac{1}{4+c_2}+\frac{1}{9+c_3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2+c_{n-1}}=\frac{2}{3}+\frac{1}{4+c_2}+\frac{1}{9+c_3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2+c_{n-1}}$$

$$\therefore \frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_n}\leq\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}$$ --------------------13 分

故有 $\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_n}\leq\frac{2}{3}+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)=\frac{5}{3}-\frac{1}{n-1}<\frac{5}{3}$ …14 分

$\therefore \frac{1}{c_n}>2-\frac{5}{3}=\frac{1}{3}$，$\therefore c_n<3$． --------------------15 分

21.解：（Ⅰ）抛物线 C_1 的准线方程 $x=-1$ --------------------2 分

因为抛物线 C_1 的准线与椭圆 C_2 相交的弦长 $\sqrt{3}$

所以抛物线 C_1 的准线与椭圆 C_2 交点 $(-1,\pm\frac{\sqrt{3}}{2})$ --------------------4 分

得 $\frac{1}{4}+\frac{3}{4b^2}=1$ 得 $b^2=1$

$\therefore$ 椭圆 C_2 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ --------------------------------------6 分

（Ⅱ）$\because \overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{ST}$ ，$\therefore S$ 、T 两点是 MP 、MQ 的中点 -----------7 分

令 $M(x_0,y_0),P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$

可得 $S(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2}),T(\frac{x_0+x_2}{2},\frac{y_0+y_2}{2})$

$\therefore (\frac{y_0+y_1}{2})^2=2x_0+2x_1=2x_0+\frac{y_1^2}{2}$ ，$y_1^2-2y_0y_1-y_0^2+8x_0=0$ -----------8 分

同理 $y_2^2-2y_0y_2-y_0^2+8x_0=0$ ---------------9 分

$\therefore$ y_1,y_2 是 $y^2-2y_0y-y_0^2+8x_0=0$ 的两个根，

$\Delta=8y_0^2-32x_0=8-2x_0^2-32x_0>0$ ，

解得 $x_0\in[-2,2\sqrt{17}-8)$ - --------------10 分

$\therefore$ $y_1+y_2=2y_0, y_1y_2=-y_0^2+8x_0$ -------------11 分

$\therefore (y_1-y_2)^2=$神墙$8y_0^2-32x_0$

$|PQ|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_2^2}{4})^2+(y_1-y_2)^2=\frac{(y_1+y_2)^2(y_1-y_2)^2}{16}+(y_1-y_2)^2$

$=(1+\frac{4y_0^2}{16})(y_1-y_2)^2=(1+\frac{y_0^2}{4})(8y_0^2-32x_0)=(\frac{5}{4}-\frac{x_0^2}{16})(-2x_0^2-32x_0+8)$

$=\frac{1}{8}(x_0^4+16x_0^3-24x_0^2-320x_0+80)$ --------------------------------13 分

令 $f(x)=x^4+16x^3-24x^2-320x+80, x\in[-2,2\sqrt{17}-8)$ ，

则 $f'(x)=4x^3+48x^2-48x-320,$

$f''(x)=12x^2+96x-48<0$ 在 $x\in[-2,2\sqrt{17}-8)$ 上恒成立

$\therefore f'(x)\le f'(-2)<0$

$x=-2$ 时，$|PQ|^2$ 取到最大值 64 -----------------------------------14 分

$|ST|_{\max}=4$ ，此时以 ST 为直径的圆面积的最大值为 4π ---------------15 分

22.解：（Ⅰ） 函数$f(x)$的定义域为$x>0$ …………1 分

$f'(x)=\frac{x-2a\sqrt{x}+2a}{2x}=0(x>0)$ 有两个解 x_1、x_2 …………3 分

$\therefore t^2-2at+2a=0$ 两个不同的正根 $\sqrt{x_1},\sqrt{x_2}$

$\Delta=4a^2-8a>0$, 且 $a>0$，得 a 的取值范围是 $a>2$ …………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，不妨设 $x_1<x_2$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 在 $(0,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上递增，

在 (x_1,x_2) 上递减， …………6 分

$\because x_1-2a\sqrt{x_1}+2a=0, \therefore a=\dfrac{x_1}{2\sqrt{x_1}-2}, \sqrt{x_1}=a-\sqrt{a^2-2a}$ …………7 分

$$f(x_1)=a\ln x_1+\frac{1}{2}x_1-2a\sqrt{x_1}=\frac{x_1}{2\sqrt{x_1}-2}\cdot\ln x_1+\frac{1}{2}x_1-2\sqrt{x_1}\cdot\frac{x_1}{2\sqrt{x_1}-2}$$

$$=\frac{x_1}{2(\sqrt{x_1}-1)}(\ln x_1-\sqrt{x_1}-1)$$ …………8 分

$\because \sqrt{x_1}-1=a-1-\sqrt{a^2-2a}=\sqrt{a^2-2a+1}-\sqrt{a^2-2a}>0$，$\therefore \sqrt{x_1}>1$ ……9 分

故只要证 $\ln x_1-\sqrt{x_1}-1<0$

设 $g(x)=\ln x-\sqrt{x}-1$，则 $g'(x)=\dfrac{2-\sqrt{x}}{2x}$，函数 $g(x)$ 在 $(0,4)$ 上递增，在 $(4,+\infty)$ 上递减， $g(x)\le g(4)=\ln 4-3<0$，则 $f(x_1)<0$ 得证 ……………………10 分

（Ⅲ）根据韦达定理，$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_2}=2a$

$$\therefore f(x_2)-f(x_1)=a\ln\frac{x_2}{x_1}+\frac{1}{2}(x_2-x_1)-2a(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x_1x_2}\ln\frac{x_2}{x_1}+\frac{1}{2}(x_2-x_1)-(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x_1x_2}\ln\frac{x_2}{x_1}-\frac{1}{2}(x_2-x_1)$$

$$\therefore k=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x_1x_2}\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}-\frac{1}{2}=\frac{\ln\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}}{\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}-\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}}-\frac{1}{2}$$ …………12 分

$\because x_2\ge 9x_1\ \therefore$ 令$t=\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}\ge 3$, 设$h(t)=\frac{\ln t}{t-\frac{1}{t}}=\frac{t\ln t}{t^2-1}$, 其中$t\ge 3$ ……………..13 分

$$h'(t)=\frac{(\ln t+1)(t^2-1)-2t^2\ln t}{(t^2-1)^2}=\frac{(t^2-1)-(t^2+1)\ln t}{(t^2-1)^2}<0$$ ………………14 分

所以，函数$h(t)$在区间$[3,+\infty)$上单调递减，当$t\ge 3$时, $h(t)\le h(3)=\frac{3\ln 3}{8}$，

则$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$的最大值是$\frac{3\ln 3-4}{8}$ …………15 分