

宁波市 2020 学年高三第一学期高考适应性考试

数 学

参考公式:

如果事件 A, B 互斥,那么: $P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A, B 相互独立,那么: $P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率为 p ,那么 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率:

$$P_n(k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

柱体的体积公式: $V=Sh$

其中 S 表示柱体的底面积, h 表示柱体的高

锥体的体积公式: $V=\frac{1}{3}Sh$

其中 S 表示锥体的底面积, h 表示锥体的高

台体的体积公式: $V=\frac{1}{3}h(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$

其中 S_1, S_2 分别表示台体的上、下底面积, h 表示台体的高

球的表面积公式: $S=4\pi R^2$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分. 每小题给出的选项中只有一个是符合题目要求的,不选、多选、错选均不得分)

1. 已知集合 $A=\{x|x^2 \leq 16\}, B=[3, +\infty)$, 则 $A \cap B=$ ()

- A. $[-4, +\infty)$ B. $[-4, 3]$ C. $[3, 4]$ D. $(-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$

2. 已知双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{m} = 1 (m > 0)$ 的离心率为 2, 则双曲线 $\frac{y^2}{m} - x^2 = 1$ 的离心率是 ()

- A. 2 B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$

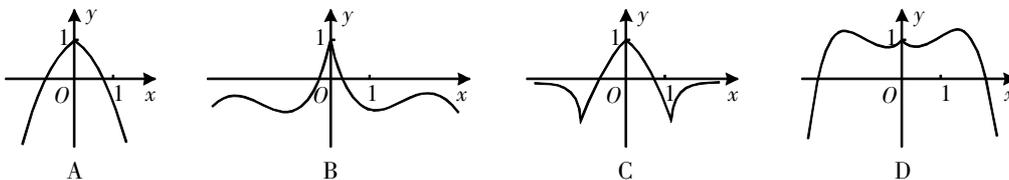
3. 若实数 x, y 满足条件 $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \leq x, \\ 2x + y - 6 \leq 0, \end{cases}$ 则目标函数 $z = x + 3y$ 的最大值为 ()

- A. 3 B. 8 C. 10 D. 18

4. 在 $(2-x^2)(x+\frac{1}{x})^6$ 的展开式中, 含 x^2 的项的系数是 ()

- A. -10 B. 10 C. 25 D. -25

5. 函数 $y = 1 + \cos x - e^{|x|}$ 的大致图象是 ()



6. 祖暅是我国南北朝时代的伟大科学家,他提出的“幂势既同,则积不容异”称为祖暅原理. 原理的意思是两个同高的几何体,如在等高处截面的面积恒相等,则体积相等. 设 A, B 为两个同高的几何体, $p: A, B$ 的体积不相等; $q: A, B$ 在等高处的截面积不恒相等. 根据祖暅原理可知, p 是 q 的 ()

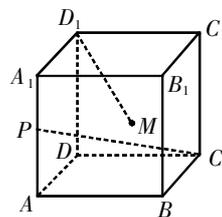
- A. 充要条件 B. 既不充分也不必要条件
C. 必要而不充分条件 D. 充分而不必要条件

7. 若正数 x, y 满足 $x^2 + 4xy - 4 = 0$, 则 $x + y$ 的最小值是 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ C. 2 D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

8. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PA_1}$, 点 M 在侧面 AA_1B_1B 内, 若 $D_1M \perp CP$, 则点 M 的轨迹为 ()

- A. 线段
B. 圆弧
C. 抛物线一部分
D. 椭圆一部分



9. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1, a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3, & \frac{n}{3} \notin \mathbf{N}^*, \\ a_{n-1}, & \frac{n}{3} \in \mathbf{N}^*, \end{cases}$ 使 $a_n < 2021$ 对任意的 $n \leq k (k \in \mathbf{N}^*)$ 恒成立的最大 k 值为 ()

- A. 1 008 B. 2 016 C. 2 018 D. 2 020

10. 设点 $P(x_1, y_1)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上, 点 $Q(x_2, y_2)$ 在直线 $x+2y-8=0$ 上, 则 $|x_2-x_1| + |y_2-y_1|$ 的最小值是 ()

- A. $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 2

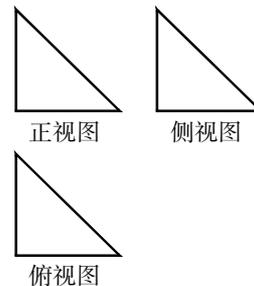
二、填空题(本大题共 7 小题, 多空题每小题 6 分, 单空题每小题 4 分, 共 36 分)

11. 若复数 z 满足 $(1-2i)z=10$ (i 为虚数单位), 则 z 的虚部为 _____, $|z| =$ _____.

12. 某几何体的三视图是直角边长为 1 m 的三个等腰直角三角形(如图), 则该几何体的体积为 _____ m^3 , 其外接球的表面积为 _____ m^2 .

13. 已知随机变量 ξ 的分布列如下表, 且满足 $E(\xi)=1$, 则 $a =$ _____; 又 $\eta=3\xi-1, D(\eta) =$ _____.

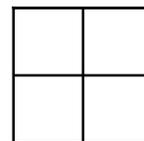
ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	a	b



14. 函数 $f(x) = \cos x + \sqrt{2} \sin x$ 的最大值为 _____, 记函数取到最大值时的 $x = \theta$, 则 $\cos(\theta - \frac{\pi}{6}) =$ _____.

15. 已知向量 a, b 满足 $|a+b| = |a-b| = 2|a| = 2$, 则 $(a-2b) \cdot (a+b) =$ _____.

16. 如图, 对“田”字型的四个格子进行染色. 每个格子均可从红、黄、蓝三种颜色中选一种, 每个格子只染一种颜色, 且相邻的格子不能都染红色, 则满足要求的染色方法有 _____ 种.



17. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 满足 $e^{2x} + \frac{b}{e^x} \geq 2e^x - a$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 当 $2a+b$ 取到最小值时, $a^2+b =$ _____.

三、解答题(本大题共 5 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

18. (本题满分 14 分) 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 所对的边. 已知 $a \cos A = R$, 其中 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径.

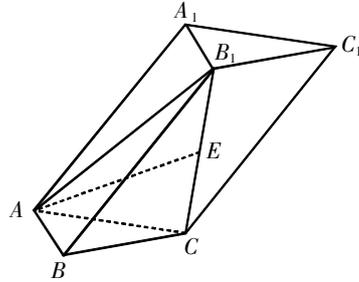
(1) 求 A 的值.

(2) 若 $b-a=1, \tan B = 2\sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. (本题满分 15 分)在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=AC=1, AA_1=\sqrt{3}$, $AB \perp AC, B_1C \perp$ 平面 ABC, E 是 B_1C 的中点.

(1) 求证: 平面 $AB_1C \perp$ 平面 ABB_1A_1 .

(2) 求直线 AE 与平面 AA_1C_1C 所成角的正弦值.



20. (本题满分 15 分) 已知正项等比数列 $\{a_n\}$, $a_2=4, 2a_1+a_2=a_3$; 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=na_n$.

(1) 求 a_n, b_n .

(2) 求证: $\frac{b_2}{a_1a_2} + \frac{b_3}{a_2a_3} + \frac{b_4}{a_3a_4} + \dots + \frac{b_{n+1}}{a_n a_{n+1}} < 2$.

21. (本题满分 15 分) 抛物线 $C: x^2=4y$ 上任取两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$. 已知 AB 的垂直平分线 l 分别交 x 轴、 y 轴于点 P, Q .

(1) 若 AB 的中点坐标为 $(1, 2)$, 求直线 AB 的斜率.

(2) 若 PQ 的中点恰好在抛物线 C 上, 且 $|AB| = \frac{\sqrt{5}}{2} |PQ|$, 求直线 AB 的斜率.

22. (本题满分 15 分) 已知函数 $f(x)=e^x, g(x)=\ln x$.

(1) 若函数 $h(x)=f(x)+ag(x)$ 存在极小值, 求实数 a 的取值范围.

(2) 若 $m>0$, 且 $m^2x^2f(x-1)-(x+1)g(x)-mx \geq 0$ 对任意 $x>0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

(参考数据: $\ln 2 \approx 0.69, e \approx 2.718$)