

# 金丽衢十二校 2020 学年高三第一次联考

## 数 学

参考公式:

如果事件  $A, B$  互斥, 那么:  $P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件  $A, B$  相互独立, 那么:  $P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)$

如果事件  $A$  在一次试验中发生的概率为  $p$ , 那么  $n$  次独立重复试验中事件  $A$  恰好发生  $k$  次的概率:

$$P_n(k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

柱体的体积公式:  $V=Sh$

其中  $S$  表示柱体的底面积,  $h$  表示柱体的高

锥体的体积公式:  $V=\frac{1}{3}Sh$

其中  $S$  表示锥体的底面积,  $h$  表示锥体的高

台体的体积公式:  $V=\frac{1}{3}h(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$

其中  $S_1, S_2$  分别表示台体的上、下底面积,  $h$  表示台体的高

球的表面积公式:  $S=4\pi R^2$

其中  $R$  表示球的半径

球的体积公式:  $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

一、选择题(本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分. 每小题给出的选项中只有一个是符合题目要求的, 不选、多选、错选均不得分)

1. 已知集合  $M=\{x|-4<x<2\}$ ,  $N=\{x|x^2+x-6<0\}$ , 则  $M \cap N=$  ( )

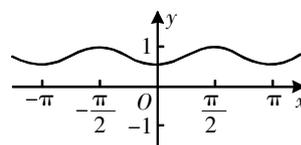
- A.  $\{x|-3<x<3\}$       B.  $\{x|-3<x<2\}$       C.  $\{x|-2<x<2\}$       D.  $\{x|2<x<3\}$

2. 若实数  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x-y-2 \leq 0, \\ x+2y-7 \geq 0, \\ y-3 \leq 0, \end{cases}$  则  $z=y-2x$  的最小值为 ( )

- A. 1      B.  $\frac{1}{3}$       C. -7      D. -9

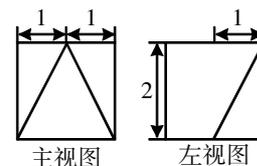
3. 函数  $f(x)=x \sin|x|$  的图象大致是 ( )

- A.  $y=\sin(\cos x)$       B.  $y=\cos(\sin x)$   
C.  $y=\sin(\sin x)$       D.  $y=\cos(\cos x)$



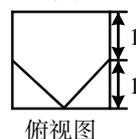
4. 一个几何体的三视图如图所示, 则此几何体的体积为 ( )

- A.  $\frac{1}{3}$       B.  $\frac{2}{3}$   
C.  $\frac{23}{3}$       D.  $\frac{22}{3}$



5. 已知条件  $p:t=1$ , 条件  $q$ : 直线  $x=ty-1$  与圆  $x^2+y^2=\frac{1}{2}$  相切, 则  $p$  是  $q$  的 ( )

- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充分必要条件      D. 既不充分也不必要条件



6. 口袋中有 7 个红球、2 个蓝球和 1 个黑球. 从中任取两个球, 记其中含红球的个数为随机变量  $\xi$ . 则  $\xi$  的数学期望  $E(\xi)$  是 ( )

- A.  $\frac{6}{5}$       B.  $\frac{7}{5}$       C.  $\frac{8}{5}$       D.  $\frac{9}{5}$

7. 若  $(x-2)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{10}x^{10}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 则下列结论正确的是 ( )

- A.  $a_0=-1024$       B.  $a_1+a_2+\dots+a_{10}=-1$   
C.  $|a_0|+|a_1|+|a_2|+\dots+|a_{10}|=3^{10}$       D.  $a_1+2a_2+3a_3+\dots+9a_9=10$

8. 若数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = \frac{n}{n^2+2020}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 则这个数列中的最大项是 ( )
- A. 第 43 项                      B. 第 44 项                      C. 第 45 项                      D. 第 46 项
9. 正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 1, 且  $\overrightarrow{A_1M} = \sqrt{3} \overrightarrow{MD_1}$ ,  $\overrightarrow{BN} = \sqrt{3} \overrightarrow{NB_1}$ ,  $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AC_1} + y\overrightarrow{BD_1}$ ,  $x, y \in \mathbf{R}$ , 则  $|\overrightarrow{MP}| + |\overrightarrow{NP}|$  的最小值为 ( )
- A.  $\sqrt{2}$                       B.  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$                       C.  $6\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$                       D.  $\sqrt{3}$
10. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \ln(-x), & x < 0, \\ -\frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$  的图象与曲线  $x^2 - y^2 - 2ay - a^2 = 0$  恰有 4 个交点, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )
- A.  $0 < a < 1$                       B.  $1 < a < 2$                       C.  $0 < a < 2$                       D.  $1 < a < 3$

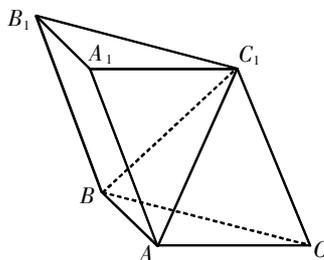
二、填空题(本大题共 7 小题, 多空题每小题 6 分, 单空题每小题 4 分, 共 36 分)

11. 设平面向量  $\mathbf{a} = (1, 2)$ ,  $\mathbf{b} = (-3, x)$ , 若  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ , 则  $x =$  \_\_\_\_\_,  $|\mathbf{b}| =$  \_\_\_\_\_.
12. 设复数  $z = a + bi$  ( $i$  是虚数单位), 若  $z + 2\bar{z} = 3 + 2i$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_,  $b =$  \_\_\_\_\_.
13. 函数  $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2x)\cos(\frac{\pi}{6} - 2x)$  的最小正周期为 \_\_\_\_\_, 当  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$  时,  $f(x)$  的值域为 \_\_\_\_\_.
14. 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = e^x - \frac{2x+a}{x+1}$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_, 若  $f(|1-m|) > f(2m)$ , 则实数  $m$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.
15. 将 5 名同学安排到 3 个小区参加创建文明城市宣传活动, 每名同学只去 1 个小区, 每个小区至少安排 1 名同学, 则不同的安排方法共有 \_\_\_\_\_ 种. (用数字作答)
16. 设椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的右焦点为  $F$ ,  $P$  是椭圆  $C$  上第一象限内的点,  $O$  是原点. 若  $\overrightarrow{FO} \cdot \overrightarrow{FP} = |\overrightarrow{PF}|^2$ , 则椭圆  $C$  的离心率的取值范围是 \_\_\_\_\_.
17. 设  $f(x) = x^3 + ax^2 + \frac{1}{3}(a-1)x$  ( $a \in \mathbf{R}$ ), 若对于满足  $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$  的三个不同实数  $x_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), 恒有  $|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_1 - x_3| \leq 4$ , 则实数  $a$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

三、解答题(本大题共 5 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

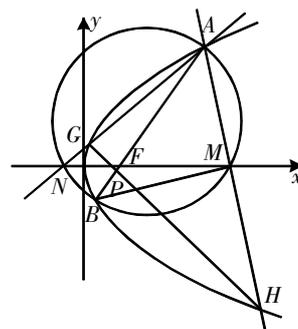
18. (本题满分 14 分) 已知  $a, b, c$  分别是  $\triangle ABC$  内角  $A, B, C$  的对边,  $b < a < c$ , 且  $c = 2b$ ,  $\cos A - \sin A = -\frac{1}{5}$ .
- (1) 求函数  $\sin A$  的值.
- (2) 若  $\triangle ABC$  的面积为 20, 求  $a$  的值.

19. (本题满分 15 分)如图,三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中, $AC_1=\sqrt{2}AB=\sqrt{2}AC,AB\perp AC,AC_1\perp BC,\angle CBB_1=120^\circ$ .
- (1)求证:平面  $ABC\perp$  平面  $BB_1C_1C$ .
- (2)求直线  $B_1C_1$  与平面  $ABC_1$  所成角的正弦值.



20. (本题满分 15 分)已知数列  $\{a_n\}$  中, $a_1=\frac{1}{2},a_n=2a_{n+1}-\frac{2n+1}{2^n}(n\in\mathbf{N}^*)$ .
- (1)求数列  $\{2^n a_n\}$  的通项公式.
- (2)设数列  $\{\frac{a_n}{n}\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ ,求证: $T_n<2$ .

21. (本题满分 15 分)如图,已知抛物线  $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为  $F$ ,过点  $F$ 的直线交  $C$ 于  $A,B$ 两点,以  $AB$ 为直径的圆交  $x$ 轴于  $M,N$ ,且当  $AF \perp x$ 轴时,  $|MN|=4$ .
- (1)求抛物线  $C$ 的方程.
- (2)若直线  $AN,AM$ 分别交抛物线  $C$ 于  $G,H$ (不同于  $A$ ),直线  $AB$ 交  $GH$ 于点  $P$ ,且直线  $AB$ 的斜率大于  $0$ ,求证:存在唯一这样的直线  $AB$ 使得  $B,H,P,M$ 四点共圆.



22. (本题满分 15 分)设函数  $f(x)=x \ln x$ .
- (1)求函数  $f(x)$ 的最小值.
- (2)设  $g(x)=f(x)-kx-b$  存在两个不同零点  $x_1, x_2$ , 记  $M=\frac{|x_1+x_2|}{2}, N=\frac{|x_1-x_2|}{2}$ , 求证:  $\ln \frac{1}{2} < \frac{g(M)}{N} < 0$ .