2020学年第一学期杭州市高三年级教学质量检测

数　学

参考公式:

如果事件 A、B 互斥,那么:$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A、B 相互独立,那么:$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率为 p,那么 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率:

$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$

柱体的体积公式:$V=Sh$　　其中 S 表示柱体的底面积,h 表示柱体的高

锥体的体积公式:$V=\frac{1}{3}Sh$　　其中 S 表示锥体的底面积,h 表示锥体的高

台体的体积公式:$V=\frac{1}{3}h(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$　　其中 S_1,S_2 分别表示台体的上、下底面积,h 表示台体的高

球的表面积公式:$S=4\pi R^2$　　其中 R 表示球的半径

球的体积公式:$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

一、选择题(本大题共10小题,每小题4分,共40分. 每小题给出的选项中只有一个是符合题目要求的,不选、多选、错选均不得分)

1. 若集合 $A=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$,$B=\{x|(x-1)(x-2)\geqslant 0\}$,则 $A\cup B=$　(　　)

A. $\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$　B. $\{x|2\leqslant x\leqslant 3\}$　C. $\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$　D. $\mathbf{R}$

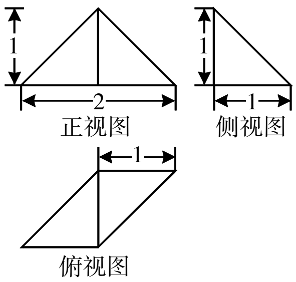
2. 已知 $a\in\mathbf{R}$,若 $(2+a\mathrm{i})(a-2\mathrm{i})=-4\mathrm{i}$(i 为虚数单位),则 $a=$　(　　)

A. -1　B. 0　C. 1　D. 2

3. 某几何体的三视图如图所示,则该几何体的体积为　(　　)

A. 1　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{3}{2}$

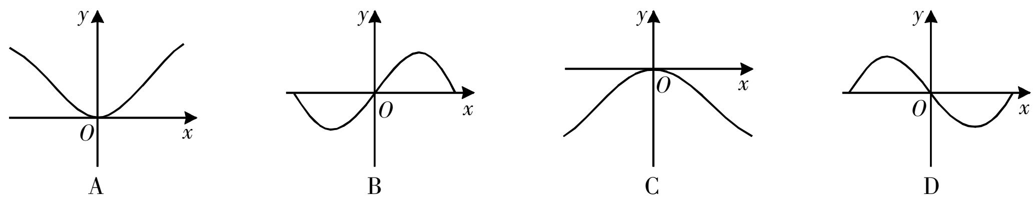


4. 若 $a>0,b>0$,则"$a>b$"是"$\ln a-b>\ln b-a$"的　(　　)

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

5. 函数 $f(x)=(\frac{2}{1+\mathrm{e}^x}-1)\cos x$(其中 e 为自然对数的底数)的图象可能是　(　　)



6. 已知随机变量 ξ 满足 $P(\xi=x)=ax+b(x=-1,0,1)$,其中 $a,b\in\mathbf{R}$. 若 $E(\xi)=\frac{1}{3}$,则 $D(\xi)=$　(　　)

A. $\frac{2}{9}$　B. $\frac{5}{9}$　C. $\frac{8}{9}$　D. $\frac{11}{9}$

7. 已知 $(x^2+1)(2x-1)^7=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_9(x-1)^9(x\in\mathbf{R})$. 则 $a_1=$　(　　)

A. -30　B. 30　C. -40　D. 40

8. 已知实数 a,b 满足 $|b|\leqslant 2-a$，且 $a\geqslant -1$，则 $2a+b$ 的最小值为 ( )

A. -7　　B. -5　　C. -3　　D. -1

9. 设函数 $f(x)=\ln x-\frac{e}{x}-2mx+n$. 若不等式 $f(x)\leqslant 0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则 $\frac{n}{m}$ 的最大值为 ( )

A. $\frac{e}{4}$　　B. $\frac{e}{2}$　　C. e　　D. $2e$

10. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$a_2=6$，$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^2+9}{a_n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，则 ( )

A. 存在 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_n\notin\mathbf{Q}$

B. 存在 $p>0$，使得 $\{a_{n+1}-pa_n\}$ 是等差数列

C. 存在 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_n=\sqrt{5}$

D. 存在 $p>0$，使得 $\{a_{n+1}-pa_n\}$ 是等比数列

二、填空题(本大题共 7 小题，多空题每小题 6 分，单空题每小题 4 分，共 36 分)

11. $\lg 2-\lg\frac{1}{5}=$____________；$4^{\log_2 3}=$____________.

12. 在 $\triangle ABC$ 中，$A=\frac{\pi}{3}$，$b=4$，$a=2\sqrt{3}$，则 $B=$____________，$\triangle ABC$ 的面积等于____________.

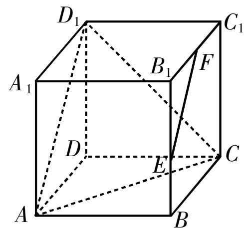
13. 若 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$，则 a^2+b^2 的最小值等于____________，$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的最大值等于____________.

14. 已知 $\tan\alpha=\cos\alpha$，则 $\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=$____________，$\frac{1}{1-\sin\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha}=$____________.

15. 一排 11 个座位，现安排 2 人就座，规定中间的 3 个座位不能坐，且 2 人不相邻，则不同排法的种数是____________.

16. 平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，且 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$ 的最大值为________.

17. 在棱长为 $\sqrt{2}$ 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，棱 BB_1，B_1C_1 的中点分别为 E，F，点 P 在平面 BCC_1B_1 内，作 $PQ\perp$ 平面 ACD_1，垂足为 Q. 当点 P 在 $\triangle EFB_1$ 内(包含边界)运动时，点 Q 的轨迹所组成的图形的面积等于____________.



三、解答题(本大题共 5 小题，共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

18. (本题满分 14 分)已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})\cos(\omega x+\frac{\pi}{3})$ $(\omega>0)$ 的最小正周期为 π.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调递增区间.

(2)在锐角 $\triangle ABC$ 中，若 $\sin A\sin C-\sin^2 C=\sin^2 A-\sin^2 B$，求 $f(B)$ 的值.

19. (本题满分 15 分)已知函数 $f(x)=x^2-ax-|ax-2|(a>0)$.

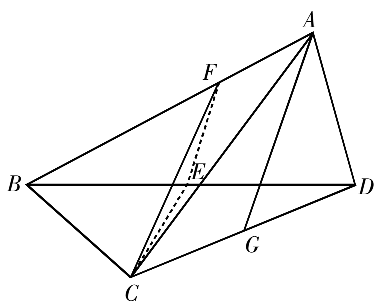
(1)若 $a=2$,解不等式 $f(x)<0$.

(2)设 x_1,x_2,x_3,x_4 是函数 $y=f(x)+1$ 的四个不同的零点,且 $x_1<x_2<x_3<x_4$. 问是否存在实数 a,使得 x_2,x_3,x_4 成等差数列? 若存在,求出所有 a 的值;若不存在,说明理由.

20. (本题满分 15 分)在三棱锥 $A-BCD$ 中, $\triangle BCD$ 为等腰直角三角形,点 E,G 分别是线段 BD,CD 的中点,点 F 在线段 AB 上,且 $BF=2FA$. 若 $AD=1, AB=\sqrt{3}, CB=CD=\sqrt{2}$.

(1)求证:AG∥平面 CEF.

(2)求直线 AD 与平面 CEF 所成的角.



21. (本题满分 15 分)在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，a_{2k-1}，a_{2k}，a_{2k+1}($k\in\mathbf{N}^*$)成等比数列，公比为 $q_k>0$，

(1)若 $q_k=2$，求 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1}$.

(2)若 a_{2k}，a_{2k+1}，a_{2k+2}($k\in\mathbf{N}^*$)成等差数列，公差为 d_k，设 $b_k=\dfrac{1}{q_k-1}$.

①求证：$\{b_n\}$为等差数列；

②若 $d_1=2$，求数列$\{d_k\}$的前 k 项和 D_k.

22. (本题满分 15 分)已知函数 $f(x)=x\ln x-\dfrac{1}{2}a(x+1)^2(a\in\mathbf{R})$，恰好有两个极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$. 求证：

(1)存在实数 $m\in(\dfrac{1}{2},1)$，使 $0<a<m$.

(2)$-\dfrac{5}{4}<f(x_1)<-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.