

金华十校 2020 年 4 月高三模拟考试

数 学

2020. 4

参考公式:

如果事件 A, B 互斥, 那么: $P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A, B 相互独立, 那么: $P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率为 p , 那么 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率:

$$P_n(k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

柱体的体积公式: $V=Sh$

其中 S 表示柱体的底面积, h 表示柱体的高

锥体的体积公式: $V=\frac{1}{3}Sh$

其中 S 表示锥体的底面积, h 表示锥体的高

台体的体积公式: $V=\frac{1}{3}h(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$

其中 S_1, S_2 分别表示台体的上、下底面积, h 表示台体的高

球的表面积公式: $S=4\pi R^2$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

一、选择题(本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分. 每小题给出的选项中只有一个是符合题目要求的, 不选、多选、错选均不得分)

1. 已知集合 $A=\{x|(x+1)(x-2)<0\}$, $B=\{x|1<x\leq 2\}$, 则 $A \cap B=$ ()

- A. $\{x|1<x<2\}$ B. $\{x|1<x\leq 2\}$ C. $\{x|-1<x\leq 2\}$ D. $\{x|-1\leq x<2\}$

2. 若复数 $\frac{2+ai}{1-i}$ ($a \in \mathbf{R}$) 是纯虚数(i 是虚数单位), 则 a 的值为 ()

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

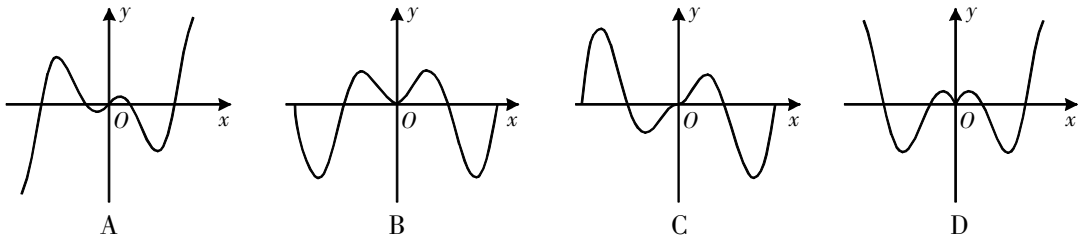
3. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \leq x \\ x+y \leq 4 \\ y \geq -2 \end{cases}$, 则 $z=x+2y$ 的最大值是 ()

- A. 8 B. 6 C. 4 D. 2

4. 设 $a \in \mathbf{R}$, 则“ $a>2$ ”是“方程 $x^2+y^2+ax-2y+2=0$ 的曲线是圆”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 在下面四个 $x \in [-\pi, \pi]$ 的函数图象中, 函数 $y=|x| \cos 2x$ 的图象可能是 ()



6. 已知在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, M, N 分别为 AC, B_1C_1 的中点, E, F 分别为 BC, B_1B 的中点, 则直线 MN 与直线 EF 、平面 ABB_1A_1 的位置关系分别为 ()

- A. 平行、平行 B. 异面、平行 C. 平行、相交 D. 异面、相交

7. 口袋中有相同的黑色小球 n 个, 红、白、蓝色的小球各一个, 从中任取 4 个小球. ξ 表示当 $n=3$ 时取出黑球的数目, η 表示当 $n=4$ 时取出黑球的数目. 则下列结论成立的是 ()

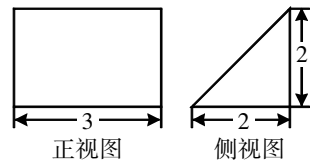
- A. $E(\xi)<E(\eta), D(\xi)<D(\eta)$ B. $E(\xi)>E(\eta), D(\xi)<D(\eta)$
C. $E(\xi)<E(\eta), D(\xi)>D(\eta)$ D. $E(\xi)>E(\eta), D(\xi)>D(\eta)$

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} ax^2+1, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 下列关于函数 $y=f(f(x))+m$ 的零点个数的判断, 正确的是 ()
- A. 当 $a=0, m \in \mathbf{R}$ 时, 有且只有 1 个
 B. 当 $a>0, m \leq -1$ 时, 都有 3 个
 C. 当 $a<0, m<-1$ 时, 都有 4 个
 D. 当 $a<0, -1<m<0$ 时, 都有 4 个
9. 设三棱锥 $V-ABC$ 的底面是 A 为直角顶点的等腰直角三角形, $VA \perp$ 底面 ABC , M 是线段 BC 上的点 (端点除外), 记 VM 与 AB 所成角为 α , VM 与底面 ABC 所成角为 β , 二面角 $A-VC-B$ 为 γ , 则 ()
- A. $\alpha < \beta, \beta + \gamma > \frac{\pi}{2}$
 B. $\alpha < \beta, \beta + \gamma < \frac{\pi}{2}$
 C. $\alpha > \beta, \beta + \gamma > \frac{\pi}{2}$
 D. $\alpha > \beta, \beta + \gamma < \frac{\pi}{2}$
10. 设 $a \in \mathbf{R}$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a, a_{n+1} = a_n - (a_n - 2)^3$, 则 ()
- A. 当 $a=4$ 时, $a_{10} > 2^{10}$
 B. 当 $a = \sqrt{2}$ 时, $a_{10} > 2$
 C. 当 $a = \frac{1}{3}$ 时, $a_{10} > 2^{10}$
 D. 当 $a = \frac{16}{5}$ 时, $a_{10} > 2$

二、填空题 (本大题共 7 小题, 多空题每小题 6 分, 单空题每小题 4 分, 共 36 分)

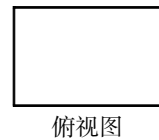
11. 若双曲线 $\frac{x^2}{a} - y^2 = 1$ 的一渐近线方程是 $x + 2y = 0$, 则 $a =$ _____; 离心率是 _____.

12. 一个几何体的三视图如图所示, 则该几何体的表面积是 _____; 体积是 _____.



13. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 若二项式 $(a\sqrt{x} + 1)^n$ 的展开式中二项式系数和是 16, 所有项系数和是 81, 则 $n =$ _____; 含 x 项的系数是 _____.

14. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对边分别为 a, b, c , 且 $A \neq \frac{\pi}{2}$, $c + b \cos A - a \cos B = \sqrt{2} a \cos A$, 则 $\frac{b}{a} =$ _____; 内角 B 的取值范围是 _____.



第 12 题图

15. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7} = 1$, F 为其左焦点, 过原点 O 的直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 点 A 在第二象限, 且 $\angle FAB = \angle BFO$, 则直线 l 的斜率为 _____.

16. 已知非零平面向量 a, b, c , 满足 $a \cdot b = a^2, 3c = 2a + b$, 则 $\frac{b \cdot c}{|b| \cdot |c|}$ 的最小值是 _____.

17. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 若函数 $f(x) = \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + (1-a)x$ 在区间 $[-1, 1]$ 上单调递增, 则 $a+b$ 的最大值为 _____.

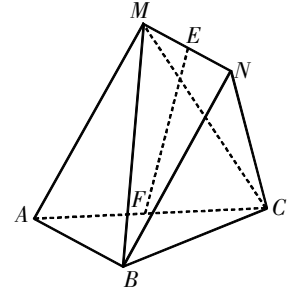
三、解答题 (本大题共 5 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

18. (本题满分 14 分) 已知函数 $f(x) = \sin x + a \cos x (a > 0)$ 满足 $[f(x)]^2 + [f(x + \frac{\pi}{2})]^2 = 4$.

(I) 求实数 a 的值.

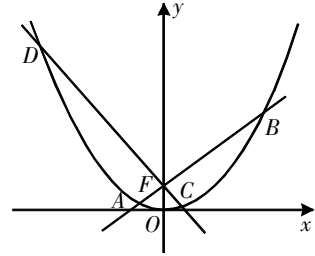
(II) 设 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 且 $f(\alpha) \cdot f(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \frac{2}{3}$, 求 $\sin 2\alpha$.

19. (本题满分 15 分)如图,在四棱锥 $C-ABNM$ 中,四边形 $ABNM$ 的边长均为 2, $\triangle ABC$ 为正三角形, $MB = \sqrt{6}$, $MB \perp NC$, E, F 分别为 MN, AC 中点.
- (I) 证明: $MB \perp AC$.
- (II) 求直线 EF 与平面 MBC 所成角的正弦值.



20. (本题满分 15 分)设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知: $a_5 = 2a_2 + 3$ 且 $a_2, \sqrt{S_9}, a_{14}$ 成等比数列.
- (I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
- (II) 设正项数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n^2 S_{n+1} = S_{n+1} + 2$, 求证: $b_1 + b_2 + \dots + b_n < n + 1$.

21. (本题满分 15 分)如图,已知抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 $F(0,1)$,过 F 的两条动直线 AB , CD 与抛物线交于 A 、 B 、 C 、 D 四点,直线 AB , CD 的斜率存在且分别是 $k_1(k_1>0), k_2$.
- (I)若直线 BD 过点 $(0,3)$,求直线 AC 与 y 轴的交点坐标.
- (II)若 $k_1-k_2=2$,求四边形 $ACBD$ 面积的最小值.



22. (本题满分 15 分)已知函数 $f(x)=ax^3-ax-x\ln x$. 其中 $a \in \mathbf{R}$.
- (I)若 $a=\frac{1}{2}$,证明: $f(x) \geq 0$.
- (II)若 $xe^{1-x} \geq 1-f(x)$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 上恒成立,求 a 的取值范围.