

# 浙江省柯桥中学 2020 年 3 月数学独立作业 3（教师版）

## 第 I 卷（选择题）

### 一、单选题

1. 设集合  $A = \{x | x > 3\}$ ,  $B = \left\{x \left| \frac{x-1}{x-4} \leq 0 \right.\right\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

- A.  $\emptyset$                       B.  $(3, 4]$                       C.  $(3, 4)$                       D.  $(4, +\infty)$

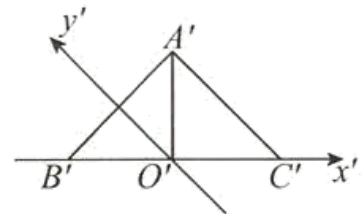
【答案】C

2. 若复数  $z$  满足  $z(1+i) = |1+\sqrt{3}i|$ , 则在复平面内  $z$  的共轭复数对应的点位于 ( )

- A. 第一象限                      B. 第二象限  
C. 第三象限                      D. 第四象限

【答案】A

3. 用斜二测画法画水平放置的  $\triangle ABC$  的直观图, 得到如图所示的等腰直角三角形  $\triangle A'B'C'$ . 已知点  $O'$  是斜边  $B'C'$  的中点, 且  $A'O' = 1$ , 则  $\triangle ABC$  的边  $BC$  边上的高为 ( )



- A. 1                      B. 2                      C.  $\sqrt{2}$                       D.  $2\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】【分析】在直观图中  $A'C' \parallel y'$  轴, 可知原图形中  $AC \parallel y$  轴, 故  $AC \perp BC$ ,

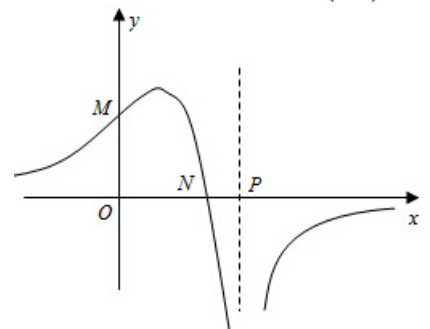
$A'C' = \frac{1}{2}AC$ , 求直观图中  $A'C'$  的长即可求解.

【详解】 $\because$  直观图是等腰直角三角形  $A'B'C'$ ,  $\angle B'A'C' = 90^\circ$ ,  $A'O' = 1$ ,  $\therefore$

$A'C' = \sqrt{2}$ , 根据直观图中平行于  $y$  轴的长度变为原来的一半,

$\therefore \triangle ABC$  的边  $BC$  上的高  $AC = 2A'C' = 2\sqrt{2}$ . 故选 D.

4. 函数  $f(x) = \frac{ax+b}{(x+c)^2}$  的图象如图所示, 则下列结论成立的是 ( )



- A.  $a > 0, b > 0, c < 0$                       B.  $a < 0, b > 0, c > 0$   
C.  $a < 0, b > 0, c < 0$                       D.  $a < 0, b < 0, c < 0$

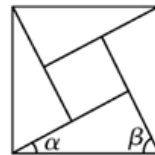
【答案】C

【解析】试题分析: 函数在  $P$  处无意义, 由图像看  $P$  在  $y$  轴右侧, 所以

$-c > 0, c < 0, f(0) = \frac{b}{c^2} > 0, \therefore b > 0$ , 由  $f(x) = 0, \therefore ax + b = 0$ , 即  $x = -\frac{b}{a}$ , 即函数的零点  $x = -\frac{b}{a} > 0 \therefore a < 0 \therefore a < 0, b > 0, c < 0$ , 故选 C.

5. 《周髀算经》中给出了弦图，所谓弦图是由四个全等的直角三角形和中间一个小正方形拼成一个大的正方形，若图中直角三角形两锐角分别为  $\alpha$ 、 $\beta$ ，

且小正方形与大正方形面积之比为 4:9，则  $\cos(\alpha - \beta)$  的值为



( )

- A.  $\frac{5}{9}$       B.  $\frac{4}{9}$       C.  $\frac{2}{3}$       D. 0

【答案】A

【详解】设大的正方形的边长为 1，由于小正方形与大正方形面积之比为 4:9，

可得:小正方形的边长为  $\frac{2}{3}$ ，

可得:  $\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{2}{3}$ , ①

$\sin \beta - \cos \beta = \frac{2}{3}$ , ②

由图可得:  $\cos \alpha = \sin \beta$ ,  $\sin \alpha = \cos \beta$ ,

①×②可得:  $\frac{4}{9} = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$= \sin^2 \beta + \cos^2 \beta - \cos(\alpha - \beta) = 1 - \cos(\alpha - \beta)$ ,

解得:  $\cos(\alpha - \beta) = \frac{5}{9}$ ,

故选:A.

6. 一个袋中放有大小、形状均相同的小球，其中红球 1 个、黑球 2 个，现随机等可能取出小球，当有放回依次取出两个小球时，记取出的红球数为  $\xi_1$ ；当无放回依次取出两个小球时，记取出的红球数为  $\xi_2$ ，则 ( )

- A.  $E\xi_1 < E\xi_2$ ,  $D\xi_1 < D\xi_2$       B.  $E\xi_1 = E\xi_2$ ,  $D\xi_1 > D\xi_2$   
C.  $E\xi_1 = E\xi_2$ ,  $D\xi_1 < D\xi_2$       D.  $E\xi_1 > E\xi_2$ ,  $D\xi_1 > D\xi_2$

【答案】B

【解析】【详解】

$\xi_1$  可能的取值为 0,1,2； $\xi_2$  可能的取值为 0,1，

$$P(\xi_1=0)=\frac{4}{9}, P(\xi_1=2)=\frac{1}{9}, P(\xi_1=1)=1-\frac{4}{9}-\frac{1}{9}=\frac{4}{9},$$

$$\text{故 } E\xi_1=\frac{2}{3}, D\xi_1=0^2\times\frac{4}{9}+2^2\times\frac{1}{9}+1^2\times\frac{4}{9}-\frac{4}{9}=\frac{4}{9}.$$

$$P(\xi_2=0)=\frac{2\times 1}{3\times 2}=\frac{1}{3}, P(\xi_2=1)=\frac{2\times 1\times 2}{3\times 2}=\frac{2}{3},$$

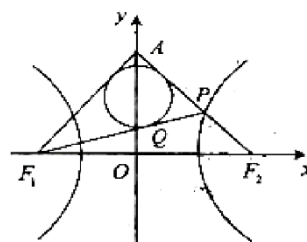
$$\text{故 } E\xi_2=\frac{2}{3}, D\xi_2=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9},$$

故  $E\xi_1=E\xi_2$ ,  $D\xi_1>D\xi_2$ . 故选 B.

7. 如图,  $F_1, F_2$  是双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1 (a > 0)$  的左、右焦点, 点  $P$  是双曲线上位于第一象限内的一点, 且直线  $F_2P$  与  $y$  轴的正半轴交于点  $A$ ,  $\triangle APF_1$  的内切圆与边

$PF_1$  切于点  $Q$ , 且  $|PQ|=4$ , 则双曲线  $C$  的离心率为 ( )

- A. 2      B.  $\frac{\sqrt{7}}{2}$       C.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$       D.  $\frac{\sqrt{19}}{4}$



【答案】D

【解析】【详解】  $PQ = PF_1 - F_1Q = PF_1 - F_1M = PF_1 - NF_2 = PF_1 - (PF_2 + PQ)$

$$\Rightarrow PQ = \frac{1}{2}(PF_1 - PF_2) = a, \text{ 所以 } a = 4, c^2 = 4^2 + 3 = 19, \text{ 故离心率 } e = \frac{\sqrt{19}}{4}.$$

故选: D

8. 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  满足

$$\sin 2A + \sin(A - B + C) = \sin(C - A - B) + \frac{1}{2}, \text{ 面积 } S \text{ 满足 } 1 \leq S \leq 2, \text{ 记 } a, b, c$$

分别为  $A, B, C$  所对的边, 则下列不等式一定成立的是 ( )

- A.  $bc(b+c) > 8$       B.  $ab(a+b) > 16\sqrt{2}$   
C.  $6 \leq abc \leq 12$       D.  $12 \leq abc \leq 24$

【答案】A

【详解】  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  满足

$$\sin 2A + \sin(A - B + C) = \sin(C - A - B) + \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } \sin 2A + \sin(A - B + C) + \sin(A + B - C) = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } \sin 2A + \sin[A - (B - C)] + \sin(A + B - C) = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } 2\sin A \cos A + 2\sin A \cos(B-C) = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } -2\sin A \cos(B+C) + 2\sin A \cos(B-C) = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } 2\sin A [\cos(B-C) - \cos(B+C)] = 4\sin A \sin B \sin C = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \sin A \sin B \sin C = \frac{1}{8},$$

$$\text{设 } \triangle ABC \text{ 的外接圆半径为 } R, \text{ 则 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 2R \sin A \times 2R \sin B \times \sin C = \frac{1}{4}R^2 \in [1, 2], \therefore 2 \leq R \leq 2\sqrt{2},$$

$$\therefore abc = 8R^3 \times \sin A \sin B \sin C = R^3 \in [8, 16\sqrt{2}], \text{ C、D 选项不一定正确;}$$

对于 A 选项, 由于  $b+c > a$ ,  $\therefore bc(b+c) > abc \geq 8$ , A 选项正确;

对于 B 选项,  $ab(a+b) > abc \geq 8$ , 即  $ab(a+b) > 8$  成立, 但  $ab(a+b) > 16\sqrt{2}$  不一定成立.

故选: A.

**9.** 已知不等式  $x \ln x + x(k - \ln 4) + k < 0$  的解集中仅有 2 个整数, 则实数  $k$  的取值范围是 ( )

A.  $\left(0, \frac{2}{3} \ln 2\right)$

B.  $\left(\frac{3}{4} \ln \frac{4}{3}, \frac{2}{3} \ln 2\right)$

C.  $\left[\frac{3}{4} \ln \frac{4}{3}, +\infty\right)$

D.  $\left[\frac{3}{4} \ln \frac{4}{3}, \frac{2}{3} \ln 2\right)$

**【答案】D**

**【详解】**

原不等式等价于  $k(x+1) < x \ln 4 - x \ln x$ , 设  $g(x) = k(x+1)$ ,  $f(x) = x \ln 4 - x \ln x$ ,

$$\therefore f'(x) = \ln 4 - (1 + \ln x) = \ln \frac{4}{x} - 1,$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x = \frac{4}{e}.$$

当  $0 < x < \frac{4}{e}$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增;

当  $x > \frac{4}{e}$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减.

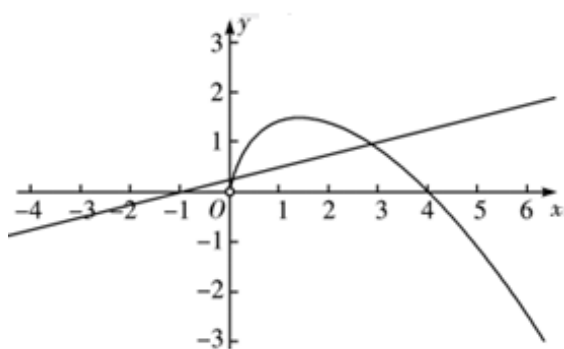
又  $f(4) = 0, x \rightarrow 0$  时,  $f(x) \rightarrow 0$  因此  $f(x)$  与  $g(x)$  的图像如下,

当  $k \leq 0$  时, 显然不满足条件,

当  $k > 0$  时, 只需满足  $\begin{cases} g(2) < f(2) \\ g(3) \geq f(3) \end{cases}$ ,

$$\therefore \begin{cases} k(2+1) < 2\ln 4 - 2\ln 2 \\ k(3+1) \geq 3\ln 4 - 3\ln 3 \end{cases}, \therefore \frac{3}{4}\ln \frac{4}{3} \leq k < \frac{2}{3}\ln 2.$$

故选: D.



**10.** 数列  $\{a_n\}$  共有 5 项, 满足  $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 \geq 0$ , 且对任意

$i, j (1 \leq i \leq j \leq 5)$ , 有  $a_i - a_j$  仍是该数列的某一项, 则下列命题中, 假命题的序号是

( )

A. 数列  $\{a_n\}$  中一定存在一项为 0

B. 存在  $1 \leq i < j \leq 5$ , 使得  $ia_i = ja_j$

C. 数列  $\{a_n\}$  一定是等差数列

D. 集合  $A = \{x | x = a_i + a_j, 1 \leq i < j \leq 5\}$  中元素个数为 15.

**【详解】** 根据题意: 对任意  $i, j (1 \leq i \leq j \leq 5)$ , 有  $a_i - a_j$  仍

是该数列的某一项,  $\therefore a_i - a_i = 0, \therefore$  当  $a_5 = 0$  时,

则  $a_4 - a_5 = a_4 \in \{a_n\}, (a_4 > 0)$ .

必有  $a_3 - a_4 = a_4$ , 即  $a_3 = 2a_4$ , 而  $a_2 - a_3 = a_3$  或  $a_4$ ,

若  $a_2 - a_3 = a_3$ , 则  $a_2 - a_4 = 3a_4$ , 而  $3a_4 \neq a_3, a_4, a_5$ , 舍去;

若  $a_2 - a_3 = a_4 \in \{a_n\}$ , 此时  $a_2 = 3a_4$ , 同理可得  $a_1 = 4a_4$ .

可得数列  $\{a_n\}$  为:  $4a_4, 3a_4, 2a_4, a_4, 0 (a_4 > 0)$ ;

据此分析选项: 易得 A、B、C 正确;

对于 D, 集合

$$A = \{x | x = a_i + a_j, 1 \leq i < j \leq 5\} = \{7a_4, 6a_4, 5a_4, 4a_4, 3a_4, 2a_4, a_4, 0 (a_4 > 0)\}$$

中共有 8 个元素, D 错误;

故选: D.

## 第 II 卷 (非选择题)

### 二、填空题

11. 若  $\left(x + \frac{a}{x^2}\right)^5$  的展开式中  $x^{-4}$  的系数是  $-80$ , 则  $a = \underline{\quad}$ , 二项式系数和为  $\underline{\quad}$ .

【答案】  $-2, 32$

【解析】 展开式的通项为  $C_5^r x^{5-r} \left(\frac{a}{x^2}\right)^r = C_5^r a^r x^{5-3r}$ ,

当  $5-3r = -4$  时,  $r = 3$ , 故  $C_5^3 a^3 = -80$ , 解得  $a = -2$ ,

故答案为:  $-2$

12. 设  $A, B, C, D$  是半径为 4 的球  $O$  表面上的四点,  $\triangle ABC$  是面积为  $9\sqrt{3}$  的等边三角形, 当三棱锥  $D-ABC$  体积最大时, 球心  $O$  到平面  $ABC$  的距离为  $\underline{\quad}$ , 此时三棱锥  $D-ABC$  的体积为  $\underline{\quad}$ .

【答案】  $2 \quad 18\sqrt{3}$

【详解】 设  $\triangle ABC$  所在的小圆的圆心为  $O_1$ , 因为  $\triangle ABC$  是面积为  $9\sqrt{3}$  的等边三角形, 所以有  $\frac{1}{2} \cdot AB^2 \cdot \sin 60^\circ = 9\sqrt{3} \Rightarrow AB = 6 \Rightarrow O_1B = \frac{1}{2} \frac{AB}{\sin 60^\circ} = 2\sqrt{3}$ , 当三棱锥

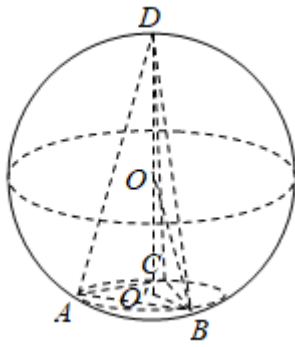
$D-ABC$  体积最大时, 球心  $O$  在  $DO_1$  上, 因此有

$OO' = \sqrt{OB^2 - O_1B^2} = \sqrt{16 - 12} = 2$ , 所以有  $DO_1 = 4 + 2 = 6$ , 三棱锥  $D-ABC$  的

体积为:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot DO' = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \cdot \sin 60^\circ \cdot DO' = 18\sqrt{3}.$$

故答案为:  $2; 18\sqrt{3}$



13. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \leq a \\ x-1, & x > a \end{cases}$ , 则当  $a=3$  时, 函数  $f(x)$  的值域是 \_\_\_\_\_; 又若函数  $f(x)$  恰有两个零点, 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_

【答案】:  $(-\infty, 1] \cup (2, +\infty)$ ,  $[0, 1) \cup [2, +\infty)$

14. 已知  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x-y-1 \leq 0 \\ x+y-4 \geq 0 \\ y-2 \leq 0 \end{cases}$ , 则  $\frac{y}{x}$  的取值范围为 \_\_\_\_\_,

$z = \frac{y^2 - x^2}{xy}$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.

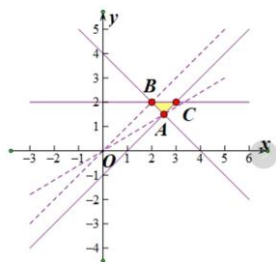
【答案】  $[\frac{3}{5}, 1], [-\frac{16}{15}, 0]$

【解析】 转化:  $z = \frac{y^2 - x^2}{xy} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$ , 令  $k = \frac{y}{x}$ ,  $z = k - \frac{1}{k}$ , 作出不等式组表示的平面

区域, 研究区域中得点  $(x, y)$  与坐标原点  $(0, 0)$  连线的斜率得取值范围即可.

【详解】

作出不等式组表示的平面区域, 如图所示:



$\frac{y}{x}$  表示点  $(x, y)$  与坐标原点  $(0, 0)$  连线的斜率, 由图得, 当直线经过点  $A(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$  时,

$\frac{y}{x}$  取得最小值为  $\frac{3}{5}$ ; 当直线经过点  $B(2, 2)$  时,  $\frac{y}{x}$  取得最大值为 1.

$$z = \frac{y^2 - x^2}{xy} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}, \text{ 令 } k = \frac{y}{x}, z = k - \frac{1}{k} \left( \frac{3}{5} \leq k \leq 1 \right)$$

$$\text{又因为 } z' = 1 + \frac{1}{k^2} > 0$$

因此函数  $z = k - \frac{1}{k} \left( \frac{3}{5} \leq k \leq 1 \right)$  单调递增,

因此: 当  $k=1$  时,  $z_{\max} = 0$ ; 当  $k = \frac{3}{5}$  时,  $z_{\min} = -\frac{16}{15}$

故答案为:  $[\frac{3}{5}, 1], [-\frac{16}{15}, 0]$

**15.** 十六个图钉组成如图所示的四行四列的方阵, 从中任取三个图钉, 则不在同一行也不在同一列的概率为\_\_\_\_\_.



**【答案】**  $\frac{6}{35}$  ( $\frac{33}{35}$  也给分)

**【详解】**

从 16 个图钉中任取 3 个共有  $C_{16}^3 = 560$  种取法;

三个图钉分别位于三行、三列的情况的数量:  $C_4^3 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$  种

**16.** 数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1 = \frac{4}{3}$ , 且  $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{4a_n}{3a_n + n} \ (n \in \mathbb{N}^*)$ , 则  $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \dots + \frac{2018}{a_{2018}}$

=\_\_\_\_\_.

**【答案】:**  $2017\frac{2}{3} + \frac{1}{3 \times 4^{2018}} = \frac{6053}{3} + \frac{1}{3 \times 4^{2018}}$

**17.** 已知  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  是平面内两个互相垂直的单位向量, 若向量  $\vec{c}$  满足  $|\vec{c} - \vec{a}| = \frac{1}{2}$ , 则

$|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| + 2|\vec{c} - \vec{b}|$  最小值为\_\_\_\_\_.



【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】建立坐标系，设  $A(1,0)$ ， $B(0,1)$ ， $D(1,1)$ ，设  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ，则

$|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| + 2|\vec{c} - \vec{b}| = CD + 2BC$ ，构造相似三角形，设  $E(1, \frac{1}{4})$ ，可得

$\triangle AEC \sim \triangle ACD$ ，所以

$$|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| + 2|\vec{c} - \vec{b}| = CD + 2BC = 2(BC + CE) \geq 2BE = \frac{5}{2}.$$

【详解】

如图， $A(1,0)$ ， $B(0,1)$ ， $D(1,1)$ ，设

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ，则向量  $\vec{c}$  满足  $|\vec{c} - \vec{a}| = \frac{1}{2}$ ，设

$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ ，所以点  $C$  为以  $A$  为圆心，以  $\frac{1}{2}$  为半径

的圆上的一点，

所以  $|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = |\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}| = |CD|$ ，同理

$$2|\vec{c} - \vec{b}| = 2|BC|,$$

取点  $E(1, \frac{1}{4})$ ，则  $\frac{AE}{AC} = \frac{AC}{AD}$ ，又因  $\angle CAE = \angle DAC$ ，

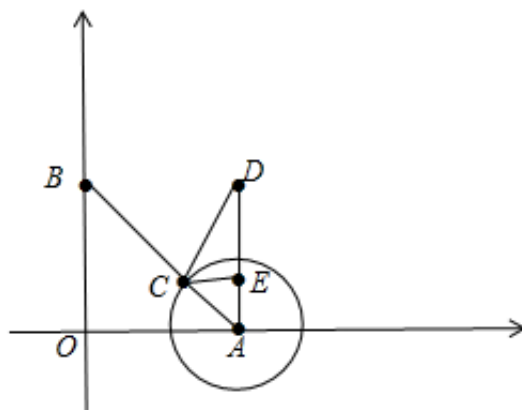
所以  $\triangle AEC \sim \triangle ACD$ ，

所以  $\frac{CE}{CD} = \frac{1}{2}$ ，即  $CD = 2CE$ ，

所以  $|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| + 2|\vec{c} - \vec{b}| = CD + 2BC = 2CE + 2BC = 2(BC + CE)$ ，

由三角形的三边关系知  $2(BC + CE) \geq 2BE = 2\sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = 2 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$ 。

故填： $\frac{5}{2}$ 。



### 三、解答题

18. 已知向量  $\vec{m} = (\cos x, \sin x)$ ， $\vec{n} = (\cos x, \sqrt{3}\cos x)$ ， $x \in \mathbb{R}$ ，设函数

$$f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n} + \frac{1}{2}.$$

(1) 求函数  $f(x)$  的解析式及单调递增区间；

(2) 设  $a, b, c$  分别为  $\triangle ABC$  内角  $A, B, C$  的对边, 若  $f(A) = 2$ ,

$b+c = 2\sqrt{2}$ ,  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{1}{2}$ , 求  $a$  的值.

**【答案】** (1)  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$ , 函数  $f(x)$  的单调递增区间为

$$\left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z} \quad (2) \quad a = \sqrt{3} - 1$$

**【解析】**

**【分析】**

(1) 由向量  $\vec{m} = (\cos x, \sin x)$ ,  $\vec{n} = (\cos x, \sqrt{3}\cos x)$ , 得  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$ ,

求得单调区间; (2) 由  $f(A) = 2$ , 得  $A = \frac{\pi}{6}$ , 又  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{1}{2}$ ,

$b+c = 2\sqrt{2}$ , 结合余弦定理, 求得  $a = \sqrt{3} - 1$

**【详解】**

$$(1) \quad f(x) = \cos^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x + \frac{1}{2} = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$$

$$\text{令 } 2x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}, \text{ 解得: } x \in \left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right],$$

$k \in \mathbb{Z}$ ;

所以函数  $f(x)$  的单调递增区间为  $\left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$ .

$$(2) \quad \because f(x) = \sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2, \therefore \sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

$$\because 0 < A < \pi, \therefore \frac{\pi}{6} < 2A + \frac{\pi}{6} < \frac{13\pi}{6}, \therefore 2A + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } A = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{由 } S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \text{ 得 } bc = 2,$$

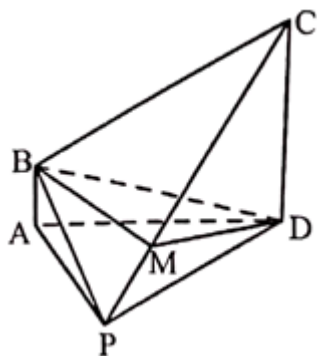
$$\text{又 } \because b+c = 2\sqrt{2} \quad \therefore \text{由余弦定理得 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc$$

$$\cos A = \frac{(b+c)^2 - 2bc(1+\cos A)}{2bc},$$

$$\text{解得 } a = \sqrt{3} - 1.$$

**19.** 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ ,  $AB = 1$ ,  $CD = 3$ ,  $AP = 2$ ,

$DP = 2\sqrt{3}$ ,  $\angle PAD = 60^\circ$ ,  $AB \perp$  平面  $PAD$ , 点  $M$  在棱  $PC$  上.



(1) 求证: 平面  $PAB \perp$  平面  $PCD$ ;

(2) 若  $\overline{CM} = 2\overline{MP}$ , 求直线  $BP$  与平面  $MBD$  所成角的正弦值.

**【答案】** (1) 证明见解析; (2)  $\frac{3}{5}$

**【详解】**

(1) 证明: 四棱锥  $P-ABCD$  中,  $AP = 2$ ,  $DP = 2\sqrt{3}$ ,  $\angle PAD = 60^\circ$ ,

由正弦定理可得  $\frac{DP}{\sin \angle PAD} = \frac{AP}{\sin \angle ADP}$ , 代入可得  $\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin \angle ADP}$

所以  $\sin \angle ADP = \frac{2 \sin 60^\circ}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

所以  $\angle ADP = 30^\circ$

则  $\angle DPA = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$

所以  $DP \perp AP$

因为四棱锥  $P-ABCD$  中,  $AB \perp$  平面  $PAD$

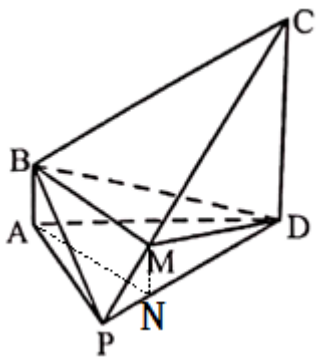
所以  $AB \perp DP$ , 且  $AP \cap AB = A$

所以  $DP \perp$  平面  $PAB$

由因为  $DP \subset$  平面  $PCD$

由平面与平面垂直的判定定理可得平面  $PAB \perp$  平面  $PCD$

(2) 作  $MN \perp PD$ , 连接  $AN$ , 如下图所示:



在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ ,  $AB=1$ ,  $CD=3$

由  $\overline{CM} = 2\overline{MP}$ , 可知  $PM : PC = 1 : 3$

由  $AB \perp$  平面  $PAD$ ,  $AB \parallel CD$  可得  $CD \perp$  平面  $PAD$

因为  $MN \perp PD$ , 所以  $MN \perp$  平面  $PAD$

可得  $MN = \frac{1}{3}CD = 1$

所以  $AB \parallel MN$ , 则四边形  $ABMN$  为矩形.

$$PN = \frac{1}{3}PD = \frac{2\sqrt{3}}{3}, DN = \frac{2}{3}PD = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{所以 } BM = AN = \sqrt{2^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}, DM = \sqrt{1^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{57}}{3}$$

$$\text{由 (1) 可得 } AD = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

由  $AB \perp$  平面  $PAD$ , 可得  $AB \perp AD$

$$\text{所以 } BD = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

$$\text{则在 } \triangle MBD \text{ 中, } BM = \frac{4\sqrt{3}}{3}, DM = \frac{\sqrt{57}}{3}, BD = \sqrt{17}$$

$$\text{由余弦定理可知 } \cos \angle DBM = \frac{BD^2 + BM^2 - DM^2}{2BD \cdot BM}$$

$$\text{代入可得 } \cos \angle DBM = \frac{(\sqrt{17})^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{57}}{3}\right)^2}{2 \times \sqrt{17} \times \frac{4\sqrt{3}}{3}} = \frac{2\sqrt{51}}{17}$$

所以由同角三角函数关系式可得  $\sin \angle DBM = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{51}}{17}\right)^2} = \frac{\sqrt{85}}{17}$

$$\text{所以 } S_{\triangle DBM} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot BM = \frac{1}{2} \times \sqrt{17} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{85}}{17} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$$

设点  $P$  到平面  $MBD$  的距离为  $h$

$$\text{由 } V_{B-PMD} = V_{P-BMD}$$

$$\text{则 } \frac{1}{3} \times S_{PMD} \times AP = \frac{1}{3} S_{BMD} \times h$$

$$\text{所以 } h = \frac{S_{PMD} \times AP}{S_{BMD}} = \frac{\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1 \times 2}{\frac{2\sqrt{15}}{3}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

设直线  $BP$  与平面  $MBD$  所成角为  $\alpha$ ,  $BP = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$$\text{则直线 } BP \text{ 与平面 } MBD \text{ 所成角的正弦值 } \sin \alpha = \frac{h}{BP} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}$$

**20.** 设各项均为正数的数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 满足  $4S_n = a_{n+1}^2 - 4n - 1, n \in N^*$ , 且  $a_2, a_5, a_{14}$  构成等比数列.

(1) 证明:  $a_2 = \sqrt{4a_1 + 5}$ ;

(2) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(3) 证明: 对一切正整数  $n$ , 有  $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} < \frac{1}{2}$ .

**【答案】** (1) 见解析 (2)  $a_n = 2n - 1$  (3) 见解析

**【解析】**

试题分析: (1) 令  $n = 1$ ,  $4a_1 = a_2^2 - 5$ , 即可证明  $a_2 = \sqrt{4a_1 + 5}$ ; (2) 由  $4S_n = a_{n+1}^2 - 4n - 1$  得到  $4S_{n-1} = a_n^2 - 4(n-1) - 1$ , 解得  $a_2 = 3$ , 再进而验证  $a_1 = 1$ , 即可求解数列  $\{a_n\}$  的通项公式; (3) 对于一切正整数  $n$ , 有  $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$ , 即可证明结论.

试题解析: (1) 令  $n = 1$ ,  $4a_1 = a_2^2 - 5$ ,  $\therefore a_2 = \sqrt{4a_1 + 5}$ .

(2)  $4S_n = a_{n+1}^2 - 4n - 1$ , ①

$$n \geq 2 \text{ 时, } 4S_{n-1} = a_n^2 - 4(n-1) - 1, \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2}: 4a_n = a_{n+1}^2 - a_n^2 - 4 = 0, \text{ 整理得 } a_{n+1} - a_n = 2,$$

$$a_5^2 = a_2 \cdot a_{14}, \therefore (a_2 + 3d)^2 = a_2(a_2 + 12d), \text{ 即 } (a_2 + 6)^2 = a_2(a_2 + 24), \text{ 解得 } a_2 = 3,$$

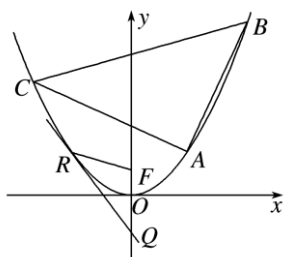
$$n \geq 2, a_n = 2n - 1, \text{ 又 } a_2 = \sqrt{4a_1 + 5}, \text{ 可得 } a_1 = 1,$$

综上:  $a_n = 2n - 1$ .

$$(3) \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i a_{i+1}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right) < \frac{1}{2}.$$

考点: 数列的综合应用.

**21.** 如图, 抛物线  $C: x^2 = 2py (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 以  $A(x_1, y_1) (x_1 \geq 0)$  为直角顶点的等腰直角  $\triangle ABC$  的三个顶点  $A, B, C$  均在抛物线  $C$  上.



(1) 过  $Q(0, -3)$  作抛物线  $C$  的切线  $l$ , 切点为  $R$ , 点  $F$  到切线  $l$  的距离为 2, 求抛物线  $C$  的方程;

(2) 求  $\triangle ABC$  面积的最小值.

**【答案】** (1)  $x^2 = 4y$  (2)  $4p^2$

**【解析】** 【详解】

(1) 过点  $Q(0, -3)$  的抛物线  $C$  的切线  $l: y = kx - 3$ ,

联立抛物线  $C: x^2 = 2py (p > 0)$ , 得  $x^2 - 2pkx + 6p = 0$ ,

$$\Delta = 4p^2k^2 - 4 \times 6p = 0, \text{ 即 } pk^2 = 6.$$

$$\because F\left(0, \frac{p}{2}\right), F \text{ 到切线 } l \text{ 的距离为 } d = \frac{\left|\frac{p}{2} + 3\right|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2,$$

$$\text{化简得 } (p+6)^2 = 16(k^2 + 1), \therefore (p+6)^2 = 16\left(\frac{6}{p} + 1\right) = \frac{16(p+6)}{p},$$

$$\because p > 0, \therefore p+6 > 0, \text{ 得 } p^2 + 6p - 16 = (p+8)(p-2) = 0,$$

$$\therefore p = 2, \therefore \text{抛物线方程为 } x^2 = 4y.$$

(2) 已知直线  $AB$  不会与坐标轴平行, 设直线  $AB: y - y_1 = t(x - x_1) (t > 0)$ ,

$$\text{联立抛物线方程得 } x^2 - 2ptx + 2p(tx_1 - y_1) = 0,$$

$$\text{则 } x_1 + x_B = 2pt, \quad x_B = 2pt - x_1,$$

$$\text{同理可得 } x_C = -\frac{2p}{t} - x_1;$$

$$\because |AB| = |AC|, \text{ 即 } \sqrt{1+t^2} |x_B - x_1| = \sqrt{1+\frac{1}{t^2}} |x_C - x_1|,$$

$$\therefore t(x_B - x_1) = x_1 - x_C, \text{ 即 } x_1 = \frac{p\left(t^2 - \frac{1}{t}\right)}{t+1},$$

$$\therefore |AB| = \sqrt{1+t^2} |x_B - x_1| = \sqrt{1+t^2} (2pt - 2x_1) = 2p \frac{\sqrt{1+t^2} (t^2 + 1)}{t(t+1)}.$$

$$\therefore \frac{t^2 + 1}{t} \geq 2 \quad (\text{当且仅当 } t = 1 \text{ 时, 等号成立}),$$

$$\frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t+1} = \sqrt{\frac{t^2 + 1}{t^2 + 2t + 1}} \geq \sqrt{\frac{t^2 + 1}{t^2 + 1 + t^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{当且仅当 } t = 1 \text{ 时等号成立}),$$

故  $|AB| \geq 2\sqrt{2}p$ ,  $\triangle ABC$  面积的最小值为  $4p^2$ .

**22.** 已知函数  $f(x) = \frac{e^x}{ax^2 + bx + 1}$ , 其中  $a > 0$ ,  $b \in R$ ,  $e$  为自然对数的底数.

(1) 若  $b = 1$ , 且当  $x \geq 0$  时,  $f(x) \geq 1$  总成立, 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 若  $b = 0$ , 且  $f(x)$  存在两个极值点  $x_1, x_2$ , 求证:

$$1 + \frac{3}{2a} < f(x_1) + f(x_2) < e.$$

**【答案】** (1)  $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ ; (2) 详见解析

**【解析】** (1) 若  $b=1$ ，且当  $x \geq 0$  时， $f(x) \geq 1$  总成立，分类讨论，确定函数的最小值，即可求实数  $a$  的取值范围；

(2) 求出函数的导数，构造新的函数，根据函数的单调性证明即可。

**【详解】**

$$(1) \text{ 当 } b=1, \text{ 则 } f(x) = \frac{e^x}{ax^2 + x + 1}, \quad f'(x) = \frac{e^x \cdot ax \cdot (x + \frac{1-2a}{a})}{(ax^2 + x + 1)^2},$$

当  $0 < a \leq \frac{1}{2}$  时， $f'(x) \geq 0$ ， $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增， $f(x) \geq f(0) = 1$ ；

当  $a > \frac{1}{2}$  时， $f(x)$  在  $[0, \frac{2a-1}{a}]$  上单调递减，

在  $[\frac{2a-1}{a}, +\infty)$  上单调递增，

$$f(x)_{\min} = f(\frac{2a-1}{a}) < f(0) = 1, \text{ 不成立，}$$

$$\therefore 0 < a \leq \frac{1}{2} \text{ 即 } a \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$$

$$(2) \text{ 当 } b=0 \text{ 时， } f(x) = \frac{e^x}{ax^2 + 1}, f'(x) = \frac{e^x(ax^2 - 2ax + 1)}{(ax^2 + 1)^2},$$

因为  $f(x)$  存在两个极值点， $4a^2 - 4a > 0$  即  $a > 1$

有条件知  $x_1, x_2$  为  $ax^2 - 2ax + 1 = 0$  两根， $x_1 + x_2 = 2, x_1 x_2 = \frac{1}{a}$ ，

不妨设  $x_1 < x_2$  则  $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$

$$f(x_1) + f(x_2) = \frac{e^{x_1}}{ax_1^2 + 1} + \frac{e^{x_2}}{ax_2^2 + 1} = \frac{e^{x_1}}{2ax_1} + \frac{e^{x_2}}{2ax_2} = \frac{e^{x_1} \cdot x_2 + e^{x_2} \cdot x_1}{2},$$

由 (1) 知当  $b=1, a = \frac{1}{2}, x \geq 0$ ， $\frac{e^x}{ax^2 + x + 1} \geq 1$ ，即  $e^x \geq \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ （当且仅

当  $x=0$  取等号）

所以当  $x > 0$  时，恒有  $e^x > \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

$$f(x_1) + f(x_2) > \frac{1}{2} \left[ x_1 \left( \frac{1}{2}x_2^2 + x_2 + 1 \right) + x_2 \left( \frac{1}{2}x_1^2 + x_1 + 1 \right) \right]$$



$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} x_1 x_2 (x_1 + x_2 + 4) + x_1 + x_2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{6}{2a} + 2 \right)$$

$$= \frac{3}{2a} + 1$$

$$\text{又 } f(x_1) + f(x_2) = \frac{x_1 e^{x_2} + x_2 e^{x_1}}{2} = \frac{1}{2} [x_1 e^{2-x_1} + (2-x_1) e^{x_1}]$$

$$\text{令 } h(x) = x e^{2-x} + (2-x) e^x \quad (0 < x < 1)$$

$$\text{则 } h'(x) = (1-x)(e^x + e^{2-x}) > 0$$

所以  $h(x)$  在  $(0,1)$  上递增,  $h(x) < h(1) = 2e$ , 从而  $f(x_1) + f(x_2) < e$

综上所述可得:  $1 + \frac{3}{2a} < f(x_1) + f(x_2) < e$