

浙江省十校联盟 2020 届高三寒假返校联考

数学试题卷

注意事项：

- 本科考试分为试题卷和答题卷，考生须在答题卷上答题。
- 答题前，请在答题卷的规定处用黑色字迹的签字笔或钢笔填写学校、班级、姓名和准考证号。
- 选择题的答案须用 2B 铅笔将答题纸上对应题目的答案标号涂黑。
- 试卷分为选择题（第I卷）和非选择题（第II卷）两部分，共 4 页。全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

参考公式：

$$\text{锥体的体积公式 } V = \frac{1}{3} Sh$$

其中 S 表示锥体的底面积， h 表示锥体的高
棱台的体积公式

$$V = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

其中 S_1, S_2 分别表示棱台的上、下底面积，
 h 表示棱台的高

$$\text{柱体的体积公式 } V = Sh$$

其中 S 表示柱体的底面积， h 表示柱体的高
球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径

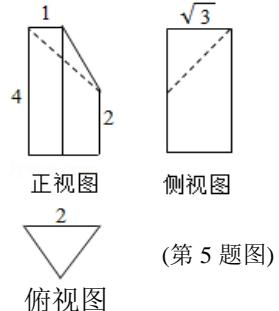
第 I 卷：选择题（共 40 分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的 4 个选项中，只有一项符合题目要求。

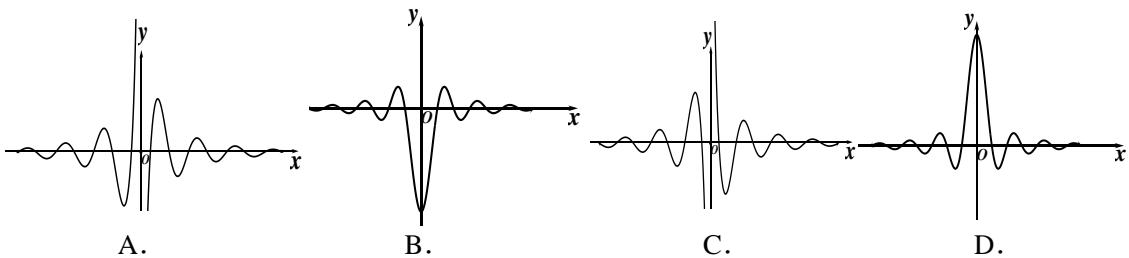
- 设集合 $A = \{x | x^2 - 3x - 4 > 0\}$, $B = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$ ，则 $(C_R A) \cap B =$
A. R B. $[-1, 3]$ C. $[-2, -1]$ D. $[-2, 4]$
- 已知双曲线的上下焦点分别为 $F_1(0, -3)$, $F_2(0, 3)$, P 是双曲线上一点且 $\|PF_1| - |PF_2|\|=4$ ，则双曲线的标准方程为
A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ B. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ C. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$ D. $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} = 1$
- 已知两非零复数 z_1, z_2 ，若 $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}$ ，则一定成立的是
A. $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$ B. $z_1 \cdot \bar{z}_2 \in \mathbb{R}$ C. $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$ D. $\frac{\bar{z}_1}{z_2} \in \mathbb{R}$
- 已知 $a, b \in \mathbb{R}$ ，则“ $|a| \leq 1$ ”是“ $|a - b| + |b| \leq 1$ ”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 某几何体 三视图如图所示 (单位: cm), 其俯视图为等边三角形, 则该几何体的体积 (单位: cm^3) 是

- A. $\frac{10}{3}\sqrt{3}$
 B. $4\sqrt{3}$
 C. $\frac{8}{3}\sqrt{3}$
 D. $2\sqrt{3}$



6. 已知函数 $f(x) = \frac{2^x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + 6x\right)}{4^x - 1}$, 则 $f(x)$ 的图象大致是



7. 设 $\frac{1}{2} < p < 1$, 相互独立的两个随机变量 ξ, η 的分布列如下表:

| | | |
|-------|---------------|---------------|
| ξ | -1 | 1 |
| p | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

| | | |
|--------|-------|-----|
| η | -1 | 1 |
| p | $1-p$ | p |

则当 p 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内增大时

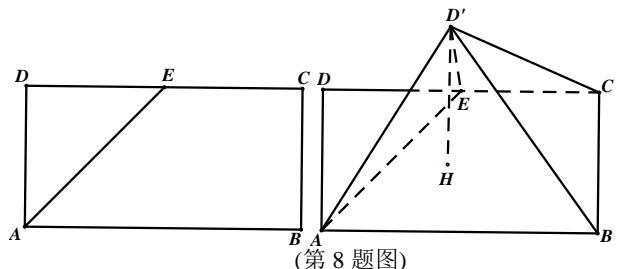
- A. $E(\xi + \eta)$ 减小, $D(\xi + \eta)$ 增大
 C. $E(\xi + \eta)$ 增大, $D(\xi + \eta)$ 增大
 8. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2AD = 4$,
 E 为 CD 的中点, $\triangle ADE$ 沿着 AE 向上翻折, 使点 D 到 D' . 若 D' 在平面 $ABCD$ 上的投影 H 落在梯形 $ABCE$ 内部 (不含边界), 设二面角 $D'-BC-E$ 的大小为 α , 直线 $D'C, D'B$ 与平面 ABC 所成角分别为 β, γ , 则
 A. $\alpha < \beta < \gamma$ B. $\beta < \alpha < \gamma$
 C. $\beta < \gamma < \alpha$ D. $\gamma < \beta < \alpha$

9. 已知 $a > b > 0$, 给出下列命题:

- ①若 $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 1$, 则 $a - b < 1$;
 ③若 $e^a - e^b = 1$, 则 $a - b < 1$;

其中真命题的个数是

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4



- ②若 $a^3 - b^3 = 1$, 则 $a - b < 1$;
 ④若 $\ln a - \ln b = 1$, 则 $a - b < 1$.

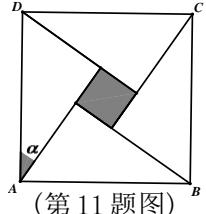
10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数且满足 $2a_n^2 - 3a_n = a_{n-1}$ ($n \in N^*, n \geq 2$)， S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则下列选项中错误的一项是

- A. 若 $\{a_n\}$ 单调递增，则 $0 < a_1 < 2$
 B. 若 $a_1 = 1$ ，则 $2^{\frac{3}{4}} < a_3 < 2$
 C. 若 $a_1 \neq 2$ ，则 $(2a_2 + 1)(2a_3 + 1) \cdots (2a_n + 1) = \frac{a_1 - 2}{a_n - 2}$ ($n \geq 2$)
 D. 若 $a_1 = 3$ ，则 $S_n \geq \frac{3(3n+1)}{4}$

第 II 卷：非选择题（共 110 分）

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。

11. 我国古代数学家赵爽利用“勾股圆方图”巧妙地证明了勾股定理，成就了我国古代数学的骄傲，后人称之为“赵爽弦图”。如图，它是由四个全等的直角三角形和中间的一个小正方形拼成的一个大正方形，若直角三角形中较小的锐角记为 α ，大正方形的面积为 25，小正方形的面积为 1，则 $\sin \alpha = \text{▲}$ ， $\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = \text{▲}$ 。



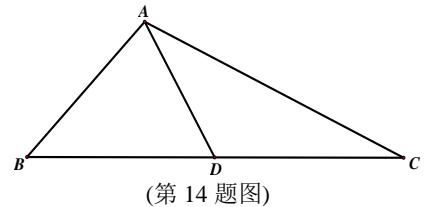
(第 11 题图)

12. 已知直线 $l: y = kx$ 被圆 $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ 截得的弦长为 $\sqrt{7}$ ，则 $k = \text{▲}$ ，圆 C 上到直线 l 的距离为 1 的点有 ▲ 个。

13. (1) 若二项式 $\left(x - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$ ($n \in N^*$) 的展开式中存在常数项，则 n 的最小值为 ▲ ；

- (2) 从 6 名志愿者中选出 4 人，分别参加两项公益活动，每项活动至少有 1 人，则不同安排方案的种数为 ▲ 。（用数字作答）

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $b = 4\sqrt{5}, c = 5, B = 2C$ ，则 $\cos C = \text{▲}$ ，点 D 为边 BC 上一点，且 $BD = 6$ ，则 $\triangle ADC$ 的面积为 ▲ 。



(第 14 题图)

15. 已知 F 是椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左焦点， A, B 是椭圆 C 上的两个相异动点，若 AB 中点的横坐标为 1，则 F 到直线 AB 距离的最小值为 ▲ 。

16. 已知平面向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = 1$ ，且 $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 1$ ，则 $|\vec{a} - \vec{b}|$ 的取值范围为 ▲ 。

17. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax$ ($a < 0, a \in R$)，若函数 $f(x)$ 有三个互不相同的零点 $0, t_1, t_2$ ，其中 $t_1 < t_2$ ，若对任意的 $x \in [t_1, t_2]$ ，都有 $f(x) \leq a + 14$ 成立，则实数 a 的最小值为 ▲ 。

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

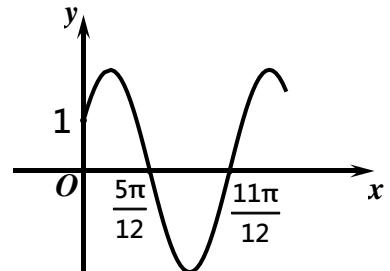
18. (本题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($x \in R, A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$)

的部分图象如图所示。

- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

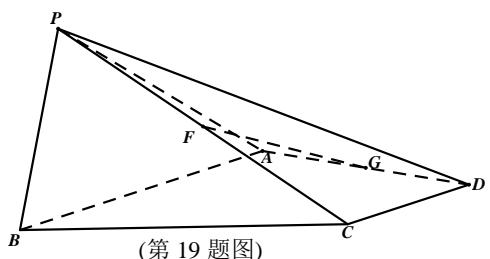
- (2) 求函数 $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{12}\right) - f\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$ 的单调递增区间。



(第 18 题图)

19. (本题满分 15 分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\triangle PAB$ 是等边三角形, 底面 $ABCD$ 是直角梯形, $AB \parallel CD$, $AB \perp AD$, $AB = BC = 2$, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, F, G 分别是 PC, AD 的中点.

- (1) ①求证: $FG \parallel$ 平面 PAB ;
- ②求线段 FG 的长度;
- (2) 若 $PC = 3$, 求直线 FG 与平面 PBC 所成角的正弦值.



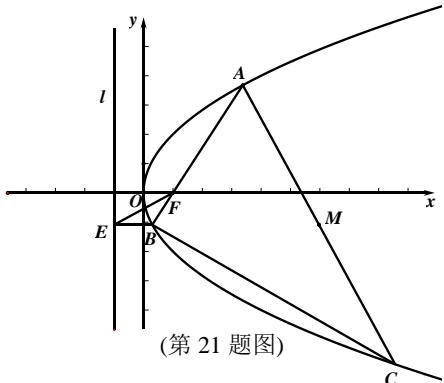
(第 19 题图)

20. (本题满分 15 分) 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 a_n 是 S_n 和 S_{n+1} 的等差中项.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 记 $b_k = a_k \cdot (a_k + a_{k+1} + \dots + a_n)$ ($1 \leq k \leq n$),
 - ①求数列 $\{b_k\}$ ($1 \leq k \leq n$) 的前 n 项和 T_n ;
 - ②设 $M = \frac{2}{T_1} + \frac{2^2}{T_2} + \dots + \frac{2^n}{T_n}$ ($n \in N^*$), 求证: $\frac{1}{2} \leq M < \frac{3}{4}$.

21. (本题满分 15 分) 如图, 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l , 过点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点, 点 B 在准线 l 上的投影为 E , 若 C 是抛物线上一点, 且 $AC \perp EF$.

- (1) 证明: 直线 BE 经过 AC 的中点 M ;
- (2) 求 $\triangle ABC$ 面积的最小值及此时直线 AC 的方程.



22. (本题满分 15 分) 已知函数 $f(x) = x - \frac{1}{2} \sin x - \frac{m}{2} \ln x + 1$, 其中 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数.

- (1) 证明: 当 $m=2$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一零点;
- (2) 存在 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) = f(x_2)$, 求证: $x_1 \cdot x_2 < m^2$.

浙江省十校联盟 2020 届高三寒假返校联考

数学参考答案

一、选择题

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| B | C | D | B | A | C | D | C | B | D |

二、填空题

11. $\frac{3}{5}, \frac{2\sqrt{10}}{5}$; 12. $-\frac{3}{4}, 3$; 13. $3, 210^\circ$; 14. $\frac{2\sqrt{5}}{5}, 10^\circ$;
 15. $\frac{\sqrt{15}}{2}$; 16. $\left[\frac{\sqrt{13}-1}{2}, \frac{\sqrt{13}+1}{2} \right]$; 17. -9 .

三、解答题

18. 解:

$$(1) \because \frac{T}{2} = \frac{11\pi}{12} - \frac{5\pi}{12}, \therefore T = \pi, \omega = 2 \dots 2 \text{分}$$

$$\begin{cases} A \sin \varphi = 1 \\ 2 \times \frac{5\pi}{12} + \varphi = \pi \end{cases} \Rightarrow A = 2, \varphi = \frac{\pi}{6} \dots 5 \text{分}$$

$$\therefore f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \dots 6 \text{分}$$

$$(2) f\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 2 \sin 2x, f\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \dots 8 \text{分}$$

$$g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{12}\right) - f\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 2 \left(\sin 2x - \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \right) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \dots 10 \text{分}$$

$$\therefore 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \dots 12 \text{分}$$

$$\text{解得单调递增区间: } \left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12} \right], k \in \mathbb{Z} \dots (14 \text{ 分})$$

19. 证明:

(I) ①取 BC 中点 I , 则 $GI \parallel AB$, $FI \parallel PB \dots (2 \text{ 分})$

$\because GI \cap FI = I$, $AB \cap PB = B$, $\therefore \text{平面 } GFI \parallel \text{平面 } PAB$,

$\therefore FG \parallel \text{平面 } PAB \dots (4 \text{ 分})$

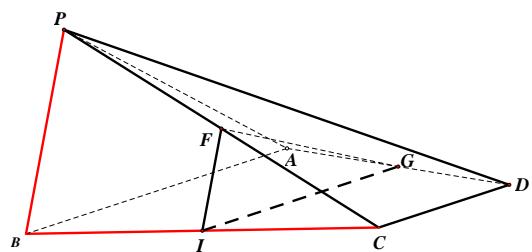
②由①可知:

$$FI = 1, IG = \frac{3}{2}, \angle FIG = \angle PBA = 60^\circ$$

由余弦定理得到:

$$FG = \sqrt{1 + \frac{9}{4} - 2 \times 1 \times \frac{3}{2} \times \cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

... (7 分)



822300162

(2) 解法一: $\because PO=OC=\sqrt{3}$, $PC=3$, $\therefore \angle POC=120^\circ$, ... (8分)
 又 $EO \perp AB$, $OC \perp AB$, $\therefore AB \perp \text{平面 } POC$,
 $\therefore \text{平面 } POC \perp \text{平面 } ABC$, ... (10分)

延长 CO 到 H , 使得 $PH \perp OH$, 则 $PH \perp \text{面 } ABC$, $PH = \frac{3}{2}$

$$\because PB=BC=2, PC=3, \therefore S_{\triangle PBC} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$$

$$\because G \text{ 是 } AD \text{ 的中点}, S_{\triangle AGBC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

G 到平面 PBC 的距离设为 h ,
 体积法求得:

$$h \times \frac{3\sqrt{7}}{4} = \frac{3}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{4}, \therefore h = \frac{3\sqrt{21}}{14}, \dots (14 \text{ 分})$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{h}{FG} = \frac{3\sqrt{3}}{7} \dots (15 \text{ 分})$$

解法二: $\because PO=OC=\sqrt{3}$, $PC=3$,

$\therefore \angle POC=120^\circ$, ... (8分)

又 $EO \perp AB$, $OC \perp AB$, $\therefore AB \perp \text{平面 } POC$,

$\therefore \text{平面 } POC \perp \text{平面 } ABC$, ... (10分)

以 O 为坐标原点建立空间坐标系, 得到

$$B(1,0,0), C(0,0,\sqrt{3}), G\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right),$$

延长 CO 到 H , 使得 $PH \perp OH$,

$$\text{则 } PH \perp \text{面 } ABC, PH = \frac{3}{2}$$

$$\text{则 } P\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right), F\left(0, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}\right), \dots (12 \text{ 分})$$

$$\therefore \overrightarrow{FG} = \left(-1, \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}\right), \text{ 由于 } \overrightarrow{PB} = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right), \overrightarrow{BC} = (-1, \sqrt{3}, 0)$$

$$\text{则法向量 } \vec{v} = (\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}) \dots (14 \text{ 分})$$

$$\therefore \text{直线 } FG \text{ 与平面 } PBC \text{ 所成角的正弦值为 } \frac{|\overrightarrow{FG} \cdot \vec{v}|}{|\overrightarrow{FG}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{3\sqrt{3}}{7} \quad (15 \text{ 分})$$

20. 解:

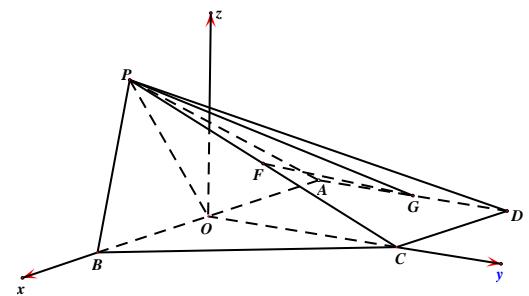
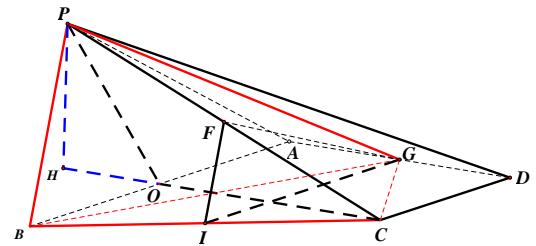
(1) $\because a_n$ 是 S_n 和 的等差中项, $\therefore S_n + 2 = 2a_n$, ①... (1分)

当 $n=1$ 时, $S_1 + 2 = 2a_1$, 解得 $a_1 = 2$.

当 $n \in N^*, n \geq 2$ 时, $S_{n-1} + 2 = 2a_{n-1}$ ($n \geq 2$). ②

① - ② 得 $S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2a_{n-1}$ ($n \geq 2$),

$$\therefore a_n = 2a_n - 2a_{n-1}, \therefore \frac{a_n}{a_{n-1}} = 2 (n \geq 2).$$



\therefore 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, $\therefore a_n = 2^n (n \in N^*)$ (5 分)

(2) ① 记 $b_k = a_k \cdot (a_k + a_{k+1} + \dots + a_n) (1 \leq k \leq n)$,

$$b_k = 2^k \cdot (2^k + 2^{k+1} + \dots + 2^n) \dots \text{(6 分)}$$

$$= 2^k \cdot \left(\frac{2^k (1 - 2^{n-k+1})}{1 - 2} \right)$$

$$= 2^{n+k+1} - 2^{2k} \dots \text{(9 分)}$$

数列 $\{b_k\} (1 \leq k \leq n)$ 的前 n 项和:

$$T_n = 2^n (2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n+1}) - (4 + 4^2 + \dots + 4^n)$$

$$\therefore T_n = 2^{n+2} \cdot (2^n - 1) - \frac{4}{3} (2^n - 1)(2^n + 1)$$

$$\therefore T_n = \frac{4}{3} (2 \cdot 2^{2n} - 3 \cdot 2^n + 1), \dots \text{(11 分)}$$

② 方法一: 进一步得到: $T_n = \frac{4}{3} (2^n - 1)(2^{n+1} - 1)$,

$$\therefore \frac{2^n}{T_n} = \frac{3 \cdot 2^n}{4(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right)$$

$$\therefore M = \frac{2}{T_1} + \frac{2^2}{T_2} + \dots + \frac{2^n}{T_n} = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right), \dots \text{(13 分)}$$

$$\because 2^{n+1} - 1 \geq 3, \therefore \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right) < \frac{3}{4}.$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \leq M < \frac{3}{4}. \dots \text{(15 分)}$$

$$\text{或: } \because \frac{2^n}{T_n} > 0, \therefore M \geq \frac{2}{T_1} = \frac{1}{2} \dots \text{(1 分)}$$

(若学生用数学归纳法证明, 要注意格式正确酌情给予一定的步骤分。)

21. 解:

(1) 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 $F(1, 0)$, 准线方程为 $x = -1$, ... (2 分)

设 $B(t^2, 2t)$, 直线 $AB: x = my + 1$,

则 $E(-1, 2t)$

联立 $x = my + 1$ 和 $y^2 = 4x$,

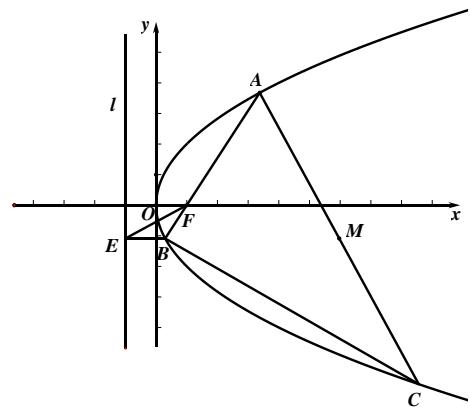
可得 $y^2 = 4my + 4$,

显然 $y_A y_B + 4 = 0$. 可得 $A\left(\frac{1}{t^2}, -\frac{2}{t}\right)$,

... (4 分)

因为 $k_{EF} = -t$, $AB \perp EF$, 所以 $k_{AC} = \frac{1}{t}$,

故直线 $AC: y + \frac{2}{t} = \frac{1}{t}\left(x - \frac{1}{t^2}\right)$ (6 分)



$$\text{由} \begin{cases} y^2 = 4x \\ x - ty - 2 - \frac{1}{t^2} = 0 \end{cases}, \text{ 得 } y^2 - 4ty - 8 - \frac{4}{t^2} = 0. \dots (8 \text{ 分})$$

$$\therefore y_A + y_C = 4t, y_A y_C = -8 - \frac{4}{t^2}$$

所以 AC 的中点 M 的纵坐标 $y_M = 2t$, 即 $y_M = y_B$
所以直线 BE 经过 AC 的中点 M 。... (10 分)

$$(2) \text{ 所以 } |AC| = \sqrt{1+t^2} |y_A - y_C| = \sqrt{1+t^2} \sqrt{(y_A + y_C)^2 - 4y_A y_C} \\ = 4\sqrt{1+t^2} \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2} + 2} \dots (12 \text{ 分})$$

$$\text{设点 } B \text{ 到直线 } AC \text{ 的距离为 } d, \text{ 则 } d = \frac{\left| t^2 - 2t^2 - \frac{1}{t^2} - 2 \right|}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{t^2 + \frac{1}{t^2} + 2}{\sqrt{1+t^2}}.$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AC| \cdot d = 2 \sqrt{\left(t^2 + \frac{1}{t^2} + 2 \right)^3} \geq 2\sqrt{(2+2)^3} = 16, \dots (14 \text{ 分})$$

当且仅当 $t^4 = 1$. 即 $t = \pm 1$,

$t=1$ 时, 直线 AD 的方程为: $x-y-3=0$.

$t=-1$ 时, 直线 AD 的方程为: $x+y-3=0$ (15 分)

另解:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |BM| \cdot |y_A - y_C| = \frac{1}{2} \left| 2t^2 + 2 + \frac{1}{t^2} - t^2 \right| \cdot \sqrt{16 \left(t^2 + 2 + \frac{1}{t^2} \right)} \\ = 2 \left(t^2 + \frac{1}{t^2} + 2 \right)^{\frac{3}{2}}$$

22. 证明:

$$(1) \text{ 当 } m=2 \text{ 时, } f(x) = x - \frac{1}{2} \sin x - \ln x + 1, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{x} \dots (3 \text{ 分})$$

$$\text{当 } x \in (0, \pi) \text{ 时, } f'(x) \text{ 为增函数, 且 } f'(\frac{\pi}{3}) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{\pi} = \frac{3}{4} - \frac{3}{\pi} < 0, f'(\pi) = \frac{3}{2} - \frac{1}{\pi} > 0,$$

$\therefore f'(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有唯一零点; ... (5 分)

$$\text{当 } x \in [\pi, +\infty) \text{ 时, } f'(x) = 1 - \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{x} \geq 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} > 0$$

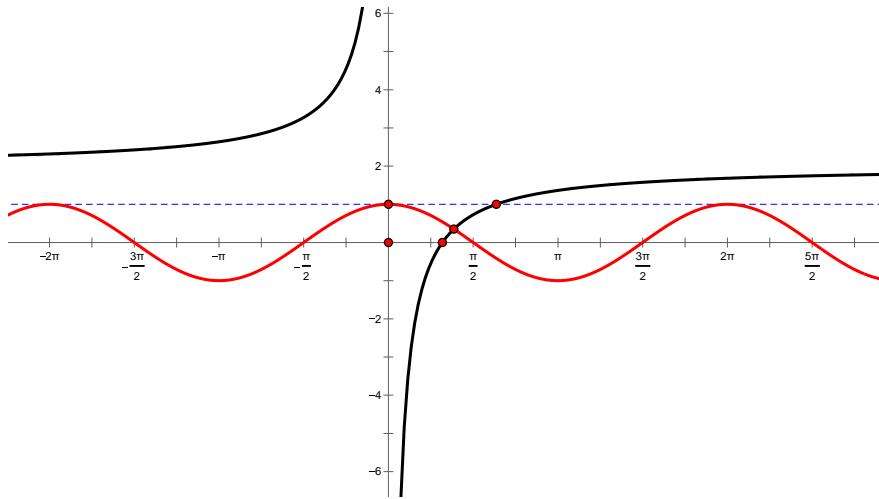
$\therefore f'(x)$ 在 $[\pi, +\infty)$ 上没有零点。

综上知, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一零点。... (7 分)

$$\text{另证: } 1 - \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \cos x = 2 - \frac{2}{x}$$

结合图像证明, 需要说明两点: ①当 $x \in (0, 2]$ 时, 有唯一交点, 即方程有唯一解, 函数有唯一零点;

②当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $\cos x \leq 2, 2 - \frac{2}{x} > 1$, 所以图像没有交点即及方程无解, 函数没有零点。



(2) 证明: 不妨设 $0 < x_1 < x_2$, 由 $f(x_1) = f(x_2)$ 得

$$x_1 - \frac{1}{2} \sin x_1 - \frac{m}{2} \ln x_1 + 1 = x_2 - \frac{1}{2} \sin x_2 - \frac{m}{2} \ln x_2 + 1$$

$$\therefore \frac{m}{2} (\ln x_2 - \ln x_1) = x_2 - x_1 - \frac{1}{2} (\sin x_2 - \sin x_1) \dots (9 \text{ 分})$$

设 $g(x) = x - \sin x$, 则 $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, 故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

$$\therefore x_2 - \sin x_2 > x_1 - \sin x_1, \text{ 从而 } x_2 - x_1 > \sin x_2 - \sin x_1$$

$$\therefore \frac{m}{2} (\ln x_2 - \ln x_1) = x_2 - x_1 - \frac{1}{2} (\sin x_2 - \sin x_1) > \frac{1}{2} (x_2 - x_1)$$

$$\therefore m > \frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} \dots (11 \text{ 分})$$

要证: $x_1 \cdot x_2 < m^2$ 只要证 $m > \sqrt{x_1 \cdot x_2}$

$$\text{下面证明: } \frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} > \sqrt{x_1 x_2} \dots (13 \text{ 分})$$

(直接用对数均值不等式但不证明下面两分不给)

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{x_2}{x_1} - 1}{\ln \frac{x_2}{x_1}} > \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$$

令 $t = \frac{x_2}{x_1}$, 则 $t > 1$, 即证明 $\frac{t-1}{\ln t} > \sqrt{t}$, 只要证明: $\ln t - \frac{t-1}{\sqrt{t}} < 0 \dots (14 \text{ 分})$

设 $h(t) = \ln t - \frac{t-1}{\sqrt{t}}$, $h'(t) = -\frac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}} < 0$, 则 $h(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减,

当 $t > 1$ 时, $h(t) < h(1) = 0$, 从而 $\ln t - \frac{t-1}{\sqrt{t}} < 0$ 得证, 即 $\frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} > \sqrt{x_1 x_2}$

$$\therefore m > \sqrt{x_1 x_2}, \text{ 即 } x_1 \cdot x_2 < m^2 \dots (15 \text{ 分})$$