

## 温岭中学 2020 年 3 月模拟测试

### 高三数学试卷全解析

1. 答案: C 解析:  $A \cap C = \{1, 2, 3\}$ ,  $(A \cap C) \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ , 所以选 C。

2. 答案: D 解析:  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{b-a}{ab} < 0 \Leftrightarrow ab(a-b) > 0$ , 故选 D。

3. 答案: C 解析: 由题意,  $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 + (\tan 70^\circ)^2 = \frac{1}{\cos^2 70^\circ} = \frac{1}{\sin^2 20^\circ}$ ,  
所以  $e = \frac{1}{\sin 20^\circ}$ , 故选 C。

4. 答案: B 解析: 根据三视图得直观图, 计算可得  $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (1+2) \times 2 \times 1 = 1$ , 故选 B。

5. 答案: B 方法一: 作出  $\begin{cases} |y| \leq 2-x, \\ |x| \leq 1 \end{cases}$  对应的线性区域, 再找目标函数  $b = 2x + y$  的最小值。

方法二: 因为  $|x| \leq 1$ , 所以  $2-x \geq 0$ , 所以  $x-2 \leq y \leq 2-x$ ,

所以  $2x + y \geq 2x + x - 2 = 3x - 2 \geq -5$ , 当且仅当  $x = -1$  时等号成立。故答案为 B。

6. 答案: A 解析:  $f(x) = \ln\left(\frac{2}{1-x} + a\right)$  为奇函数, 所以  $f(-x) + f(x) = 0$ , 即

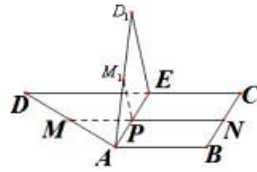
$\ln\left(\frac{2}{1-x} + a\right) + \ln\left(\frac{2}{1+x} + a\right) = 0$  恒成立, 即  $\ln \frac{(2+a)^2 - a^2 x^2}{1-x^2} = 0$  恒成立, 即  $\frac{(2+a)^2 - a^2 x^2}{1-x^2} = 1$  恒

成立, 即  $(a^2 - 1)x^2 = (2+a)^2 - 1$  恒成立, 所以  $a = -1$ 。此时  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ , 定义域为  $(-1, 1)$ , 由

$f(x) < 1$  得  $\frac{1+x}{1-x} < e$ , 解得  $x < \frac{e-1}{e+1}$ , 所以  $-1 < x < \frac{e-1}{e+1}$ , 故选 A。

7. 答案: B 解析:  $E\xi = 2a + 3b + 4c$ ,  $E\eta = 4a + 3b + 2c$ ,  $E\xi - E\eta = 2(c-a) > 0$ ,  
所以  $E\xi > E\eta$ ; 又  $\xi + \eta = 6$ , 所以  $D\xi = D(6-\eta) = D\eta$ , 故选 B。

8. 答案: D 解析: 连接  $MN$  交  $AE$  于点  $P$ , 则  $M_1$  的轨迹就是以  $P$  为圆心,  $PM$  长为半径的圆, 且该圆所在的平面与直线  $AE$  垂直。①当  $M_1$  位于  $PN$  中点时,  $|M_1N|$  的最小值为 1; ②显然由平面  $M_1PN \parallel$  平面  $D_1EC$  可得  $M_1N \parallel$  平面  $CD_1E$ ; ③当  $M_1E$  在平面  $ABCD$  内的射影为  $AE$  时,  $M_1E \perp DE$ ; ④由平面  $M_1PN$  可知,  $M_1N \perp AE$  始终成立。故选 D



9. 答案: B 解析: 设等差数列的公差为  $d$ , 由题意  $l > k > 1, k, l \in \mathbb{N}^*, d > 0$ 。

又  $1949 = 1919 + (k-1)d$ ,  $2019 = 1919 + (l-1)d$ , 所以  $d = \frac{30}{k-1} = \frac{100}{l-1}$ , 得到  $10k - 3l = 7$ 。

又  $1949 = 1919 \cdot q^{k-1}$ ,  $2019 = 1919 \cdot q^{l-1}$ , 所以  $q^{l-k} = \frac{2019}{1949}$ 。要使  $q$  最大, 则  $q > 0$ , 且  $l-k$  最小。

因为  $l = \frac{10k-7}{3}$ , 所以  $l-k = \frac{7}{3}(k-1)$ , 又  $k$  的最小值为 4, 所以  $l-k$  的最小值为 7, 所以

$q^7 = \frac{2019}{1949}$ , 选 B。

10. 答案: B 解析: 不妨设  $x_1, x_2$  为函数的两个零点, 其中  $x_1 \in [2, 3]$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}$ ,

则  $x_1 + x_2 = -a$ ,  $x_1 x_2 = b$ 。

则  $a^2 + ab = (x_1 + x_2)^2 - (x_1 + x_2) \cdot x_1 x_2 = (1-x_1)x_2^2 + (2x_1 - x_1^2)x_2 + x_1^2$ 。

由  $1-x_1 < 0$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}$ ,

所以  $(1-x_1)x_2^2 + (2x_1 - x_1^2)x_2 + x_1^2 \leq \frac{4 \times (1-x_1) \times x_1^2 - (2x_1 - x_1^2)^2}{4(1-x_1)} = \frac{x_1^4}{4(x_1-1)}$ ,

令  $g(x_1) = \frac{x_1^4}{4(x_1-1)}$ , 则  $g'(x_1) = \frac{x_1^3(3x_1-4)}{4(x_1-1)^2}$ , 当  $x_1 \in [2, 3]$  时,  $g'(x_1) > 0$  恒成立,

所以  $g(x_1) \in [g(2), g(3)] = [4, \frac{81}{8}]$ 。则  $g(x_1)$  的最大值为  $\frac{81}{8}$ 。此时  $x_1 = 3$ , 还应满足

$x_2 = -\frac{2x_1 - x_1^2}{2(1-x_1)} = -\frac{3}{4}$ 。显然  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -\frac{3}{4}$  时,  $a = b = -\frac{9}{4}$ ,  $a^2 + ab = \frac{81}{8}$ 。

所以选 B。

11. 答案:  $x^2 = 2y$ ;  $\pm 3$

解析:  $z = \frac{m+i}{2-i} = \frac{(m+i)(2+i)}{5} = \frac{(2m-1) + (m+2)i}{5}$ ,

若  $z$  是纯虚数,  $m = \frac{1}{2}$ , 抛物线方程为  $x^2 = 2y$ ;  $|z| = \frac{|m+i|}{|2-i|} = \frac{\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$ , 所以  $m = \pm 3$ 。

12. 答案:  $x^2 + y^2 - \frac{20}{3}x + 4 = 0$  ;  $\frac{16}{5}$

解析: 设  $M(x, y)$ , 则  $\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$ , 化简得  $x^2 + y^2 - \frac{20}{3}x + 4 = 0$ 。又

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ , 所以  $x^2 + y^2 = 4$ , 联立方程解得两圆交点为  $M(\frac{6}{5}, \pm \frac{8}{5})$ , 所以  $S_{\triangle MAB} = \frac{16}{5}$ 。

另: 可以用阿波罗尼斯圆考虑。

13 答案:  $2^7 = 128$  ;  $-2835x^2$

解析: 令  $x=1$ , 则所有项系数和为  $2^7 = 128$ ; 二项式  $(3x - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})^7$  展开式的通项为

$T_{r+1} = C_7^r (-1)^r \cdot 3^{7-r} \cdot x^{7-\frac{5}{3}r}$  ( $r=0,1,2,3,4,5,6,7$ ), 令  $7-\frac{5}{3}r=2$ , 得  $r=3$ , 所以含  $x^2$  的项为

$T_{3+1} = C_7^3 (-1)^3 \cdot 3^4 \cdot x^2 = -2835x^2$ 。

14 答案:  $\frac{19}{27}$

方法一: 对  $a^a = (8a)^{9a}$  两边取以  $a$  为底的对数可得  $a = 9a \cdot \log_a(8a)$ , 所以  $\log_a(8a) = \frac{1}{9}$ , 解得

$\log_a 8 = -\frac{8}{9}$ , 即  $\log_a 2 = -\frac{8}{27}$ , 所以  $\log_a(2a) = \frac{19}{27}$ 。

方法二: 由  $a^a = (8a)^{9a}$  得  $8a = (a^a)^{\frac{1}{9a}} = a^{\frac{1}{9}}$ , 所以  $8a^3 = a^{\frac{19}{9}}$ , 即  $(2a)^3 = a^{\frac{19}{9}}$ , 所以  $\log_a(2a) = \frac{19}{27}$ 。

15. 答案:  $\frac{2}{5}$ ;  $\frac{\sqrt{7}}{5}$

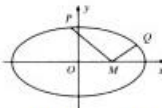
解析: 由  $\frac{1+\sin A}{\cos A} = 3 = \frac{\cos A}{1-\sin A}$ , 可得  $\begin{cases} 3\cos A = 1 + \sin A, \\ 3 - 3\sin A = \cos A \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} \sin A = \frac{4}{5}, \\ \cos A = \frac{3}{5} \end{cases}$ ,

所以  $\frac{1+\cos A}{\sin A} = 2$ ; 由  $\cos B + \cos C = \frac{3}{5}$ ,  $\cos B \cos C = -\frac{1}{5}$ ,

所以  $(\sin B \cdot \sin C)^2 = (1 - \cos^2 B)(1 - \cos^2 C)$

$= 1 - \cos^2 B - \cos^2 C + \cos^2 B \cdot \cos^2 C$

$= (1 + \cos B \cos C)^2 - (\cos B + \cos C)^2 = \frac{7}{25}$ 。  $\sin B \cdot \sin C = \frac{\sqrt{7}}{5}$



16. 答案: 1 解析: 设  $P$  关于  $x$  轴的对称点为  $P_1$ , 则  $P_1, M, Q$  三点共线。不妨设  $QM$  的方程为  $x = my + 1$ , 与椭圆方程联立得  $(m^2 + 3)y^2 + 2my - 2 = 0$ 。设  $P_1(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ , 则

$y_1 + y_2 = \frac{-2m}{m^2 + 3}$  ①,  $y_1 \cdot y_2 = \frac{-2}{m^2 + 3}$  ②, 又  $|P_1M| = 2|QM|$ , 所有  $y_1 = -2y_2$  ③, 由①②③解得

$m^2 = 1$ , 所以直线  $QM$  的斜率为 1。

17. 答案: 25 解析: 记圆心为  $O$ , 注意到  $\overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2 = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ , ...,

$$\overrightarrow{CE}^2 = (\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC})^2 = \overrightarrow{OE}^2 + \overrightarrow{OC}^2 - 2\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OC}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{DE}^2 + \overrightarrow{EA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{BE}^2 + \overrightarrow{CE}^2 \\ = 4(\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OD}^2 + \overrightarrow{OE}^2) - 2(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OE} \\ + \overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OE}) \\ = 20 - [(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE})^2 - (\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OD}^2 + \overrightarrow{OE}^2)] \\ = 25 - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE})^2 \leq 25, \text{ 当且仅当 } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}, \\ \text{即 } ABCDE \text{ 为正五边形时取到最大值.} \end{aligned}$$

18. 解析:

$$(I) f(x) = \sqrt{3} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1 + \cos x}{2} + 1$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} = \sin(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}.$$

$$\because f(x) = \frac{5}{6}, \quad \therefore \sin(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{3},$$

$$\text{又 } \because x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \therefore x - \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}], \text{ 所以 } \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\therefore \cos x = \cos[(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{6}] = \cos(x - \frac{\pi}{6}) \cos \frac{\pi}{6} - \sin(x - \frac{\pi}{6}) \sin \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{6} - 1}{6}.$$

$$(II) \text{ 由 } 2b \cos A \leq 2c - \sqrt{3}a, \text{ 得 } 2 \sin B \cos A \leq 2 \sin C - \sqrt{3} \sin A$$

$$\therefore 2 \sin B \cos A \leq 2 \sin(A + B) - \sqrt{3} \sin A,$$

$$2 \sin B \cos A \leq 2(\sin A \cos B + \cos A \sin B) - \sqrt{3} \sin A,$$

$$\text{化简得 } 2 \sin A \cos B \geq \sqrt{3} \sin A, \text{ 所以 } \cos B \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 所以 } B \in (0, \frac{\pi}{6}], B - \frac{\pi}{6} \in (-\frac{\pi}{6}, 0],$$

$$\sin(B - \frac{\pi}{6}) \in (-\frac{1}{2}, 0], f(B) = \sin(B - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2} \in (0, \frac{1}{2}].$$

19. (I) 证明:  $\triangle SAD$  中,  $SE \perp AD$  且  $SE = \sqrt{3}$ , 在  $Rt\triangle CDE$  中,  $CD = 2, DE = 1, CE = \sqrt{5}$ , 又  $SC^2 = SE^2 + EC^2$ , 所以  $SE \perp EC$ . 所以  $SE \perp$  平面  $ABCD$ , 又  $SE \subseteq$  平面  $SAD$ , 所以平面  $SAD \perp$  平面  $ABCD$ .

(II) 取  $CD$  中点  $F$ , 连接  $BF$ , 记  $BF$  与  $CE$  的交点为  $G$ , 连接  $SG$ . 由正方形性质可知  $BF \perp CE$ , 又  $SE \perp$  平面  $ABCD$ ,  $BF \subseteq$  平面  $ABCD$  所以  $SE \perp BF$ .  $SE, CE \subseteq$  平面  $SEC$ ,  $SE \cap CE = E$ , 所以  $BF \perp$  平面  $SEC$ , 所以  $\angle BSG$  就是直线  $SB$  与平面  $SEC$  所成的角.

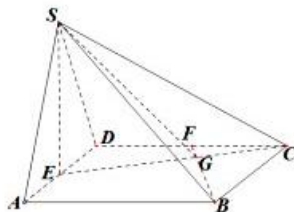
$$Rt\triangle BCF \text{ 中, } \tan \angle CBF = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } \cos \angle CBF = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$Rt\triangle BCG \text{ 中 } BG = BC \cdot \cos \angle CBF = \frac{4\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{又 } SB = SC = 2\sqrt{2},$$

$$\text{所以 } Rt\triangle SBG \text{ 中, } \sin \angle BSG = \frac{BG}{SB} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$





20. 解析: (I)  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n-1}{n-a_n} \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{n-a_n}{(n-1)a_n} = \frac{n}{(n-1)a_n} - \frac{1}{n-1}, \frac{1}{na_{n+1}} = \frac{1}{(n-1)a_n} - \frac{1}{n(n-1)},$

所以  $f(n) = \frac{1}{na_{n+1}} - \frac{1}{(n-1)a_n} = -\frac{1}{n(n-1)}.$

由题易求得  $a_3 = \frac{1}{7}$

因为  $\frac{1}{na_{n+1}} - \frac{1}{(n-1)a_n} = -(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}),$

所以当  $n \geq 3$  时,  $n$  依次取  $3, 4, \dots, n-1$ , 并累加可得:

$$\frac{1}{(n-1)a_n} - \frac{1}{2a_3} = -(\frac{1}{2} - \frac{1}{n-1}), \quad \frac{1}{(n-1)a_n} = \frac{1}{2a_3} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{n-1}) = \frac{3n-2}{n-1},$$

所以当  $n \geq 3$  时,  $a_n = \frac{1}{3n-2},$

又  $n=1, 2$  时也成立, 所以  $a_n = \frac{1}{3n-2}.$

(II) 当  $k \geq 2$  时, 有  $a_k^2 = \frac{1}{(3k-2)^2} < \frac{1}{(3k-4)(3k-1)} = \frac{1}{3}(\frac{1}{3k-4} - \frac{1}{3k-1}).$

所以当  $n \geq 2$  时

$$有 T_n = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 < 1 + \frac{1}{3}[(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{8}) + \dots + (\frac{1}{3n-4} - \frac{1}{3n-1})]$$

$$= 1 + \frac{1}{3}(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n-1}) < 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}.$$

又当  $n=1$  时,  $a_1^2 = 1 < \frac{7}{6}$ . 所以对一切  $n \in N^*, T_n < \frac{7}{6}.$

21. (I) 解析: 设  $P(x_p, y_p)$ , 由  $y' = \frac{1}{2}x_p$ , 所以切线方程为

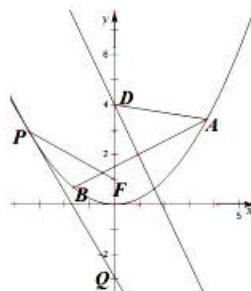
$$y - y_p = \frac{1}{2}x_p(x - x_p), \quad \text{令 } x = 0, \quad \text{则 } y = y_p - \frac{1}{2}x_p^2 = -y_p.$$

所以  $Q(0, -y_p)$ ,  $|FQ| = 1 + y_p$ , 又  $|PF| = y_p + \frac{p}{2} = y_p + 1$ ,

所以  $|FQ| = |PF|$ , 所以  $\angle PFy = 2\angle PQF.$

(II) 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 线段  $AB$  的中点为  $M(x_0, y_0)$ ,

由  $|AF| + |BF| = y_1 + 1 + y_2 + 1 = 6$ , 可得  $y_1 + y_2 = 4$ , 即  $y_0 = 2$ , 所以  $M(x_0, 2).$



设以  $AD$  为直径的圆的圆心为  $C$ ，则  $C(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1+4}{2})$ 。

设截得的弦为  $GH$ ，圆心  $C$  到直线  $m: y=a$  的距离为  $d$ ，

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{1}{4}|GH|^2 &= |CM|^2 - d^2 = (\frac{x_1+x_2}{2} - \frac{x_1}{2})^2 + (2 - \frac{y_1+4}{2})^2 - (\frac{y_1+4}{2} - a)^2 \\ &= (\frac{x_2}{2})^2 + (\frac{y_1}{2})^2 - (\frac{y_1}{2} + 2 - a)^2 = (\frac{x_2}{2})^2 + (\frac{y_1}{2})^2 - (\frac{y_1}{2})^2 - (2-a)y_1 - (2-a)^2 \\ &= y_2 - (2-a)y_1 - (2-a)^2, \end{aligned}$$

注意到  $y_1 + y_2 = 4$ ，所以取  $a=3$ ，则  $\frac{1}{4}|GH|^2$  为定值 3，所以  $E$  点坐标为  $(0,3)$ 。

$$k_{DM} = -\frac{2}{x_0}, \quad k_{AB} = \frac{x_0}{2}, \quad l_{AB}: y-2 = \frac{x_0}{2}(x-x_0), \quad \text{即 } y = \frac{x_0}{2}x + 2 - \frac{1}{2}x_0^2,$$

与  $x^2 = 4y$  联立可得  $x^2 - 2x_0x + 2x_0^2 - 8 = 0$ ，

由  $\Delta > 0$  求得  $x_0^2 < 8$ 。

$$|AB| = \sqrt{1+k^2}|x_1-x_2| = \sqrt{1+(\frac{x_0}{2})^2} \sqrt{(2x_0)^2 - 4 \times (2x_0^2 - 8)} = \sqrt{4+x_0^2} \sqrt{8-x_0^2},$$

而点  $E$  到直线的距离为  $d = \frac{x_0^2+2}{\sqrt{x_0^2+4}}$ ，

$$\text{所以 } S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \times |AB| \times d = \frac{1}{2} \sqrt{8-x_0^2} \cdot (x_0^2+2), \quad \text{令 } \sqrt{8-x_0^2} = t \in (0, 2\sqrt{2}),$$

$$\text{则 } S_{\triangle ABE} = g(t) = -\frac{1}{2}t^3 + 5t, \quad g'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 5,$$

则当  $t^2 = \frac{10}{3}$  时， $S_{\triangle ABE}$  最大值为  $\frac{10\sqrt{30}}{9}$ 。

解法 2: 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,  $\because D(0,4) \therefore$  以  $A, D$  为直径的圆方程为  $x(x-x_1) + (y-4)(y-y_1) = 0$ ，令

过  $E$  的直线  $m$  方程为  $y=a$ ，代入圆方程得  $x^2 - x_1x + (a-4)(a-y_1) = 0$ ，于是截得的弦长

$$= \sqrt{x_1^2 - 4(a-4)(a-y_1)} = \sqrt{4y_1 + 4(a-4)y_1 - 4a(a-4)}, \quad \text{由于弦长为定值，故 } a=3, \text{ 此时弦长为 } 2\sqrt{3}.$$

(以下同解法 1)

22. 解析: (I)  $f(x) = 2x - \frac{1}{x} - 3 \ln x$

$f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x}$ ,  $f'(1) = 0$  切点为 (1,1) 所以切线方程为  $y = 1$ 。

(II)  $f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 2$ , 令  $f'(x_1) = f'(x_2) = t$ ,

则  $\frac{1}{x_1^2} - \frac{3}{x_1} + 2 = t$ ,  $\frac{1}{x_2^2} - \frac{3}{x_2} + 2 = t$ ,

所以  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$ ,  $\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = 2 - t$ , 所以  $x_1 + x_2 = 3x_1x_2 > 2\sqrt{x_1x_2}$ , 解得  $x_1x_2 > \frac{4}{9}$ 。

$f(x_1) + f(x_2) = 2(x_1 + x_2) - (\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}) - 3(\ln x_1 + \ln x_2) = 6x_1x_2 - 3 - 3\ln(x_1x_2)$ 。

令  $s = x_1x_2 > \frac{4}{9}$ ,

则  $6x_1x_2 - 3 - 3\ln(x_1x_2) = g(s) = 6s - 3\ln s - 3$ ,

$g'(s) = 6 - \frac{3}{s}$ 。当  $s \in (\frac{4}{9}, \frac{1}{2})$  时,  $g'(s) < 0$ ; 当  $s \in (\frac{1}{2}, +\infty)$  时,  $g'(s) > 0$ ,

所以  $g(s) \geq g(\frac{1}{2}) = 3\ln 2$ , 即  $f(x_1) + f(x_2) \geq 3\ln 2$ 。

(III) 令  $f(x) = kx + b$ , 即  $2x - \frac{1}{x} - 3\ln x = kx + b$  对任意  $k \in (-\infty, 2)$  有唯一解,

即  $(2-k)x - \frac{1}{x} - 3\ln x - b = 0$ , 令  $h(x) = (2-k)x - \frac{1}{x} - 3\ln x - b = 0$  有唯一解,

$h'(x) = (2-k) + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} = \frac{(2-k)x^2 - 3x + 1}{x^2}$ ,

$(2-k)x^2 - 3x + 1 = 0$  的  $\Delta = 1 + 4k$

①若  $\Delta = 1 + 4k \leq 0$ , 即  $k \leq -\frac{1}{4}$  时,  $h'(x) \geq 0$  恒成立, 所以  $h(x)$  递增, 又  $x \rightarrow 0^+$  时,  $h(x) \rightarrow -\infty$ ;

$x \rightarrow +\infty$  时,  $h(x) \rightarrow +\infty$ , 所以  $h(x) = 0$  有唯一解。

②当  $-\frac{1}{4} < k < 2$  时,  $h'(x) = 0$  有两个不等实根  $x_1, x_2$ ,

其中  $x_1 = \frac{3 - \sqrt{1 + 4k}}{2(2-k)} = \frac{2}{3 + \sqrt{1 + 4k}} \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ;

$x_2 = \frac{3 + \sqrt{1 + 4k}}{2(2-k)} = \frac{2}{3 - \sqrt{1 + 4k}} \in (\frac{2}{3}, +\infty)$ 。

$h(x)$  在  $(0, x_1)$  递增, 在  $(x_1, x_2)$  递减, 在  $(x_2, +\infty)$  递增。

又  $x \rightarrow 0^+$  时,  $h(x) \rightarrow -\infty$ ;  $x \rightarrow +\infty$  时,  $h(x) \rightarrow +\infty$ ,  $h(x)$  有零点。

$h(x)$  的极大值为  $h(x_1) = (2-k)x_1 - \frac{1}{x_1} - 3\ln x_1 - b$ 。

又  $(2-k)x_1^2 - 3x_1 + 1 = 0$ ，即  $(2-k)x_1 = 3 - \frac{1}{x_1}$ ，

所以  $h(x_1) = -\frac{2}{x_1} - 3\ln x_1 + 3 - b$ 。令  $\varphi(x) = -\frac{2}{x} - 3\ln x + 3 - b$ ， $\varphi'(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} = \frac{2-3x}{x^2}$ 。

当  $x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  时， $\varphi'(x) > 0$  恒成立，所以  $\varphi(x) \in (\varphi(\frac{1}{3}), \varphi(\frac{2}{3}))$ 。

即  $\varphi(x) \in (3\ln 3 - 3 - b, 3\ln \frac{3}{2} - b)$ ，即  $h(x)$  的极大值  $\in (3\ln 3 - 3 - b, 3\ln \frac{3}{2} - b)$ 。

同理， $h(x)$  的极小值  $\in (-\infty, 3\ln \frac{3}{2} - b)$ 。

当  $3\ln \frac{3}{2} - b \leq 0$ ，即  $b \geq 3\ln \frac{3}{2}$  时， $h(x)$  的极大值小于 0，则  $h(x)$  有唯一零点。

当  $3\ln \frac{3}{2} - b > 0$ ，即  $b < 3\ln \frac{3}{2}$  时，存在  $h(x)$  的极小值  $= h(x_2) = 0$ ，则  $h(x)$  有两个零点，

不合题意。所以  $b \geq 3\ln \frac{3}{2}$ 。