**浙江省名校协作体2020届高三3月第二次联考数学试题**

**一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1．若全集*U*＝{0，1，2，3，4，5，6，7}，集合*A*＝{3，4，5，6}，集合*B*＝{1，3，4}，则集合∁U*A*∩∁U*B*＝（　　）

A．{0，1，2，5，6，7} B．{1}

C．{0，2，7} D．{5，6}

2．已知双曲线$\frac{x^{2}}{a^{2}}-\frac{y^{2}}{b^{2}}=$1（*a*＞0，*b*＞0）的渐近线方程为*y*＝±3*x*，则双曲线的离心率是（　　）

A．$\sqrt{10}$ B．$\frac{\sqrt{10}}{10}$ C．$\frac{3\sqrt{10}}{10}$ D．3$\sqrt{10}$

3．若直线*y*＝*ax*+2*a*与不等式组$\left\{\begin{matrix}x-y+6\geq 0\\x\leq 3\\x+y-3\geq 0\end{matrix}\right.$表示的平面区域有公共点，则实数*a*的取值范围是（　　）

A．[0，$\frac{9}{5}$] B．[0，9] C．[0，+∞] D．[﹣∞，9]

4．某几何体的三视图如图所示（单位：*cm*），该几何体的体积（单位：*cm*3）是（　　）



A．162 B．126 C．144 D．108+36$\sqrt{2}$

5．已知平面α⊥平面β，且α∩β＝*l*，*a*⊂α，*b*⊂β，则“*a*⊥*b*”是“*a*⊥*l*或*b*⊥*l*”的（　　）

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件

C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

6．函数*y*＝（1$-\frac{2}{1+e^{sinx}}$）|*x*|的图象可能是（　　）

A．.

B．.

C．.

D．．

7．已知0＜*a*＜1，随机变量*X*，*Y*的分布列如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 |
| *P* | （1﹣*a*）2 | 2*a*（1﹣*a*） | *a*2 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Y* | 1 | 0 | ﹣1 |
| *P* | （1﹣*a*）2 | 2*a*（1﹣*a*） | *a*2 |

则下列正确的是（　　）

A．*E*（*Y*）＝2*a* B．*E*（*X*）＝*E*（*Y*）

C．*D* （*Y*）$＞\frac{1}{2}$ D．*D*（ *X*）＝*D* （*Y*）

8．已知*C*为Rt△*ABD*斜边*BD*上一点，且△*ACD*为等边三角形，现将△*ABC*沿*AC*翻折至△*AB*′*C*．若在三棱锥*B*′﹣*ACD*中，直线*CB*′和直线*AB*′与平面*ACD*所成角分别为α，β，则（　　）



A．0＜α＜β B．β＜α≤2β C．2β≤α≤3β D．α≥3β

9．已知0＜*a*＜*b*$＜\frac{1}{e}$，则下列正确的是（　　）

A．$\sqrt[b]{b}＞\sqrt[b]{a}＞\sqrt[a]{b}＞\sqrt[a]{a}$ B．$\sqrt[b]{a}＞\sqrt[a]{a}＞\sqrt[b]{b}＞\sqrt[a]{b}$

C．$\sqrt[b]{b}＞\sqrt[a]{b}＞\sqrt[b]{a}＞\sqrt[a]{a}$ D．以上均不正确

10．已知数列{*an*}满足：*a*1＝0，$a\_{n+1}=ln(e^{a\_{n}}+1)-a\_{n}$（*n*∈**N**\*），前*n*项和为*Sn*（参考数据：*ln*2≈0.693，*ln*3≈1.099），则下列选项中错误的是（　　）

A．{*a*2*n*﹣1}是单调递增数列，{*a*2*n*}是单调递减数列

B．*an*+*an*+1≤*ln*3

C．*S*2020＜666

D．*a*2*n*﹣1＜*a*2*n*

**二、填空题：本大题共7小题，多空题每题6分，单空题每题4分，共36分．**

11．已知复数*z*$=\frac{2+i}{1-i}$（*i*是虚数单位），则|*z*|＝　 　．

12．我国古代数学著作《增删算法统宗》中有这样一道题：“三百七十八里关，初行健步不为难；次日脚痛减一半，六朝才得到其关；要见每朝行里数，请君仔细详推算．”其大意为“某人行路，每天走的路是前一天的一半，6天共走了378里．”则他第六天走　 　里路，前三天共走了　 　里路．

13．在二项式$(x^{2}-\frac{1}{x})^{6}$的展开式中，常数项是　 　，所有二项式系数之和是　 　．

14．设椭圆*C*：$\frac{x^{2}}{2}+y^{2}=1$的左焦点为*F*，直线*l*：*x*﹣*y*+2＝0．动点*P*在椭圆*C*上，记点*P*到直线*l*的距离为*d*，则|*PF*|﹣*d*的最大值是　 　．

15．在△*ABC*中，内角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*．若*C*＝2*B*，4*b*＝3*c*，*a*＝1，则sin*A*＝　 　，△*ABC*的面积是　 　．

16．已知*x*，*y*∈**R**，且满足4*x*+*y*+2*xy*+1＝0，则*x*2+*y*2+*x*+4*y*的最小值是　 　．

17．已知平面向量$\overset{\to }{a}$，$\overset{\to }{b}$，$\overset{\to }{c}$，|$\overset{\to }{a}$|＝2，|$\overset{\to }{b}$|＝3，|$\overset{\to }{c}$|＝4，$\overset{\to }{a}⋅\overset{\to }{b}=\frac{3}{2}$，则|$\overset{\to }{a}⋅\overset{\to }{c}$|+|$\overset{\to }{b}⋅\overset{\to }{c}$|的最大值是　 　，最小值是　 　．

**三、解答题：本大题共5小题，共74分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

18．（14分）已知函数$f(x)=sin^{2}(x+\frac{π}{3})+\frac{1}{2}cos(2x+\frac{π}{6})$．

（Ⅰ）求$f(\frac{π}{24})$的值；

（Ⅱ）求函数*y*＝*f*（*x*）的最小正周期及其单调递增区间．

19．（15分）如图，在四棱台*ABCD*﹣*A*1*B*1*C*1*D*1中，底面*ABCD*是菱形，∠*ABC*$=\frac{π}{3}$，∠*B*1*BD*$=\frac{π}{6}$，

（Ⅰ）求证：直线*AC*⊥平面*BDB*1；

（Ⅱ）求直线*A*1*B*1与平面*ACC*1所成角的正弦值．



20．（15分）已知等比数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*，满足*a*4﹣*a*2＝12，*S*4+2*S*2＝3*S*3，数列{*bn*}满足*b*1＝0，且*n*（*bn*+1+1）﹣（*n*+1）（*bn*+1）＝*n*（*n*+1）（*n*∈**N**\*）

（Ⅰ）求数列{*an*}，{*bn*}的通项公式；

（Ⅱ）设数列$(\frac{\sqrt{b\_{n}}}{a\_{n}})$前*n*项和为*Tn*，证明：*Tn*＜2（*n*∈**N**\*）．

21．（15分）已知抛物线*x*2＝2*py*（*p*＞0）上一点*R*（*m*，2）到它的准线的距离为3．若点*A*，*B*，*C*分别在抛物线上，且点*A*、*C*在*y*轴右侧，点*B*在*y*轴左侧，△*ABC*的重心*G*在*y*轴上，直线*AB*交*y*轴于点*M*且满足3|*AM*|＜2|*BM*|，直线*BC*交*y*轴于点*N*．记△*ABC*，△*AMG*，△*CNG*的面积分别为*S*1，*S*2，*S*3．

（Ⅰ）求*p*的值及抛物线的准线方程；

（Ⅱ）求$\frac{S\_{1}}{S\_{2}+S\_{3}}$的取值范围．



22．（15分）已知函数*f*（*x*）＝（*e*﹣*k*）*elnx*+*kx*，其中*k*＞0，*g*（*x*）＝*ex*．

（Ⅰ）求函数*f*（*x*）的单调区间；

（Ⅱ）证明：当*e*＜*k*＜2*e*2+*e*时，存在唯一的整数*x*0，使得*f*（*x*0）＞*g*（*x*0）．（注：*e*＝2.71828……为自然对数的底数，且*ln*2≈0.693，*ln*3≈1.099．）

**一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1．全集*U*＝{0，1，2，3，4，5，6，7}，集合*A*＝{3，4，5，6}，集合*B*＝{1，3，4}，

则集合∁U*A*＝{0，1，2，7}，∁U*B*＝{0，2，5，6，7}，

集合∁U*A*∩∁U*B*＝{0，2，7}，

故选：*C*．

2．由双曲线的方程可得渐近线为：*y*$=\pm \frac{b}{a}$*x*，

所以由题意可得：$\frac{b}{a}=$3，

所以离心率*e*$=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^{2}}{a^{2}}}=\sqrt{1+\frac{b^{2}}{a^{2}}}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$，

故选：*A*．

3．画出不等式组表示的平面区域，如图所示

$\left\{\begin{matrix}x-y+6=0\\x+y-3=0\end{matrix}\right.$⇒$\left\{\begin{matrix}x=-\frac{3}{2}\\y=\frac{9}{2}\end{matrix}\right.$；

∴*C*（$-\frac{3}{2}$，$\frac{9}{2}$），

直线*y*＝*a*（*x*+2）过定点*A*（﹣2，0），

直线*y*＝*a*（*x*+2）经过不等式组表示的平面区域有公共点

则*a*＞0，*kAC*$=\frac{\frac{9}{2}-0}{(-\frac{3}{2})-(-2)}=$9，

∴*a*∈[0，9]．

故选：*B*．



4．由三视图知，该几何体是底面为正视图的直四棱柱，如图所示；



结合图中数据，计算该几何体的体积为

*V*＝*Sh*$=\frac{1}{2}×$（3+6）×6×6＝162（*cm*3）．

故选：*A*．

5．由$\left\{\begin{matrix}α⊥β\\α∩β=l\\a⊂α\\b⊂β\\a⊥b\end{matrix}\right.$⇒*a*⊥*l*或*b*⊥*l*，

由$\left\{\begin{matrix}α⊥β\\α∩β=l\\a⊂α\\b⊂β\\a⊥l或b⊥l\end{matrix}\right.$⇒*a*⊥*b*，

故“*a*⊥*b*”是“*a*⊥*l*或*b*⊥*l*”的充要条件，

故选：*C*．

6．因为*f*（*x*）＝*y*＝（1$-\frac{2}{1+e^{sinx}}$）|*x*|$=-\frac{1-e^{sinx}}{1+e^{sinx}}⋅|x|$，

所以*f*（﹣*x*）$=(1-\frac{2}{1+e^{sin(-x)}})⋅|-x|=(1-\frac{2}{1+e^{-sinx}})⋅|x|=\frac{1-e^{sinx}}{1+e^{sinx}}⋅|x|=-$*f*（*x*），

所以函数为奇函数，排除*A*、*B*选项；

$f(\frac{π}{2})=(1-\frac{2}{1+e^{1}})⋅|\frac{π}{2}|=\frac{e-1}{e+1}⋅\frac{π}{2}＞0$，所以排除*C*．

故选：*D*．

7．（1﹣*a*）2+2*a*（1﹣*a*）+*a*2＝1，恒成立，0＜*a*＜1，

依题意*EX*＝2*a*（1﹣*a*）+2*a*2＝2*a*，

*EY*＝（1﹣*a*）2﹣*a*2＝1﹣2*a*，∴*EX*与*EY*不能说明大小关系．

所以*D*（*X*）＝（1﹣*a*）2（0﹣2*a*）2+2*a*（1﹣*a*）（1﹣2*a*）2+*a*2（2﹣2*a*）2

＝2*a*﹣2*a*2．

同理：*D*（*Y*）＝（1﹣*a*）2（2*a*）2+2*a*（1﹣*a*）（1﹣2*a*）2+*a*2（﹣2+2*a*）2＝2*a*﹣2*a*2．

∴*D*（*X*）＝*D*（*Y*），

故选：*D*．

8．∵∠*BAC*＝90°，∠*ADB*＝60°，不妨设*AD*＝1，

∴$AB=\sqrt{3}=AB'，BD=2，CB=CB'=1$，

设*B*′到平面*ACD*的距离为*d*，且易知*B*′的轨迹为以*AC*为锥轴，*AB*为母线的圆锥的底面圆周，

∴$d\in (0，\frac{\sqrt{3}}{2}]$，当*AB*′⊥*CD*时取得最大值，

∴$sinα=\frac{d}{1}=d，sinβ=\frac{d}{\sqrt{3}}＜sinα$，

∴α＞β，故排除*A*；

下面比较α与2β的大小：

$sin2β=2⋅\frac{d}{\sqrt{3}}⋅\sqrt{1-\frac{d^{2}}{3}}=d⋅\sqrt{\frac{4}{3}-\frac{4}{9}d^{2}}$，且由最小角定理可知，α≤60°，β≤30°，2β≤60°，

∴$sin2β-sinα=d(\sqrt{\frac{4}{3}-\frac{4}{9}d^{2}}-1)$，

又$d^{2}\in (0，\frac{3}{4}]$，

∴sin2β﹣sinα≥0，即α≤2β，故排除*CD*．

故选：*B*．

9．令*y*＝*f*（*x*）＝*xx*，*x*∈（0，$\frac{1}{e}$）．

则*lny*＝*xlnx*，∴*y*′＝*xx*（*lnx*+1）＜0．

∴函数*f*（*x*）＝*xx*在*x*∈（0，$\frac{1}{e}$）上单调递减．

∵0＜*a*＜*b*$＜\frac{1}{e}$，∴*aa*＞*bb*，即$\sqrt[b]{a}＞\sqrt[a]{b}$．

∵0＜*a*＜*b*$＜\frac{1}{e}$，利用指数函数幂函数的单调性可得：$\sqrt[b]{b}＞\sqrt[b]{a}$，$\sqrt[a]{b}＞\sqrt[a]{a}$，

∴$\sqrt[b]{b}＞\sqrt[b]{a}＞\sqrt[a]{b}＞\sqrt[a]{a}$，

故选：*A*．

10．由$a\_{n+1}=ln(e^{a\_{n}}+1)-a\_{n}$，得$a\_{n+1}=ln(e^{a\_{n}}+1)-ln(e^{a\_{n}})$，

$e^{a\_{n+1}}=1+\frac{1}{e^{a\_{n}}}$，

令*bn*$=e^{a\_{n}}$，即*an*＝*lnbn*，则$b\_{n+1}=1+\frac{1}{b\_{n}}$，*a*1＝0，∴*b*1＝1，

作图如下：



由图得：

①{*b*2*n*﹣1}单调递增，{*b*2*n*}单调递减，

*an*＝*lnbn*，故*A*正确；

②∵*bn*∈[1，2]，∴*bnbn*+1＝*bn*（1$+\frac{1}{b\_{n}}$）＝*bn*+1∈[2，3]，

∴*bnbn*+1$=e^{a\_{n}+a\_{n+1}}$∈[2，3]，

∴*an*+*an*+1∈[*ln*2，*ln*3]，故*B*正确；

③∵*an*+*an*+1≥*ln*2，∴*S*2020＝（*a*1+*a*2）+…+（*a*2019+*a*2010）≥1010•*ln*2＞693，故*C*错误．

④由不动点（$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\frac{\sqrt{5}+1}{2}$），得1$\leq b\_{2n-1}＜\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\frac{1+\sqrt{5}}{2}＜b\_{2n}\leq 2$，

∴*b*2*n*＞*b*2*n*﹣1，∴*a*2*n*＞*a*2*n*﹣1，故*D*正确．

故选：*C*．

**二、填空题：本大题共7小题，多空题每题6分，单空题每题4分，共36分．**

11．复数*z*$=\frac{2+i}{1-i}=\frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+3i}{2}$，则|*z*|$=\sqrt{(\frac{1}{2})^{2}+(\frac{3}{2})^{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$．

故答案为：$\frac{\sqrt{10}}{2}$．

12．每天走的路形成等比数列{*an*}，公比*q*$=\frac{1}{2}$，*S*6＝378．

∴$\frac{a\_{1}(1-\frac{1}{2^{6}})}{1-\frac{1}{2}}=$378，解得*a*1＝192．

∴*a*6＝192$×\frac{1}{2^{5}}=$6，*S*3$=\frac{192(1-\frac{1}{2^{3}})}{1-\frac{1}{2}}=$336．

故答案为：192，336．

13．二项式$(x^{2}-\frac{1}{x})^{6}$的展开式中，常数项为：$C\_{6}^{4}$（﹣1）4＝15；

二项式$(x^{2}-\frac{1}{x})^{6}$的展开式中所有二项式系数之和为$C\_{6}^{0}+C\_{6}^{1}+\cdots +C\_{6}^{6}=$26＝64．

故答案为：15；64．

14．椭圆*C*：$\frac{x^{2}}{2}+y^{2}=1$的左焦点为*F*（﹣1，0），右焦点*F*′（1，0），

直线*l*：*x*﹣*y*+2＝0．动点*P*在椭圆*C*上，由椭圆的定义可知|*PF*|+|*PF*′|＝2$\sqrt{2}$，记点*P*到直线*l*的距离为*d*，

则|*PF*|﹣*d*＝2$\sqrt{2}-$*d*﹣|*PF*′|＝2$\sqrt{2}-$（*d*+|*PF*′|），

当*d*+|*PF*′|最小时，|*PF*|﹣*d*取得最大值，

所以*d*+|*PF*′|最小值为：$\frac{|1-0+2|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

则|*PF*|﹣*d*的最大值是：2$\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{2}$．



15．因为*C*＝2*B*，4*b*＝3*c*，

由正弦定理可得，$\frac{b}{c}=\frac{sinB}{sinC}$，即$\frac{3}{4}=\frac{sinB}{sin2B}=\frac{1}{2cosB}$，

所以cos*B*$=\frac{2}{3}$，sin*B*$=\sqrt{1-cos^{2}B}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

故sin*C*＝sin2*B*＝2sin*B*cos*B*$=2×\frac{2}{3}×\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$，cos*C*＝cos2*B*＝2cos2*B*﹣1$=-\frac{1}{9}$，

∴sin*A*＝sin（*B*+*C*）＝sin*B*cos*C*+sin*C*cos*B*$=\frac{\sqrt{5}}{3}×(-\frac{1}{9})+\frac{2}{3}×\frac{4\sqrt{5}}{9}=\frac{7\sqrt{5}}{27}$，

由正弦定理可得，$\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}$，

即$\frac{1}{\frac{7\sqrt{5}}{27}}=\frac{b}{\frac{\sqrt{5}}{3}}$，故*b*$=\frac{9}{7}$，

∴*S*△*ABC*$=\frac{1}{2}absinC=\frac{1}{2}×1×\frac{9}{7}×\frac{4\sqrt{5}}{9}=\frac{2\sqrt{5}}{7}$．

故答案为：$\frac{7\sqrt{5}}{27}$，$\frac{2\sqrt{5}}{7}$

16．由4*x*+*y*+2*xy*+1＝0，得（2*x*+1）（*y*+2）＝1，

令2*x*+1＝*m*，*y*+2＝*n*，则*mn*＝1．

∴*x*2+*y*2+*x*+4*y*$=\frac{1}{4}m^{2}+n^{2}-\frac{17}{4}\geq 2⋅\frac{1}{2}mn-\frac{17}{4}=1-\frac{17}{4}=-\frac{13}{4}$．①

当且仅当$\frac{1}{2}m=n$，即*x*$+\frac{1}{2}=$*y*+2，

联立$\left\{\begin{matrix}x=y+\frac{3}{2}\\4x+y+2xy+1=0\end{matrix}\right.$，解得$\left\{\begin{matrix}x=\frac{-1-\sqrt{2}}{2}\\y=-2-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{matrix}\right.$或$\left\{\begin{matrix}x=\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\\y=-2+\frac{\sqrt{2}}{2}\end{matrix}\right.$，说明①中“＝”成立．

∴*x*2+*y*2+*x*+4*y*的最小值是$-\frac{13}{4}$．

故答案为：$-\frac{13}{4}$．

17．∵$\overset{\to }{a}⋅\overset{\to }{b}=\frac{3}{2}$，

∴$cos＜\overset{\to }{a}，\overset{\to }{b}＞=\frac{1}{4}$，

而$|\overset{\to }{a}⋅\overset{\to }{c}|+|\overset{\to }{b}⋅\overset{\to }{c}|=|\overset{\to }{a}||\overset{\to }{c}|cosθ\_{1}+|\overset{\to }{b}||\overset{\to }{c}|cosθ\_{2}=|\overset{\to }{c}|(|\overset{\to }{a}|cosθ\_{1}+|\overset{\to }{b}|cosθ\_{2})$，

其中$＜\overset{\to }{a}，\overset{\to }{c}＞=θ\_{1}，＜\overset{\to }{b}，\overset{\to }{c}＞=θ\_{2}$，$|\overset{\to }{a}|cosθ\_{1}$表示$\overset{\to }{a}$在$\overset{\to }{c}$上的投影，$|\overset{\to }{b}|cosθ\_{2}$表示$\overset{\to }{b}$在$\overset{\to }{c}$上的投影，

向量$\overset{\to }{a}$和向量$\overset{\to }{b}$在一个线上，投影之和的最大值为|*OB*|，即$\overset{\to }{c}$经过点*B*时，$|OB|=\sqrt{2^{2}+3^{2}-2×2×3×(-\frac{1}{4})}=4$，

∴最大值为$|\overset{\to }{c}|⋅|OB|=4×4=16$；

接下来求|*MN*|的最小值，|*O*′*M*|随着角度的变化要小于|*O*′*N*|，故当*O*′*N*⊥*O*′*B*时，|*MN*|有最小值，

此时$|MN|\_{min}=|OA|cos(\frac{π}{2}-θ)=2×\sqrt{1-(\frac{1}{4})^{2}}=\frac{\sqrt{15}}{2}$，其中$＜\overset{\to }{a}，\overset{\to }{b}＞=θ$，

∴最小值为$4×\frac{\sqrt{15}}{2}=2\sqrt{15}$．

故答案为：$16，2\sqrt{15}$．





**三、解答题：本大题共5小题，共74分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

18．（Ⅰ）由$f(x)=sin^{2}(x+\frac{π}{3})+\frac{1}{2}cos(2x+\frac{π}{6})$

可得：$f(x)=\frac{1-cos(2x+\frac{2π}{3})}{2}+cos(2x+\frac{π}{6})$，

$=\frac{cos(2x+\frac{π}{6})-cos(2x+\frac{π}{6}+\frac{π}{2})}{2}+\frac{1}{2}$，

$=\frac{cos(2x+\frac{π}{6})+sin(2x+\frac{π}{6})}{2}+\frac{1}{2}$，

$=\frac{\sqrt{2}}{2}sin(2x+\frac{5π}{12})+\frac{1}{2}$，

则$f(\frac{π}{24})=\frac{\sqrt{2}}{2}sin(2×\frac{π}{24}+\frac{5π}{12})+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}sin\frac{π}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$．

（Ⅱ）由（Ⅰ）知：$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}sin(2x+\frac{5π}{12})+\frac{1}{2}$，

函数*y*＝*f*（*x*）的最小正周期为*T*＝π，

又 由$2kπ-\frac{π}{2}＜2x+\frac{5π}{12}＜2kπ+\frac{π}{2}$，

解得$kπ-\frac{11π}{24}＜x＜kπ+\frac{π}{24}$

因此函数*y*＝*f*（*x*）的单调递增强区间为$[kπ-\frac{11π}{24}，kπ+\frac{π}{24}]$（*k*∈**Z**）

19．（*I*）方法一：连接*AC*，*BD*交于*O*，

因为*BC*＝*BA*，∠*B*1*BA*＝∠*B*1*BC*，*B*1*B*＝*BB*1，

所以△*B*1*BC*≌△*B*1*BA*，故*B*1*A*＝*B*1*C*；…………………（2分）

又因为*O*为菱形对角线交点，即是线段*AC*的中点，所以*B*1*O*⊥*AC*；……

又四边形*ABCD*为菱形，故*AC*⊥*BD*；

而*B*1*O*∩*BD*＝*O*，所以*AC*⊥平面*BDB*1；………………………………………

方法二：因为∠*B*1*BA*＝∠*B*1*BC*，

所以点*B*1在平面*ABCD*内的射影*O*在为∠*ABC*的平分线，………………………（2分）

又四边形*ABCD*为菱形，故*BD*为∠*ABC*的平分线，则*O*∈直线*BD*，………………

故平面*BDB*1⊥平面*ABCD*，而平面*BDB*1∩平面*ABCD*＝*BD*，

又四边形*ABCD*为菱形，故*AC*⊥*BD*，

所以*AC*⊥平面*BDB*1；………………………………………



（Ⅱ）方法一：延长*AA*1，*BB*1，*CC*1，*DD*1交于点*P*，平面*BDB*1即为平面*BDP*，平面*ACC*1即平面*ACP*，

由（*I*）得平面*ACP*⊥平面*BDP*，*OP*＝平面*ACP*∩平面*BDP*，

所以过*B*1作*B*1*H*⊥*OP*，则*B*1*H*⊥平面*ACP*，故∠*B*1*A*1*H*即为直线*A*1*B*1与平面*ACC*1所成角；…………（10分）

（若研究直线*AB*与平面*ACC*1所成角的正弦值则线段等比例扩大2倍结果不变）

因为四棱台*ABCD*﹣*A*1*B*1*C*1*D*1中*AB*＝2*A*1*B*1＝2，所以*A*1*B*1＝1，*BP*＝6；

因为*AB*＝*BC*＝2，所以$BD=2\sqrt{3}$，

作*PG*⊥*BD*，因为$∠B\_{1}BD=\frac{π}{6}$，则$BG=3\sqrt{3}$，*PG*＝3，

所以$PO=\sqrt{21}$，…………（12分）

所以cos∠*BPO*$=\frac{36+21-3}{2×6×\sqrt{21}}=\frac{9}{2\sqrt{21}}$，$sin∠BPO=\frac{\sqrt{7}}{14}$，$B\_{1}H=\frac{3\sqrt{7}}{14}$，…………（14分）

所以$sin∠B\_{1}A\_{1}H=\frac{B\_{1}H}{B\_{1}A\_{1}}=\frac{3\sqrt{7}}{14}$． …………（15分）

方法二：延长*AA*1，*BB*1，*CC*1，*DD*1交于点*P*，



平面*BDB*1即为平面*BDP*，平面*ACC*1即平面*ACP*，

设直线*A*1*B*1与平面*ACC*1所成角为θ，

过*P*作*PG*⊥*BD*，垂足为*G*，因为*BP*＝6，所以$BG=3\sqrt{3}$；

建立空间直角坐标系如下，以*OB*，*OC*为*x*，*y*轴，作*z*轴∥*GP*，…………（9分）

则$A(0，-1，0)，B(\sqrt{3}，0，0)，C(0，1，0)，P(-2\sqrt{3}，0，3)$；

所以$\overset{\to }{AB}=(\sqrt{3}，1，0)$，$\overset{\to }{AC}=(0，2，0)$，$\overset{\to }{AP}=(-2\sqrt{3}，1，3)$；………（11分）

设平面*ACP*的法向量为$\overset{\to }{m}=(x，y，z)$，则$\left\{\begin{matrix}2y=0\\-2\sqrt{3}x+y+3z=0\end{matrix}\right.$，化简得$\left\{\begin{matrix}y=0\\2x-\sqrt{3}z=0\end{matrix}\right.$；

所以$\overset{\to }{m}=(\frac{\sqrt{3}}{2}，0，1)$，…………（13分）

所以cos$＜\overset{\to }{m}$，$\overset{\to }{AB}＞=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}×\sqrt{3}+0+0}{\sqrt{3+1+0}×\sqrt{\frac{3}{4}+0+1}}=\frac{3}{2\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{14}$；

所以$sinθ=\frac{3\sqrt{7}}{14}$．…………（15分）

20．（*I*）由*S*4+2*S*2＝3*S*3，得*S*4﹣*S*3＝2（*S*3﹣*S*2）

即*a*4＝2*a*3，*q*＝2．

又*a*4﹣*a*2＝12故*a*1＝2，所以$a\_{n}=2^{n}$．

由*nbn*+1﹣（*n*+1）*bn*＝*n*（*n*+1）两边同除以*n*（*n*+1），

得$\frac{b\_{n+1}+1}{n+1}-\frac{b\_{n}+1}{n}=1$，

从而数列$\{\frac{b\_{n}+1}{n}\}$为首项*b*1+1＝1，公差*d*＝1的等差数列．

所以$\frac{b\_{n}+1}{n}=n$，

从而数列{*bn*}的通项公式为$b\_{n}=n^{2}-1$．

证明：（Ⅱ）由（*I*）知$\frac{\sqrt{b\_{n}}}{a\_{n}}=\frac{\sqrt{n^{2}-1}}{2^{n}}＜\frac{n}{2^{n}}$．

令$c\_{n}=\frac{n}{2^{n}}$，数列{cn}之和为*Sn*，则*Tn*＜*Sn*

因为*Sn*＝*c*1+*c*2+*c*3+…+cn$=\frac{1}{2^{1}}+\frac{2}{2^{2}}+\frac{3}{2^{3}}+\cdots +\frac{n}{2^{n}}$

则$\frac{1}{2}S\_{n}=\frac{1}{2^{2}}+\frac{2}{2^{3}}+\frac{3}{2^{4}}+\cdots \frac{n-1}{2^{n}}+\frac{n}{2^{n+1}}$，

两式相减得$\frac{1}{2}S\_{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{2^{3}}+\frac{1}{2^{4}}+\cdots \frac{1}{2^{n}}-\frac{n}{2^{n+1}}$，

$\frac{1}{2}S\_{n}=\frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^{n})}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-(\frac{1}{2})^{n}-\frac{n}{2^{n+1}}$．

整理得$S\_{n}=2-\frac{n+2}{2^{n}}$．

所以*Tn*＜*Sn*＜2．

21．（*I*）由抛物线的定义可知$2+\frac{p}{2}=3$，*p*＝2，所以抛物线方程*x*2＝4*y*，

所以*p*＝2，抛物线的准线方程：*y*＝﹣1；

（Ⅱ）设点*A*（*x*1，*y*1），*B*（*x*2，*y*2），*C*（*x*3，*y*3），*x*1＞0，*x*2＜0，*x*3＞0

$\frac{S\_{△AMG}}{S\_{△ABG}}=\frac{|AM|}{|AB|}，\frac{S\_{△CNG}}{S\_{△CBG}}=\frac{|CN|}{|BC|}$，

点*G*为△*ABC*的重心，所以$S\_{△ABG}=S\_{△CBG}=\frac{1}{3}S\_{△ABC}$，

且*x*1+*x*2+*x*3＝0，

$\frac{S\_{2}+S\_{3}}{S\_{1}}=\frac{1}{3}⋅(\frac{|AM|}{|AB|}+\frac{|CN|}{|BC|})=\frac{1}{3}(\frac{x\_{1}}{x\_{1}-x\_{2}}+\frac{x\_{3}}{x\_{3}-x\_{2}})=\frac{1}{3}(\frac{x\_{1}}{x\_{1}-x\_{2}}-\frac{x\_{1}+x\_{2}}{-x\_{1}-2x\_{2}})=\frac{1}{3}(\frac{x\_{1}}{x\_{1}-x\_{2}}+\frac{x\_{1}+x\_{2}}{x\_{1}+2x\_{2}})$，

令$u=\frac{x\_{1}}{x\_{2}}$，所以$\frac{S\_{2}+S\_{3}}{S\_{1}}=\frac{1}{3}(\frac{u}{u-1}+\frac{u+1}{u+2})=\frac{1}{3}(2+\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+2})=\frac{1}{3}(2+\frac{3}{(u-1)(u+2)})$，

因为3|*AM*|＜2|*BM*|，所以3*x*1＜﹣2*x*2，故$-\frac{2}{3}＜u＜0$，$(u-1)(u+2)\in [-\frac{9}{4}，-2)$，

因此$\frac{S\_{2}+S\_{3}}{S\_{1}}\in (\frac{1}{6}，\frac{2}{9}]$，

故所以$\frac{S\_{1}}{S\_{2}+S\_{3}}\in [\frac{9}{2}，6)$．

22．（Ⅰ）函数的定义域为（0，+∞），$f'(x)=\frac{kx+(e-k)e}{x}$，

若0＜*k*≤*e*，则$f'(x)=\frac{k[x-\frac{(k-e)e}{k}]}{x}＞0$，函数*f*（*x*）在区间（0，+∞）上单调递增，

若*k*＞*e*，$f'(x)=\frac{k[x-\frac{(k-e)e}{k}]}{x}$，当$x\in (0，\frac{(k-e)e}{k})$时，*f*′（*x*）＜0，此时函数*f*（*x*）单调递减，

当$x\in (\frac{(k-e)e}{k}，+\infty )$时，*f*′（*x*）＞0，此时函数*f*（*x*）单调递增；

（Ⅱ）证明：当*x*0＝1时，*f*（1）＝*k*＞*e*＝*g*（1），即存在*x*0＝1，使得*f*（*x*0）＞*g*（*x*0）；

当*x*0＝2时，*f*（2）﹣*g*（2）＝（*e*﹣*k*）*eln*2+2*k*﹣*e*2，令*m*（*k*）＝（*e*﹣*k*）*eln*2+2*k*﹣*e*2，

因为*m*（*k*）是关于*k*的一次函数，

所以$m(k)\_{max}=max\{m(e)，m(2e^{2}+e)\}$，其中*m*（*e*）＝2*e*﹣*e*2＜0，*m*（2*e*2+*e*）＝*e*（3*e*+2﹣2*e*2*ln*2），

又3*e*+2﹣2*e*2*ln*2＝2﹣*e*（2*eln*2﹣3）＜2﹣2.71×（2×2.71×0.69﹣3）＝﹣0.004858＜0，

所以*m*（*k*）*max*＜0，即*x*0＝2不符合题意；

因为讨论的是整数解问题，所以接下来若能证明*x*≥*e*时，不符合题意即可，

当*x*≥*e*时，令*h*（*x*）＝*g*（*x*）﹣*f*（*x*）＝*ex*﹣（*e*﹣*k*）*elnx*﹣*kx*，则$h'(x)=e^{x}-\frac{(k-e)e}{x}-k$，

令$t(x)=e^{x}-\frac{(k-e)e}{x}-k$，则$t'(x)=e^{x}-\frac{(k-e)e}{x^{2}}$，

由*k*＞*e*易知*t*′（*x*）在[*e*，+∞）上单调递增，则$t'(x)\geq t'(e)=e^{e}-\frac{k-e}{e}＞e^{e}-\frac{2e^{2}+e-e}{e}=e^{e}-2e＞0$，

所以*t*（*x*）在[*e*，+∞）上单调递增，则$t(x)\geq t(e)=e^{e}-\frac{(e-k)e}{e}-k=e^{e}-e＞0$，

所以*h*′（*x*）＞0，即*h*（*x*）在[*e*，+∞）上单调递增，则*h*（*x*）≥*h*（*e*）＝*ee*﹣（*e*﹣*k*）*elne*﹣*ek*＝*ee*﹣*e*2＞0，即*g*（*x*）＞*f*（*x*），不符合题意．

综上所述，当*e*＜*k*＜2*e*2+*e*时，存在唯一的整数*x*0＝1，使得*f*（*x*0）＞*g*（*x*0）．